# 目　录

## 第　一　篇

# 第一篇

## 第一章 集与点集

数学分析中最重要的概念之一是黎曼(B.Riemann)积分，从黎曼积分的记号$\int_a^b f(x)\,dx$可以看出，它含有两个要素与一个运算，即被积函数$f(x)$、积分区间$[a,b]$与积分运算．本篇的中心内容是勒贝格(H. Lebesgue)积分，它的记号是$\int_E f(x)dm$，这里$f(x)$是可测函数，$E$是欧几里得(Euclid)空间中可测集，不必是区间，而积分运算依赖于所考虑的测度$m$．这是近代积分论中最重要的一种积分，讨论这种积分不仅是为了推广黎曼积分，而且是由于它本身在运算上的灵活性，这对进一步学习近代数学是十分必要的．同时，我们可以看到，数学分析中的一些重要结果也从而得到较为精确的说明．勒贝格积分理论的产生自有它的实际背景．我们将按照集、可测集与可测函数、积分的顺序来讨论，把有关积分的各个环节逐一弄清，进而掌握积分的完整概念．

### §1. 集及其运算

集或集合是数学中的一个基本概念．本书所研究的集合，均指具有确定内容或适合一定条件的事物的全体．对集合的这样的粗略理解不影响我们对本书主题的讨论，因而我们将不去谈集的

严格定义．构成一个集的那些事物称为集的元或元素．元与集的关系是个别与整体的关系．例如，一个圆周上的点的全体成一集，它的元是点．以实数为系数的多项式全体成一集，它的元是实系数多项式．书中恒约定，对给定的集，任一元要么属于它，要么不属于它，二者必居其一．

又如，直线上的一切开区间$(a,b)$成一集(或称类)，这集的元是开区间，实轴上满足$|\cos x|\geqslant 1/2$的点构成一集；$[0,1]$上一切连续函数构成一集，等等．

本书常用拉丁文大写字母$A,B$等表示集，用小写字母$a,b$等表示集的元．

现在我们引进有关集的一些简单概念或术语．设$A$是一个集，$a$是它的元，就写为$a\in A$，读作$a$属于$A$，它的意义与$A$含有$a$相同．若元$b$不属于$A$，写为$b\overline{\in}A$或$b\notin A$．对于任何集$A$，我们恒约定$A\overline{\in}A$，即集$A$自身不能看成$A$的元．

若集$A$的元只有有限个，称$A$为有限集．不含任何元的集称为空集，用记号$\varnothing$表示．一个非空集，如果不是有限集，就称为无限集．

某些集之间可以有种种关系或性质．最基本的关系要算“包含”与“相等”．设$A,B$是两个集，若$A$的每个元都属于$B$，称$A$是$B$的子集，记成$A\subset B$或$B\supset A$，分别读作$A$含于$B$或$B$包含$A$．若$A\subset B$且存在一个元$x\in B$而$x\overline{\in}A$，则称$A$是$B$的真子集。为方便起见，规定空集$\varnothing$是任何集的子集．若$A,B$是两个集，若同时有$A\subset B$与$B\subset A$成立，则称集合$A$与$B$相等，记成$A=B$．

设给定一集$A$与一性质$\pi$．用记号

$$\{a:a\in A,\ \pi(a)\}$$

表示$A$中一切具有性质$\pi$的元$a$所成的集，有时简记成$A\{\pi(a)\}$．例如，上面提到的一个例子可以写成$A\{|\cos x|\geqslant 1/2\}$，这里$A=$

$(-\infty, \infty)$. 关系式 $\{a: a\in A, \pi_1(a)\}\subset\{a: a\in A, \pi_2(a)\}$ 的意义是：由性质 $\pi_1(a)$ 可以推出性质 $\pi_2(a)(a\in A)$.

下面引进集的运算.

**定义 1.1** 设 $A$, $B$ 是两个集. 由 $A$ 中的元以及 $B$ 中的元全体所成的集称为 $A$, $B$ 的并，记成 $A\cup B$(图 1)；就是说，

$$A\cup B=\{x: x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

由同时属于 $A$ 与 $B$ 两者的那些元所成的集称为 $A$ 与 $B$ 的交，记成 $A\cap B$(图 2)；即

$$A\cap B=\{x: x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

由属于 $A$ 而不属于 $B$ 的那些元所成的集称为 $A$ 与 $B$ 的差，记成 $A-B$(图 3). 当 $B\subset A$ 时，差集又称为 $B$ 关于 $A$ 的补集，记成 $\mathscr{C}_A B$. 并集与交集概念可以推广到任意个集的情形. 设 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是一集族，这里 $I$ 是指标集，$\alpha$ 在 $I$ 中取值，那么它们的并与交分别定义为

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha=\{a: \text{有某个 } \alpha\in I \text{ 使 } a\in A_\alpha\},$$

$$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha=\{a: \text{对一切 } \alpha\in I \text{ 有 } a\in A_\alpha\}.$$

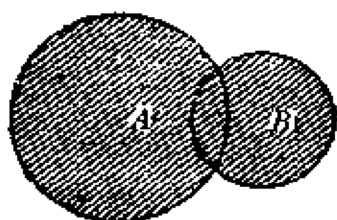


图 1 A∪B

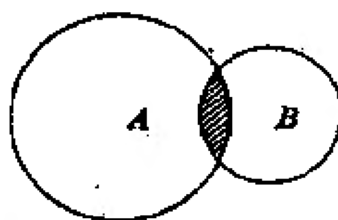


图 2 A∩B

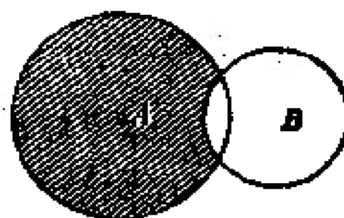


图 3 A—B

我们建立下列定理.

**定理 1.1** 对于集 $E$ 与任意一集族 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$，恒有分配律成立：

$$E\cap\Big(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\Big)=\bigcup_{\alpha\in I}(E\cap A_\alpha).$$

**证** $x\in E\cap(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha)$当且仅当$x\in E$且$x\in\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$或

$x\in E$且存在$\alpha_0\in I$使$x\in A_{\alpha_0}$.

上述论断等价于$x\in E\cap A_\alpha$(对某个$\alpha_0$)从而等价于$x\in\bigcup\limits_{\alpha\in I}(E\cap A_\alpha)$. 这证明了所欲证的等式成立.

当我们在研究一个问题时,如果所考虑的一切集都是$X$的子集,这时便称$X$为基本集. 例如限制在数直线上研究各种不同的点集,那么数直线是基本集. 对于任一基本集$X$,差集$X-A$称为$A$关于$X$的补集或简称为$A$的补集,记成$\mathscr{C}A$.

**定理1.2 对于基本集$X$中的并集、交集的补集运算,有**

(i) $\mathscr{C}(\bigcup\limits_\alpha A_\alpha)=\bigcap\limits_\alpha(\mathscr{C}A_\alpha)$;

(ii) $\mathscr{C}(\bigcap\limits_\alpha A_\alpha)=\bigcup\limits_\alpha(\mathscr{C}A_\alpha)$.

**证** 设$x\in\mathscr{C}(\bigcup\limits_\alpha A_\alpha)$,则$x$不属于任何$A_\alpha$,故$x$属于每个$\mathscr{C}A_\alpha$,因此$x\in\bigcap\limits_\alpha(\mathscr{C}A_\alpha)$. 由此可见

$$\mathscr{C}(\bigcup_\alpha A_\alpha)\subset\bigcap_\alpha(\mathscr{C}A_\alpha).$$

同理可证$\mathscr{C}(\bigcup\limits_\alpha A_\alpha)\supset\bigcap\limits_\alpha(\mathscr{C}A_\alpha)$. 这样(i)得证.

由(i)取补集得$\mathscr{C}(\mathscr{C}(\bigcup\limits_\alpha A_\alpha))=\mathscr{C}(\bigcap\limits_\alpha(\mathscr{C}A_\alpha))$,即$\bigcup\limits_\alpha A_\alpha=\mathscr{C}(\bigcap\limits_\alpha(\mathscr{C}A_\alpha))$,再把$A_\alpha$换成$\mathscr{C}A_\alpha$,即得(ii).

所证定理称为笛摩根(De Morgan)法则. 它提供一种对偶方法,能将已证明的关于集的某种性质转移到它们的补集上去(参看后面的定理3.3与3.5).

## §2. 映射 · 集的对等 · 可列集

我们知道,数学分析中所讲的函数可以看成是数集与数集之间的一种对应关系,或数集到数集的映射. 把函数概念一般化,得

到下面的定义.

**定义 2.1** 设 $A,B$ 是两个非空集. 若依一定的法则 $f$, 对每个 $x\in A$, 在 $B$ 中有一个确定的元 $y$ 与之对应, 则称 $f$ 是定义在 $A$ 上而取值于 $B$ 的映射, 记成 $f:A\to B$, 并将 $x$ 与 $y$ 的关系写成 $y=f(x)$. 这时称 $A$ 为 $f$ 的定义域,

$$f(A)=\{f(x):x\in A\}$$

为 $f$ 的值域.

注意, 两个法则 $f$ 与 $g$ 的给出方式可能不同, 如果它们有同一效果, 即对一切 $x\in A$ 有 $f(x)=g(x)$, 则认为它们表示同一映射.

设给定映射 $f:A\to B$, 如果有 $B=f(A)$, 就是说, $f$ 的象充满整个 $B$, 则说 $f$ 是满射或映上的; 如果对每个 $y\in B$, 仅有唯一的 $x\in A$ 使 $f(x)=y$, 则说 $f$ 有逆映射 $f^{-1}$, 它是定义在 $f(A)$ 上而取值于 $A$ 上的满射. 当映射 $f:A\to f(A)$ 有逆映射时, 称 $f$ 是一一映射.

设给定两个映射 $f:A\to B$, $g:B\to C$, 用记号 $g\circ f$ 表示 $A$ 到 $C$ 的映射, 由关系 $g\circ f(x)=g(f(x))(x\in A)$ 定义, 称为 $f$ 与 $g$ 的结合. 设 $B_0\subset B$, 用记号 $f^{-1}(B_0)$ 表示 $B_0$ 在映射 $f$ 下的原象, 即

$$f^{-1}(B_0)=\{x:x\in A, f(x)\in B_0\}.$$

容易验明, 若 $B_0\subset B$, $A_0\subset A$, 则一般有

$$f(f^{-1}(B_0))\subset B_0,\ f^{-1}(f(A_0))\supset A_0.$$

如果 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 $A$ 的子集族, $\{B_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 $B$ 的子集族, 同样容易验证下列关系:

$$f(\bigcup_\alpha A_\alpha)=\bigcup_\alpha f(A_\alpha),\ f^{-1}(\bigcap_\alpha B_\alpha)=\bigcap_\alpha f^{-1}(B_\alpha).$$

今后我们常要用到集 $E$ 的特征函数概念, 记成 $\chi_E(x)$, 它的定义是

$$\chi_E(x)=\begin{cases}1, 若\ x\in E,\\ 0, 若\ x\overline{\in} E.\end{cases}$$

**定义 2.2** 设 $A$, $B$ 为两个集，如果有一一映射 $f$ 存在，使 $f(A)=B$, 则称 $A$ 与 $B$ 成一一对应或互相对等，记成 $A\sim B$.

对等概念对于无限集的研究是十分重要的. 关于对等，易见有下列性质：

（i）**自反性**. $A\sim A$;

（ii）**对称性**. 若 $A\sim B$ 则 $B\sim A$;

（iii）**传递性**. 若 $A\sim B$, $B\sim C$, 则 $A\sim C$.

由对等的定义可知，当两个有限集互相对等时，它们的元的个数必相同. 至于无限集，采用元素个数一词就不适宜，但对等概念仍然可用. 粗略地说，可以用对等概念对无限集的元的"个数"进行比较.

以后我们将用 $\mathbb{R}$ 表示实数集，$\mathbb{Q}$ 表示有理数集，$\mathbb{Z}$ 表示整数集；而 $\mathbb{N}$ 表示自然数集. 在所有无限集中，$\mathbb{N}$ 是最简单的一个. 任何一个集，若与 $\mathbb{N}$ 对等，就称为可列集. 换句话说，可列集的一切元可用自然数编号，使之成为无穷序列的形式：$a_1, a_2\cdots, a_n, \cdots$. 可以举出许多可列集的例子. 例如全体正偶数集依 $2n\longleftrightarrow n$ 对应的方式与 $\mathbb{N}$ 成一一对应；$\mathbb{Z}$ 与 $\mathbb{N}$ 的对应方法如下：

$$0\longleftrightarrow 1,\ \ (-1)^{n+1}\left[\frac{n}{2}\right]\longleftrightarrow n,\ n=2, 3, \cdots.$$

其中记号 $[x]$ 表示不超过 $x$ 的最大整数. 这样正偶数集与整数集均为可列集.

再举一个稍为复杂的例子：有理数集 $\mathbb{Q}$ 是可列的. 其实，把非零有理数 $r$ 写成既约分数的形式 $r=p/q$, 这里 $q>0$, $p\neq 0$, $p, q$ 均为整数. 称 $n=|p|+q$ 为 $r$ 的"模". 现规定 0 的模为 1. 很明显，模为 $n$ 的有理数的个数是有限的. 于是把一切有理数按模的

递增顺序编组，凡是模相同的编在同一组里，然后再依组的顺序把所有有理数逐个编号．这样，每个有理数得到了一个确定的号码，因而建立了 $\mathbb{Q}$ 与 $\mathbb{N}$ 之间的一一对应，这证明了有理数集 $\mathbb{Q}$ 的可列性．

不难看出，可列集的子集至多是可列的．由此推知，实直线 $\mathbb{R}$ 上任一类互不相交的开区间集必为可列集或有限集。其实，在每个区间中取一有理数与这个区间对应，则不同区间对应于不同的有理数，故所述开区间类与有理数的一子集对等，因而至多是可列的．

可以断言，可列集是无限集中"元素的个数最少"的一类集。这句话的精确含义由下列定理表出．

**定理 2.1　任何无限集含有一个可列子集．**

**证**　设 $A$ 是任给无限集．用归纳法，可作出 $A$ 的子集列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，使每个 $A_n$ 恰含 $n$ 个元．其实，因 $A\neq\varnothing$，可取出 $a_1\in A$，并令 $A_1=\{a_1\}$．假定对任意自然数 $n$，用任何方式作出了 $A$ 的子集 $A_n$，它有 $n$ 个元，那么由于 $A-A_n$ 非空，可取 $a_{n+1}\in A-A_n$，令 $A_{n+1}=A_n\cup\{a_{n+1}\}$，则显见 $A_{n+1}$ 是 $A$ 的子集且含有 $n+1$ 个元．由此可见，所述序列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 存在．现在对每个 $n\in\mathbb{N}$，令

$$B_n=A_{2^n}-\left(\bigcup_{k=0}^{n-1}A_{2^k}\right).$$

那么，$\{B_n\}$ 是 $A$ 中互不相交的子集类，并且看出，$B_n$ 中元的个数不少于 $2^n-\sum_{k=0}^{n-1}2^k=1$，故每个 $B_n$ 非空。我们由每个 $B_n$ 中取一个元构成一个集 $B$，则易见 $B$ 是 $A$ 的可列子集．

定理证完．

由所证定理可以推出下列事实：**凡无限集必与它的一个真子集对等**．其实，设 $A$ 是所给无限集，据定理 2.1，$A$ 存在可列子集 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$．令 $B=A-\{a_1\}$，则 $B$ 是 $A$ 的真子集．作下列对应：

$$a \longleftrightarrow a, \qquad 对\ a\in A-\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}},$$

$$a_k \longleftrightarrow a_{k+1}, \quad 对\ k=1,2,\cdots,$$

易见这是 $A$ 与 $B$ 之间的一一对应，因而 $A$ 与它的一个真子集 $B$ 对等．所证事实是无限集的一个特征性质，因而也可作为**无限集**的**定义**．

**定理 2.2　可列个可列集的并集是可列的．**

**证**　设 $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是可列集的可列类，把它们的元分别排列如下表．

$$\begin{array}{l}
A_1=\{a_1^{(1)} \rightarrow a_2^{(1)} \quad a_3^{(1)} \rightarrow a_4^{(1)} \cdots\} \\
\qquad\quad \swarrow \quad \nearrow \quad \swarrow \quad \nearrow \\
A_2=\{a_1^{(2)} \quad a_2^{(2)} \quad a_3^{(2)} \quad a_4^{(2)} \cdots\} \\
\qquad\quad \downarrow \ \nearrow \quad \swarrow \quad \nearrow \\
A_3=\{a_1^{(3)} \quad a_2^{(3)} \quad a_3^{(3)} \quad a_4^{(3)} \cdots\} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
A_k=\{a_1^{(k)} \quad a_2^{(k)} \quad a_3^{(k)} \quad a_4^{(k)} \cdots\} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

令 $S=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$．我们把 $S$ 中的元如上表那样依箭头指向的顺序排列．即先写 $a_1^{(1)}$，再写 $a_2^{(1)}$ 与 $a_1^{(2)}$，此时字母的上下附标之和等于 3；再写 $a_1^{(3)}, a_2^{(2)}, a_3^{(1)}$，此时字母上下附标之和等于 4；一般地，写到(在最大上标为奇数情形)

$$a_1^{(2k+1)}, a_2^{(2k)}, \cdots, a_{2k+1}^{(1)}$$

时，字母上下标之和为 $2k+2$，等等．由此可以断定，$S$ 与自然数集的一子集对等，并且 $S$ 显然是无限集，故 $S$ 为可列的．

由所证定理可知，有理数集是可列的．

下面定理表明不可列集是存在的．

**定理 2.3　点集 $[0,1]=\{x:0\leqslant x\leqslant 1\}$ 是不可列的．**

**证** 用反证法. 假定[0,1]可列,把其中一切点编排为

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots,$$

把闭区间[0,1]三等分,则显见[0,1/3]与[2/3,1]中至少有一个不含有 $x_1$,用 $I_1$ 表示任一这样的区间,即 $x_1 \overline{\in} I_1$. 把 $I_1$ 三等分, 在它们的左与右两个闭区间中必有一个不含有 $x_2$,用 $I_2$ 表示相应的区间, 即 $x_2 \overline{\in} I_2$. 同样把 $I_2$ 三等分,又可得不含有 $x_3$ 的一个闭区间 $I_3$,等等. 根据归纳法,得到闭区间列 $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$,满足条件

(i) $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$;

(ii) $x_n \overline{\in} I_n, n \in \mathbb{N}$;

(iii) $I_n$ 的长度为 $3^{-n}$,它当 $n\to\infty$ 时趋于 0.

根据分析学中的区间套定理,存在点 $\xi \in I_n, n \in \mathbb{N}$. 由于 $x_n \overline{\in} I_n$ 对任一 $n$ 成立,故 $\xi$ 不会是任一 $x_n$,但 $\xi$ 显然属于[0,1]. 发生矛盾,这表明[0,1]是不可列点集.

关于集的某些一般属性,我们将在 §5 再作补充讨论.

## §3. 一维开集、闭集及其性质

以下专门讨论欧几里得空间中的点集(简称点集), 这在数学分析中已有所了解. 前面两节中关于集的一般结果, 自然对点集也适用, 这里将进一步介绍点集所特有的一些性质. 由于一维欧几里得空间比较简单,且具有自身的特性,故先提出讨论。下面论述虽然在本质上对多维点集也适用,但读者初学时,不妨先从一维情形来理解,以后再理解多维情形,就不会发生困难了。

先引进点集的一些基本概念.

**定义 3.1** 设 $E$ 为一维欧几里得空间 $\mathbb{R}$ 的任一子集, $a\in\mathbb{R}$. 含有 $a$ 的任一开区间称为 $a$ 的邻域. 对于 $E$ 中一点 $a$, 如果存在 $a$ 的某个邻域 $(\alpha,\beta)$ 整个含于 $E$ 内,这时 $a\in(\alpha,\beta)\subset E$,则称 $a$ 为

$E$ 的内点. 因而 $E$ 的内点必属于 $E$. 若 $E$ 的每一点都是 $E$ 的内点, 则称 $E$ 为开集.

开区间, 空集以及 $\mathbb{R}$ 本身都是一维开集的例.

**定理 3.1** 开集有下列性质:

**(i) 任意个开集的并是开集;**

**(ii) 有限个开集的交是开集.**

**证** (i) 设 $G_\alpha$, $\alpha\in I$ 是一族开集, 令 $G=\bigcup\limits_{\alpha} G_\alpha$. 任取 $x\in G$ (若 $G=\varnothing$, 不须证明. 这对以后恒适用), 则有某个 $\alpha_0\in I$, 使 $x\in G_{\alpha_0}$, 从而 $x$ 是 $G_{\alpha_0}$ 的内点, 更是 $G$ 的内点. 故 $G$ 为开集.

(ii) 设 $G_1, G_2, \cdots, G_p$ 是开集, 令 $G=\bigcap\limits_{k=1}^{p} G_k$. 任取 $x\in G$, 则对每个 $k=1,2,\cdots,p$ 有 $x\in G_k$. 于是有 $x$ 的邻域 $(\alpha_k,\beta_k)$ 使

$$x\in(\alpha_k,\beta_k)\subset G_k,\ k=1,2,\cdots,p.$$

令 $(\alpha,\beta)=\bigcap\limits_{k=1}^{p}(\alpha_k,\beta_k)$, 那么它是 $x$ 的非空邻域, 且整个含于 $G$ 内, 故 $x$ 为 $G$ 的内点, 这就证明了 $G$ 为开集.

注意, 无限个开集的交不一定是开集. 例如, 令 $G_k=(-1/k, 1/k)$, $k\in\mathbb{N}$, 则 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} G_k=\{0\}$, 不是开集.

**注** 通常说对 $\mathbb{R}$ 赋予一种拓扑, 是指给定了 $\mathbb{R}$ 的一个子集类, 其中每个元称为开集, 使得 $\varnothing$, $\mathbb{R}$ 属于这个类以及使得这个类关于任意并与有限交是封闭的(参看定理 3.1). 这时说 $\mathbb{R}$ 在所给拓扑(开集类)下成为拓扑空间.

**定义 3.2** 设 $E$ 为 $\mathbb{R}$ 中的一点集, $a\in\mathbb{R}$, 若 $a$ 的任一邻域均含有 $E$ 中异于 $a$ 的一点, 则称 $a$ 是 $E$ 的聚点.

注意, $E$ 的聚点不一定属于 $E$.

显然, 若 $a$ 是 $E$ 的聚点, 则含有 $a$ 的任何区间(即 $a$ 的邻域)均含有 $E$ 的无穷多个点. 因假如不然, $a$ 的某个邻域 $(\alpha,\beta)$ 只含 $E$

的有限多个点 $x_1, x_2, \cdots, x_p$ 的话，不妨设它们均与 $a$ 不同．令

$$\delta=\min\{|a-\alpha|, |a-\beta|, |a-x_1|, \cdots, |a-x_p|\},$$

则 $a$ 的邻域 $(a-\delta, a+\delta)(\delta>0)$ 将不含 $E$ 中异于 $a$ 的任何点，这与 $a$ 是 $E$ 的聚点相矛盾．

**例 1** 设 $E=\{1/k\}_{k\in\mathbb{N}}$，则原点是 $E$ 的唯一聚点且不属于 $E$．又闭区间 $[a, b]$ 的任一点均为区间 $E=(a, b)$ 的聚点．

在讨论聚点时，引用下述性质有时是方便的：$a$ 为 $E$ 的聚点的充要条件是 $E$ 中有点列 $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}(a_k\neq a)$ 收敛于 $a$．其实，充分性由聚点定义是一望而知的．现证必要性．设 $a$ 是 $E$ 的聚点．先在邻域 $(a-1, a+1)$ 中选取一点 $a_1\in E$，$a_1\neq a$，再在邻域 $(a-\delta_1/2, a+\delta_1/2)$ 中取点 $a_2\in E, a_2\neq a$，这里 $\delta_1=|a-a_1|$．一般地，在邻域 $(a-\delta_k/2^k, a+\delta_k/2^k)$ 中取点 $a_{k+1}\in E, a_{k+1}\neq a, k=1, 2, \cdots$，这里 $\delta_k=|a-a_k|$．由归纳法，得到点列 $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$，显然 $a_k\to a, a_k\neq a$．

**定义 3.3** 由点集 $E$ 的一切聚点所成的集称为 $E$ 的导集，记成 $E'$，称 $E-E'$ 中的点为 $E$ 的孤立点。$E$ 的闭包是指集 $E\cup E'$，并记成 $\overline{E}$．若 $E'=E$，称 $E$ 为完全集．

若 $\mathscr{C}E=\mathbb{R}-E$ 为开集，则称 $E$ 为闭集．

**定理 3.2** **$E$ 为闭集的充要条件是 $E'\subset E$．**

**证** 必要性．设 $E$ 为闭集，则 $\mathbb{R}-E$ 为开集．任取 $x\in E'$，据聚点定义可知，$x$ 不可能是开集 $\mathscr{C}E$ 的点，因而 $x\in E$，即 $E'\subset E$．

充分性．设 $E'\subset E$，则 $\mathscr{C}E'\supset\mathscr{C}E$．任取 $x\in\mathscr{C}E$，则 $x\in\mathscr{C}E'$．这样，$x$ 不是 $E$ 的点且也不是 $E$ 的聚点．故存在 $x$ 的邻域 $(\alpha, \beta)$，使 $x\in(\alpha, \beta)\subset\mathscr{C}E$，因而 $x$ 是 $\mathscr{C}E$ 的内点．这表明 $\mathscr{C}E$ 为开集，即证明了 $E$ 为闭集．

**定理 3.3** **任何集 $E$ 的导集是闭集．**

**证** 要证 $\mathscr{C}E'$ 为开集．任取 $x\in\mathscr{C}E'$，则 $x\overline{\in}E'$，即 $x$ 不是 $E$

的聚点，故存在 $x$ 的邻域 $(\alpha,\beta)$，其中不含 $E$ 中异于 $x$ 的任何点。因而 $(\alpha,\beta)$ 中任一点均不是 $E$ 的聚点，这表明 $x\in(\alpha,\beta)\subset\mathscr{C}E'$．即 $x$ 为 $\mathscr{C}E'$ 的内点．于是 $\mathscr{C}E'$ 为开集．

**定理 3.2** (i) 设 $A\subset B$，则 $A'\subset B'$；

(ii) $(A\cup B)'=A'\cup B'$．

**证** (i) 任取 $x\in A'$，并设 $(\alpha,\beta)$ 是 $x$ 的任一邻域．则 $(\alpha,\beta)$ 中含有 $A$ 中异于 $x$ 的一点，从而也含有 $B$ 中异于 $x$ 的一点，这是因为 $A\subset B$．因而 $x\in B'$，这表明 $A'\subset B'$．

(ii) 由于 $A\subset A\cup B$，据 (i) 有 $A'\subset(A\cup B)'$．同理，$B'\subset(A\cup B)'$，故得 $A'\cup B'\subset(A\cup B)'$．

另一方面，任取 $a\in(A\cup B)'$，则可断定 $a\in A'\cup B'$．其实，假定不然，$a\overline{\in}A'\cup B'$，那么将有 $a\overline{\in}A'$ 且 $a\overline{\in}B'$．因而有 $a$ 的某一邻域 $(\alpha_1,\ \beta_1)$，其中不含 $A$ 中异于 $a$ 的点，同时有 $a$ 的某一邻域 $(\alpha_2,\ \beta_2)$，其中不含 $B$ 中异于 $a$ 的点．令 $(\alpha,\beta)=(\alpha_1,\ \beta_1)\cap(\alpha_2,\ \beta_2)$，则 $(\alpha,\beta)$ 为 $a$ 的邻域，其中不含 $A\cup B$ 中异于 $a$ 的点．这表明 $a$ 不是 $A\cup B$ 的聚点，与假设相违．因此得到 $(A\cup B)'\subset A'\cup B'$．

合并所得两结果即证明了 (ii)．

**注** 借用聚点的点列式说法（参看例 1 后的一段说明）也可以证明定理 3.4，证明留给读者．

当我们得到开集的某些性质时，往往能用对偶方法转移到闭集的相应性质上，这时基本工具是定理 1.2。下述定理便是一个范例．

**定理 3.5** 闭集有下列性质：

(i) **任意个闭集的交为闭集**；

(ii) **有限个闭集的并为闭集**．

**证** 设 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 为闭集类，则 $\{\mathscr{C}F_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 为开集类．据定理 1.2 得到

$$\mathscr{C}(\bigcap_{\alpha} F_\alpha)=\bigcup_{\alpha}(\mathscr{C}F_\alpha),\ \mathscr{C}(\bigcup_{\alpha} F_\alpha)=\bigcap_{\alpha}(\mathscr{C}F_\alpha).$$

于是据定理 3.1 的(i)，对于所给任意指标集 $I$，$\bigcup(\mathscr{C}F_\alpha)$为开集，从而 $\mathscr{C}(\bigcap F_\alpha)$为开集，故 $\bigcap F_\alpha$ 为闭，这证明了(i)．同样，对于有限指标集 $I$，据定理 3.1 的(ii)即得结论(ii)．定理得证．

注意，无限个闭集的并可能不是闭集．例如，取 $F_k=[1/k,1]$，$k=1,2,\cdots$，每个 $F_k$ 为闭集，但它们的并 $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k=(0,1]$ 不是闭集．

我们看到，整个数直线 $\mathbb{R}$ 是既开又闭的，它的补集即空集 $\varnothing$ 亦然．根据开集、闭集的定义可见，这种二重性是很自然的．可以证明，在数直线的一切子集中，只有空集与整个数直线才有这种二重性．

为了指明集论的作用，这里举一个借用集论观点来描述连续函数的例子．

**例 2** 取基本集 $I=(0,1)$．设 $f(x)$是定义在 $I$ 上的实函数。那么 $f(x)$ 在 $I$ 上连续的充要条件是：对任何开集 $G\subset(-\infty,\infty)$，$f^{-1}(G)$恒为开集，即开集的原象是开集．

其实，设 $f(x)$ 连续，并设 $f^{-1}(G)$非空．任取 $x_0\in f^{-1}(G)$，这表示 $f(x_0)\in G$．因 $G$ 是开集，存在 $\varepsilon>0$，使

$$(f(x_0)-\varepsilon,f(x_0)+\varepsilon)\subset G.$$

另一方面，据连续性定义，存在 $\delta>0$，使当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$时，有

$$-\varepsilon<f(x)-f(x_0)<\varepsilon.$$

可见当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$时，$f(x)\in G$，从而$(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset f^{-1}(G)$．这表明 $f^{-1}(G)$中每一点都是它的内点，即 $f^{-1}(G)$ 是开集．

反之，若对任何开集 $G$，$f^{-1}(G)$为开集，则对任意的 $x_0\in I$ 以

及 $\varepsilon>0$, 开区间 $(f(x_0)-\varepsilon,\ f(x_0)+\varepsilon)$ 的原象 $U$ 是开集. 由于 $x_0\in U$, 存在 $\delta>0$ 使 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)\subset U$. 因此, 当 $x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ 时, $f(x)\in(f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon)$. 这表明 $f(x)$ 在 $x_0$ 连续. 由于 $x_0$ 是任意的, 故 $f(x)$ 在 $I$ 上连续.

读者试自行证明, 如果取基本集 $I=[0,1]$, 则 $f(x)$ 是 $I$ 上连续实函数的充要条件是, 任何闭集 ($(-\infty,\infty)$ 中的) 的原象是闭集 (提示: 直接证明或利用闭集定义证明).

## §4. 开集的构造

在本节中, 我们将详细讨论直线上有界开集的构造, 假定这里所考察的点集都是有界集. 对多维情形, 我们仅给出开集构造的大意.

设 $G$ 是任一非空的有界开集, 任取 $x_0\in G$, 我们将证明, 存在一个开区间 $(\alpha,\beta)$, 使 $x_0\in(\alpha,\beta)$, 并且满足下列两个条件:

(i) $(\alpha,\beta)\subset G$;

(ii) $\alpha\overline{\in}G$, $\beta\overline{\in}G$.

其实, 不难验明这种区间的端点分别由下式确定:

$$\alpha=\inf\{x:(x,x_0)\subset G\},\ \beta=\sup\{y:(x_0,y)\subset G\}.$$

由于 $G$ 为有界集, $\alpha,\beta$ 均为实数. 任取 $(\alpha',x_0)\subset(\alpha,\ x_0)$ 来考察, 即有 $\alpha<\alpha'$, 于是根据下确界定义, 有 $x'$ 满足 $\alpha\leqslant x'<\alpha'$ 且 $(x',\ x_0)\subset G$ 从而 $(\alpha',\ x_0)\subset G$. 同理, 任取 $(x_0,\ \beta')\subset(x_0,\ \beta)$ 时可证 $(x_0,\beta')\subset G$. 这样得到 $(\alpha',\beta')\subset G$. 这表明 $(\alpha,\beta)$ 内任一区间都含于 $G$, 即 $(\alpha,\beta)\subset G$, 因而 (i) 成立. 至于 (ii) 可证明如下: 例如, 为证 $\alpha\overline{\in}G$, 我们假定不然, 那么有 $\alpha\in G$. 于是将有 $\delta>0$ 使 $(\alpha-\delta,\alpha+\delta)\subset G$, 从而 $(\alpha-\delta,\beta)\subset G$, 这与 $\alpha$ 的定义相矛盾. 同理可证 $\beta\overline{\in}G$. 这样, (ii) 得到了证明.

由此可见，$(\alpha,\beta)$是 $G$ 中含有 $x_0$ 的最大区间．我们把开集 $G$ 中具有性质 (i)，(ii) 的任一开区间称为 $G$ 的构成区间．由上所述，$G$ 中任一点必属于 $G$ 的某个构成区间．

下列定理表明开集即由它的构成区间所组成．

**定理 4.1　有界非空开集 $G$ 可表示为至多可列个互不相交的构成区间的并**

$$G=\bigcup_k(\alpha_k,\beta_k).$$

**证**　由上面的讨论已经明了，$G$ 的每一点都对应有一个构成区间，因而 $G$ 可以表示成一些构成区间的并．对于 $G$ 的任意两个构成区间，如有公共点，则必重合，否则就将不相交．因而 $G$ 可以表示成一些互不相交的构成区间的并．剩下的只须证明这种区间的个数至多是可列的．为此，我们在每个构成区间内取一有理点，使 $G$ 的构成区间集与有理数子集构成一一对应，因而构成区间集至多可列(参看 §2)．

定理 4.1 中提出的表示，以后将称为 $G$ 的结构表示．

关于闭集的结构可以从它的补集来了解．以后在讨论闭集测度时正是按照这个思想．

**注**　对于无界开集情形，定理 4.1 的结论本质上也是正确的，只是要把$(-\infty,\infty)$、$(-\infty,\beta)$与$(\alpha,\infty)$($\alpha$, $\beta$ 为实数)都看成构成区间的表现形式．

这里我们举出一个闭集的例，它是不可列的，但不含有任何区间．这个集将称为康脱(G.Cantor)三分集，它能用来说明实变函数论中不少问题，今后将不止一次提到．

**例**　将基本区间$[0,1]$用分点 $1/3$ 与 $2/3$ 三等分，并除去中间的开区间$(1/3,2/3)$．把余下两个闭区间各三等分，并除去中间的开区间$(1/9,2/9)$，$(7/9,8/9)$．然后再将余下的四个闭区间同法

处理，如此等等(图 4)．这样便得到康脱三分集 $P_0$ 与开集 $G_0$：

$$G_0=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3^2},\frac{2}{3^2}\right)\cup\left(\frac{7}{3^2},\frac{8}{3^2}\right)\cup\left(\frac{1}{3^3},\frac{2}{3^3}\right)$$

$$\cup\left(\frac{7}{3^3},\frac{8}{3^3}\right)\cup\left(\frac{19}{3^3},\frac{20}{3^3}\right)\cup\left(\frac{25}{3^3},\frac{26}{3^3}\right)\cup\cdots,$$

$$P_0=\mathscr{C}G_0.$$

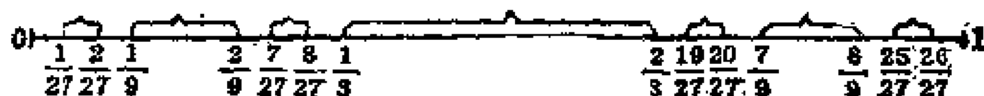



图 4　康脱三分集示意

显然，$P_0$ 是一个不含任何区间的闭集．下面证明它是不可列无限集．

用反证法．假定 $P_0$ 是可列的，将 $P_0$ 中点编号成点列

$$x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots,$$

就是说，$P_0$ 中任一点必在上述点列中出现．显然，$[0, 1/3]$ 与 $[2/3, 1]$ 中应有一个不含有 $x_1$，用 $I_1$ 表示这个闭区间．将 $I_1$ 三等分后所得的左与右两个闭区间中，应有一个不含 $x_2$ 的，用 $I_2$ 表示它．然后用 $I_3$ 表示三等分 $I_2$ 时不含 $x_3$ 的左或右那个闭区间，如此等等。这样，根据归纳法，得到一个闭区间列 $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$．由所述取法知，

$$I_1\supset I_2\supset\cdots\supset I_k\supset\cdots,$$

$$x_k\,\overline{\in}\,I_k,\quad k\in\mathbb{N};$$

同时，易见 $I_k$ 的长为 $1/3^k\to 0(k\to\infty)$．于是根据数学分析中区间套定理，存在点 $\xi\in I_k$，$k\in\mathbb{N}$．可是，$\xi$ 是 $I_k$ 等的端点集的聚点，从而是闭集 $P_0$ 的聚点，故 $\xi\in P_0$．由于上面已指出 $x_k\,\overline{\in}\,I_k$，$k\in\mathbb{N}$，故 $\xi\neq x_k$，$k\in\mathbb{N}$．这是一个矛盾．故 $P_0$ 不可列．

再证 $P_0$ 是完全集．由于 $P_0$ 是闭集，只须证明 $P_0$ 无孤立点．假定相反，$P_0$ 有一孤立点 $x_0$．由于 0 与 1 显然是 $P_0$ 的聚点，故可

设 $x_0 \neq 0, 1$. 于是, 在(0, 1)中存在开区间$(\alpha_0, x_0)$与$(x_0, \beta_0)$, 其中均无 $P_0$ 的点, 即$(\alpha_0, x_0) \subset G$, $(x_0, \beta_0) \subset G$ 且 $x_0 \overline{\in} G$, 从而可知$(\alpha_0, x_0)$, $(x_0, \beta_0)$将分别含在 $G_0$ 的某两个构成区间$(\alpha, x_0)$与$(x_0, \beta)$中, 于是 $x_0$ 将成为 $G_0$ 的某两个构成区间的公共端点, 但根据 $G_0$ 的作法(可取 $G_0$ 的任意有限个构成区间来考察), 这是不可能的.

这样, 我们证明了: $P_0$ 是不可列的完全集. 以后还会看到, 引进实数的三进表示时, 可以证明 $P_0$ 的势等于 $\aleph$, 即与区间[0, 1]同势(参看 §5).

设 $E$ 是实直线 $\mathbb{R}$ 的子集, 若它的导集等于 $\mathbb{R}$, 称$E$为$\mathbb{R}$中稠密集. 当 $\overline{E}$ 的补集在 $\mathbb{R}$ 中稠密时, 称$E$为稀疏集. 这样, 康脱三分集 $P_0$ 是 $\mathbb{R}$ 中的稀疏集.

为了进一步研究多元实函数的需要, 我们对 $n$ 维欧几里得空间的点集知识介绍个大意.

所谓 $n$ 维(实)欧几里得空间, 是指由 $n$ 个实数所作成的一切有序组的集 $\mathbb{R}^n$. 对于 $\mathbb{R}^n$ 中任意两点

$$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad y=(y_1, y_2, \cdots, y_n),$$

定义它们之间的距离为

$$\rho(x, y)=\{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2\}^{1/2}$$

容易验明, 距离有下列性质:

(i) **非负性**. $\rho(x, y) \geqslant 0$; $\rho(x, y)=0$ 与 $x=y$ 等价;

(ii) **对称性**. $\rho(x, y)=\rho(y, x)$;

(iii) **三点不等式**. 对于任何 $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z)+\rho(z, y).$$

一般地, 如果对一个抽象集能引进满足条件(i)—(iii)的二元函数 $\rho(x, y)$, 则称此函数为距离, 称此集为距离空间. $\mathbb{R}^n$ 是距离空间的一个简单例子. 关于一般距离空间, 将在第六章中作详细

介绍.

如同直线上点集一样，对 $\mathbb{R}^n$ 中点集，也可以引进一些基本概念．设 $a\in\mathbb{R}^n$，称满足 $\rho(a, x)<r$ 的一切点 $x$ 所成的集为点 $a$ 的邻域($r>0$)．从几何上看，点 $a$ 的邻域是以 $a$ 为中心 $r$ 为半径的开球，在一维情形是以 $a$ 为中心的开区间 $(a-r, a+r)$，这与定义 3.1 所给的等价.

**注意，有的书上说到 $a$ 的邻域是指任何这样的集 $U$，它的内部包含一个以 $a$ 为中心的开球.**

有了邻域概念，便不难定义聚点．设 $E$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中一个点集，$a\in\mathbb{R}^n$．如果 $a$ 的任一邻域中都含有 $E$ 中一个异于 $a$ 的点，则称 $a$ 为 $E$ 的聚点．如同直线上的点集一样，完全可类似地定义内点、开集与闭集等概念，这里不再一一重复．我们指出，定理3.1—3.5对于 $\mathbb{R}^n$ 情形也是成立的，但定理 4.1 不能直接照搬到 $\mathbb{R}^n$ $(n\geqslant 2)$ 中来，参看下面定理 4.2．在考虑多维情形时，不妨先从二维来理解．下面就来考虑二维开集的构造，这可以同一维情形相比较。设在 $\mathbb{R}^1$ 中给定一个区间 $(\alpha, \beta)$．考察端点为整数的单位长半闭区间类 $\{(n, n+1) : n\in\mathbb{Z}\}$，把整个含在 $(\alpha, \beta)$ 内的这种区间全体记为 $T_0$．再考虑半闭区间类 $\left\{\left[\frac{n}{2}, \frac{n+1}{2}\right) : n\in\mathbb{Z}\right\}$，凡是整个含在 $(\alpha, \beta)-T_0$ 的那些区间全体记为 $T_1$，其中每个区间长为 $2^{-1}$．一般地，可得长为 $2^{-k}$ 的半闭区间集 $T_k$，其中每个区间的端点为形如 $n/2^k$ 的点，$n\in\mathbb{Z}$，整个区间都含在

$$(\alpha, \beta)-T_0-\cdots-T_{k-1}, k=2, 3, \cdots.$$

那么不难看出，$(\alpha, \beta)$ 正好等于所有 $T_k$ 中一切半闭区间的并．这个想法可应用到整个开集上，而且在多维情形也可应用．下面以二维情形为例来叙述．所谓半闭正方形指的是形如

$$\{(x, y) : a\leqslant x<a+h, c\leqslant y<c+h, h>0\}$$

的集.

**定理 4.2 $\mathbb{R}^2$ 中的非空开集 $G$ 可表示为可列个互不相交的半闭正方形的并.**

我们简要地说明这种构造法，而将繁琐的叙述细节略去．取直线网

$$x=0, x=\pm 1, x=\pm 2, \cdots, y=0, y=\pm 1, y=\pm 2, \cdots$$

把坐标平面 $\mathbb{R}^2$ 分成可列个第 0 类半闭正方形，其中任意两个没有公共点，再考虑把第 0 类半闭正方形的每个等分为四的更密直线网，

$$x=0, \pm 1/2, \pm 2/2, \pm 3/2, \cdots,$$

$$y=0, \pm 1/2, \pm 2/2, \pm 3/2, \cdots,$$

则得第一类半闭正方形，其中两两不相交，如此等等.

同一类半闭正方形中两两不相交，且每个第 $k$ 类正方形由四个 $k+1$ 类正方形组成，第 $k$ 类正方形的边长为 $1/2^k$．所有各类正方形全体的集显然可列.

把第 0 类半闭正方形中整个含在 $G$ 内的那些所成的集记成 $T_0$，第一类半闭正方形中整个含在 $G$ 内而不含于 $T_0$ 的那些半闭正方形所成的集记成 $T_1$．同样，用 $T_2$ 表示含于 $G$ 内而不含于 $T_1 \cup T_0$ 的第二类半闭正方形集，等等(图 5)．这样，根据归纳法得到组 $T_0, T_1, T_2 \cdots$，其并集由可列个半闭正方形 $Q_0, Q_1 \cdots$，

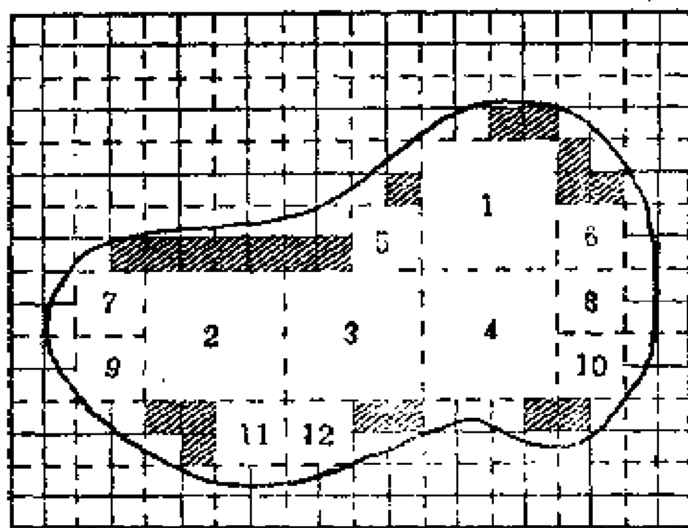


图 5 二维开集的构造示意

$Q_k, \cdots$ 组成．所述定理的内容即指 $G=\bigcup_{k=0}^{\infty} Q_k$.

在 $\mathbb{R}^n$ 中还可以引进另一些概念．例如，非空集 $A$ 的直径定义为

$$d(A)=\sup_{x,y\in A}\rho(x,y).$$

当 $d(A)<\infty$ 时，称 $A$ 为有界的，这与分析中有界集的定义等价，一点 $a$ 与一集 $A$ 的距离定义为

$$\rho(a,A)=\inf_{x\in A}\rho(a,x).$$

可以证明，若 $A$ 为非空闭集，那么一定存在一点 $b\in A$ 使

$$\rho(a,b)=\rho(a,A).$$

## §5．集的势·序集

本节我们讨论一般集合的另一些特性，它们带有更为基础的意义，并且在应用上也很重要．由于这些内容属于补充材料，初学时除基本概念外可以暂时略去．

前面已讲了可列集概念．这是借用对等方法从无限集中分出的最简单的一类集．设想把一切集进行分类，凡彼此对等的归于同一类，不对等的属于不同的类．对每类集我们给予一个标志，并用势来称呼它．例如，可列集的势记为 $\aleph_0$，与区间 $[0,1]$ 对等的集的势记成 $\aleph$，并称为连续集的势．据定理 2.2 知道，$\aleph$ 与 $\aleph_0$ 不同．

关于势的大小比较，仍借用对等来定义．设 $A, B$ 为两个集，假定 $A$ 与 $B$ 不对等，而 $A$ 与 $B$ 的一个子集 $B_0$ 对等，则称 $A$ 的势小于 $B$ 的势，或 $B$ 的势大于 $A$ 的势．具有 $n$ 个元的非空有限集的势记成 $n$ $(n\in\mathbb{N})$，而空集的势记成 0．那么下列势的大小关系成立：

$$0<n<\aleph_0<\aleph.$$

从任意一个集 $A$ 出发，可以作出一个集 $\mathscr{A}$，它的势大于 $A$ 的势．当 $A$ 是有限集时，$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$，可以取 $\mathscr{A}$ 为 $A$ 的一切子集所成的类．那么 $\mathscr{A}$ 的元是

$$0,\ \{a_1\},\ \cdots,\ \{a_k\},\ \{a_1,a_2\},\ \cdots,\ \{a_{k-1},a_n\}\cdots,\ \{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$$

它共有 $\binom{k}{0}+\binom{k}{1}+\cdots+\binom{k}{k}=2^k$ 个元．显然 $2^n>n$．当 $A$ 是可列集时，它的一切子集所成的类的势是 $\aleph$，它大于 $\aleph_0$．这可以象征性地记成 $2^{\aleph_0}>\aleph_0$．此事实可借用实数的二进表示来论证，同时也是下述定理的推论．

**定理 5.1　设集 $A$ 的势为 $\mu$，用 $2^\mu$ 表示 $A$ 的一切子集所成的类的势，则有 $2^\mu>\mu$．**

**证**　设 $\mathscr{A}$ 表示 $A$ 的一切子集所成的类，$\mathscr{A}$ 的势为 $2^\mu$．因 $\mathscr{A}$ 是由 $A$ 的一切子集构成，$A$ 的一切单元素集所成的类是 $\mathscr{A}$ 的子类 $\mathscr{A}_0$．$\mathscr{A}_0$ 显然与 $A$ 对等，故有 $2^\mu\geqslant\mu$．剩下的只须证明等号不可能成立．假定相反，则存在一一映射 $f:\mathscr{A}\to A$．令

$$\mathscr{A}_1=\{f(E):E\in\mathscr{A},\ f(E)\bar{\in}E\}.$$

则集 $\mathscr{A}_1$ 为 $A$ 的一子集，同时 $\mathscr{A}_1$ 本身又是 $\mathscr{A}$ 的一个元．

于是，矛盾将产生．因如果看成 $\mathscr{A}$ 的元的 $\mathscr{A}_1$ 被 $f$ 映为 $f(\mathscr{A}_1)$，若 $f(\mathscr{A}_1)\in\mathscr{A}_1$ 时，据 $\mathscr{A}_1$ 的定义，$\mathscr{A}_1$ 中无 $f(\mathscr{A}_1)$ 这个元，于是将有 $f(\mathscr{A}_1)\bar{\in}\mathscr{A}_1$，矛盾；若 $f(\mathscr{A}_1)\bar{\in}\mathscr{A}_1$，仍据 $\mathscr{A}_1$ 的定义，应有 $f(\mathscr{A}_1)\in\mathscr{A}_1$，亦明显矛盾．因此，如果上述一一映射 $f$ 存在的话，将不可能确定元 $f(\mathscr{A}_1)$ 是否属于 $\mathscr{A}_1$，这违反了我们关于集论的基本约定．故所述一一映射 $f$ 不存在，因而得 $2^\mu>\mu$．定理得证．

关于势的比较，有下列常用的伯恩斯坦(F.Bernstein)定理．

**定理 5.2　设 $\lambda,\mu$ 为两个势．若 $\lambda\leqslant\mu$，$\mu\leqslant\lambda$ 同时成立，则有 $\lambda=\mu$．**

**证** 回到势的一个代表集来考察. 设 $A$ 的势为 $\lambda$, $B$ 的势为 $\mu$. 由 $\lambda\leqslant\mu$ 知存在 $B$ 的子集 $B_0$ 使 $A\sim B_0$. 设映射 $f$ 实现 $A$ 与 $B_0$ 的一一对应. 同样, 由 $\mu\leqslant\lambda$ 知存在 $A$ 的子集 $A_0$, 使 $B\sim A_0$, 并有映射 $g$ 实现 $B$ 与 $A_0$ 的一一对应(图 6).

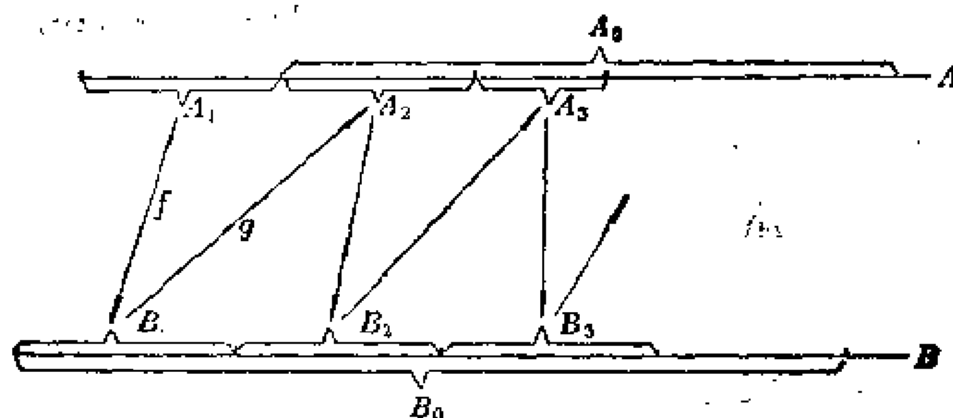



图 6 定理 5.2 证明示意

令

$$
\begin{aligned}
A-A_0&=A_1, & f(A_1)&=B_1,\\
g(B_1)&=A_2, & f(A_2)&=B_2,\\
g(B_2)&=A_3, & f(A_3)&=B_3,
\end{aligned}
$$

··································

由于 $f$ 与 $g$ 都是一一映射, 故 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ 等互不相交, $B_1, B_2, B_3, \cdots$ 等也互不相交. 显然, 由映射 $f$ 知 $A_n\sim B_n$, $n\in\mathbb{N}$, 故 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\sim\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n$. 另一方面, 由映射 $g$ 知 $B\sim A_0$, $B_k\sim A_{k+1}$, $k\in\mathbb{N}$, 故

$$B-\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k\sim A_0-\bigcup_{k=1}^{\infty}A_{k+1}=A-\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n,$$

从而

$$A=\left(A-\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cup\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\sim\left(B-\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)\cup\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)=B.$$

定理得证.

我们指出, 从伯恩斯坦定理可以推知, 对于任何两个势 $\lambda$, $\mu$,

三个关系

$$\lambda<\mu,\ \lambda=\mu,\ \lambda>\mu$$

中不可能有两者同时成立(这里未断言必有一成立). 其实, 若出现了 $\lambda=\mu$, 则其余二式已不可能成立; 若出现了 $\lambda<\mu$ 以及 $\lambda>\mu$, 那么由伯恩斯坦定理(参看证明)推出 $\lambda=\mu$, 矛盾. 实际上所述关系有且仅有一成立[4].

**例 1** 试证闭区间$[0, 1]$与闭正方形 $[0, 1;\ 0, 1]$ 有相同的势 $\aleph$.

**证** 令 $Q=[0, 1; 0, 1]$, 它的势为 $\mu$, 已知$[0, 1]$的势为 $\aleph$. 显然, $\mu\geqslant\aleph$. 把 $Q$ 中每一点$(x, y)$用二进小数表示为

$$\begin{cases}x=0.x_1, x_2\cdots,\\ y=0.y_1y_2\cdots,\end{cases}$$

$x_n, y_n\in\{0, 1\}$, $n\in\mathbb{N}$. 并约定称 $x$ 的小数表示中自某一位开始后数字全同的这种数为二进有理数. $x$ 与 $y$ 均为二进有理数的点$(x, y)$称为 $Q$ 的二进有理点. 考察映射 $f:Q\to[0, 1]$, 它使$(x, y)$与 $z=0.x_1y_1x_2y_2\cdots x_ny_n\cdots$相对应. 可以看出, $f$ 使 $Q$ 中除去二进有理点所得子集 $Q_0$ 与$[0, 1]$的一子集构成一一对应, 但因 $Q-Q_0$ 是可列集, 而$[0, 1]$的势为 $\aleph$, 故有 $\mu\leqslant\aleph$. 因而据定理 5.2, 有 $\mu=\aleph$.

例 2 设用 $M$ 表示$[0, 1]$上一切有界实函数的类, 试证 $M$ 的势为 $2^\aleph$.

**证** 我们再一次应用伯恩斯坦定理. 设 $E$ 是$[0, 1]$的任一子集, 作函数

$$\chi_E(x)=\begin{cases}1, x\in E,\\ 0, x\in[0, 1]-E,\end{cases}$$

这是集 $E$ 的特征函数(以$[0, 1]$为基本集). 显然, $\chi_E\in M$. 由此可知$[0, 1]$的任一子集 (看成一个元) 都与 $M$ 中的一个元相对应,

但[0, 1]的一切子集所成的类的势为 $2^{\aleph}$, 故 $M$ 的势不小于 $2^{\aleph}$.

另一方面, 对于每个 $f\in M$, 函数图象 $\{(x, f(x)): x\in[0, 1]\}$ 为平面上的一子集, 如果用 $A$ 表示平面的一切子集所成的类, 那么我们已证明了, $M$ 的势不大于 $A$ 的势。后者是 $2^{\aleph}$, 故 $M$ 的势不大于 $2^{\aleph}$. 于是由定理 5.2, 知 $M$ 的势等于 $2^{\aleph}$.

**例 3** 康脱完全集 $P_0$ 的势为 $\aleph$.

其实, 引进[0, 1]中小数的三进表示来考察. 区间(1/3, 2/3)中每个点 $x$ 可表示成

$$x=0.1x_2x_3\cdots,$$

其中 $x_2, x_3, \cdots$ 是 0, 1, 2 三个数字中之一. 这区间的两个端点均有两种表示, 规定采用(不出现数字 1):

$$1/3=0.0222\cdots,\qquad 2/3=0.2000\cdots,$$

区间 $(1/3^2, 2/3^2)$, $(7/3^2, 8/3^2)$ 中的点 $x$ 可表示成

$$x=0.01x_3x_4\cdots \quad 或 \quad x=0.21x_3x_4\cdots,$$

其中 $x_3, x_4, \cdots$ 是 0, 1, 2 中任一数字. 而区间端点则采用(不出现数字 1):

$$1/3^2=0.0022\cdots,\qquad 7/3^2=0.2022\cdots,$$

$$2/3^2=0.0200\cdots,\qquad 8/3^2=0.2200\cdots.$$

如此等等. 根据归纳法分析可知, 依上述规定, $G_0$ 中的点的三进表示中必有一位数字是 1, 且只有这样的点才属于 $G_0$. 因而 $P_0$ 与集

$$A=\{0.x_1x_2x_3\cdots: 每个\ x_k\in\{0, 2\}\}$$

成一一对应. 且 $A$ 显然与[0, 1]对等, 故 $A$ 的势为 $\aleph$, 从而 $P_0$ 的势为 $\aleph$.

我们看到, 无限集的势中以 $\aleph_0$ 与 $\aleph$ 较为简单, 并且有 $\aleph_0<\aleph$. 康脱的连续统假设说, 在 $\aleph_0$ 与 $\aleph$ 之间, 没有第三种势存在(1878年). 这个问题看来很简单, 但多少年来没有得到解决. 直到十多

年前才有人证明[7]，连续统假设与集合论公理系（策莫罗（E. Zermelo）-弗兰克尔（A.A.Fraenkel）公理系）是互相独立的．这对连续统假设的解决是一个重大的贡献．

下面引进集的序概念并作某些讨论．

在实数集中有大小概念，依此建立了实数的一种次序．对于一般的集，引进序的定义如下：

**定义 5.1** 对于给定的集 $X$，若在它的元之间能引进关系 $\leqslant$（这里作为序的记号，可读成"小于或等于"），满足序公理：

（i）$a\leqslant a$;

（ii）若 $a\leqslant b$, $b\leqslant c$，则 $a\leqslant c$;

（iii）若 $a\leqslant b$, $b\leqslant a$，则 $a=b$;

其中 $a, b, c\in X$．那么称 $X$ 为带有序 $\leqslant$ 的半序集．如果对于半序集 $X$ 的任意两个元 $a, b$，还满足条件：

（iv）关系式 $a\leqslant b$ 与 $b\leqslant a$ 二者必居其一．

那么，称 $X$ 为带有序 $\leqslant$ 的全序集．

记号"$a\leqslant b$"也可写成"$b\geqslant a$"．记号"$a<b$"表示"$a\leqslant b$ 但 $a\neq b$"．

**定义 5.2** 设 $X$ 为半序集，$X_0$ 为 $X$ 的子集．如果 $b\in X$ 满足条件：对一切 $x\in X_0$ 有 $x\leqslant b$，则称 $b$ 为 $X_0$ 的上界．如果 $b$ 为 $X_0$ 的上界，且对 $X_0$ 的任一上界 $b'$，均有 $b\leqslant b'$，则称 $b$ 为 $X_0$ 的上确界．换句话说，$X_0$ 的上确界是 $X_0$ 的上界中的最小者（按序 $\leqslant$ 意义）．

注意，$X_0$ 的上确界未必属于 $X_0$．关于 $X_0$ 的下界、下确界可类似地定义．$X_0$ 的上、下确界分别用 $\sup X_0$, $\inf X_0$ 表示．

**例 4** 设 $E$ 为一非空集，它的一切子集构成一个类 $X$，依平常的包含关系，$X$ 成一半序集．

这就是说，$A, B\in X$，$A\leqslant B$ 的意义是指 $A\subset B$．容易验明，上

面序公理(i)—(iii)成立，但(iv)不成立.

设 $X_0$ 为 $X$ 的子类，易见 $\sup X_0=\bigcup_{A\in X_0}A$, $\inf X_0=\bigcap_{A\in X_0}A$.

**例 5** 考虑实 $n$ 维欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$. 任取 $\mathbb{R}^n$ 中两个元 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 与 $y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$. 约定 $x=y$ 的意义是它们的对应坐标相等. 如果 $x_1<y_1$ 或 $y_1<x_1$, 那么记成 $x<y$. 如果 $x_1=y_1, \cdots, x_k=y_k$, 而 $x_{k+1}<y_{k+1}(k\in\{1, 2, \cdots, n-1\})$ 则记 $x<y$. 这样我们得到带有序 $\leqslant$ 的全序集 $\mathbb{R}^n$. 这是一种字典序, 易见 $\mathbb{R}^n$ 本身无上、下确界. $\mathbb{R}^n$ 的子集有上、下确界当且仅当这子集中元的每个坐标的集有界.

我们来建立在下面讨论中起基本作用的一条定理. 为此, 先引进下面的定义.

**定义 5.3** 设 $X$ 为非空半序集，它的每个非空全序子集均有上确界. 取定元 $a\in X$ 与映射 $f:X\to X$. 称 $X$ 的子集 $A$ 为容许集，如果下列三条件满足：

(i) $a\in A$,

(ii) $f(A)\subset A$,

(iii) $A$ 的每个全序子集的上确界属于 $A$.

显然，$X$ 本身满足(i)—(iii)，故容许集存在.

**定理 5.3 设 $X$ 为非空半序集，且 $X$ 的每个非空全序子集均有上确界，再设映射 $f:X\to X$ 满足 $f(x)\geqslant x(x\in X)$, 那么，必有一个元 $c\in X$，使 $f(c)=c$.**

**证** 分四步进行.

第一步. 设一切容许集的交为 $P$，则有关系式

$$a\leqslant x \quad (x\in P), \tag{1}$$

其中 $a$ 是 $X$ 中取定的元(参看定义 5.3).

其实，$P$ 是最小的容许集. 由于集 $\{x:x\in X, x\geqslant a\}$ 是一容许集，它应包含 $P$，故(1)成立.

第二步．令

$$B=\{x:x\in P;\text{由 } y\in P,\ y<x \text{ 即有 } f(y)\leqslant x\},$$

并约定 $a\in B$．我们证明：由 $x\in B$, $z\in P$ 即有

$$z\leqslant x \quad \text{或} \quad z\geqslant f(x). \tag{2}$$

其实，固定任一 $x\in B$，令

$$C=\{z:z\in P;\ z\leqslant x \text{ 或 } z\geqslant f(x)\}.$$

可以验证 $C$ 满足容许集的条件(i)—(iii)．由式(1)知(i)成立．设 $z\in C$，则当 $z\in P$, $z\geqslant f(x)$时，由于 $f(z)\geqslant z$ 得到 $f(z)\geqslant f(x)$；当 $z\in P$，$z\leqslant x$，时有 $f(z)=f(x)$(对于 $z=x$)或 $f(z)\leqslant x$ (对于 $z<x$，注意到 $x\in B$)．这样，$f(z)$能满足集 $C$ 中元的性质，故$f(z)\in C$(由 $z\in P$, $f(z)\in P$ 是显然的)．(ii)得证．最后，设 $C_0$ 为 $C$ 的任一非空全序子集，$c_0=\sup C_0$，那么，或对一切 $z\in C_0$ 有 $z\leqslant x$；或有某一 $z\in C_0$ 使 $z\geqslant f(x)(z\in P)$．在前一情形，得 $c_0\leqslant x$；在后一情形，有 $c_0\geqslant f(x)$．这样，$c_0\in C$，(iii)得证．因而，$C$ 为容许集．由于 $C\subset P$ 而 $P$ 为最小容许集，故 $C=P$．从而看出(2)成立．

第三步．证明第二步中的 $B$ 为容许集．仍然验证条件(i)—(iii)关于 $B$ 是成立的．(i)，已作了规定；(ii)，设 $x\in B$, $y\in P$，则由(2)知，$y\leqslant x$ 或 $y\geqslant f(x)$．从而推出，当 $y<f(x)$时有 $y\leqslant x$．如果出现了 $y=x$，那么 $f(y)=f(x)$；如果出现了 $y<x$，就有 $f(y)\leqslant x$ (由于 $x\in B$)，从而据定理中关于 $f$ 的假设，有 $f(y)\leqslant x\leqslant f(x)$．总之，当 $y<f(x)$时，得到 $f(y)\leqslant f(x)$．据 $B$ 的定义，知 $f(x)\in B$，即表明 $f(B)\subset B$；(ii)得证．(iii)，设 $B_0$ 为 $B$ 的任一全序子集，$b_0=\sup B_0$．设 $y\in P$，$y<b_0$．则据(2)，对任一 $x\in B_0$，有 $y\leqslant x$ 或 $y\geqslant f(x)$．后者不可能对每个 $x$ 成立，否则将有 $y\geqslant f(x)\geqslant x$，从而 $y$ 将为 $B_0$ 的上界，于是 $y\geqslant b_0$，这是不可能的．故有，对某一 $x\in B_0$, $y\leqslant x$．分两种情况，当 $y<x$时，则据 $B$ 与 $b_0$ 的

定义，$f(y)\leqslant x\leqslant b_0$；当 $y=x$时，则因 $y$ 非 $B_0$ 的上确界 $b_0$，应有某一$z\in B_0$ 使 $y<z$，此时将有 $f(y)\leqslant z\leqslant b_0$，总之，得到 $f(y)\leqslant b_0$。这表明 $b_0\in B$，而(iii)得证。

第四步．令 $c=\sup P$，我们证明 $f(c)=c$。

据第三步所证，$B$ 为容许集，故 $B\supset P$，但 $B$ 中的元均属于 $P$，故 $B=P$．从而据(2)，对任何 $x$，$z\in P$，有 $z\leqslant x$ 或 $z\geqslant f(x)$．于是注意到 $f(x)\geqslant x$得到 $z\leqslant x$ 或 $z\geqslant x$，即 $z$ 与 $x$ 可以比序，因而 $P$ 是全序集．因 $c=\sup P$，而 $f(c)\in P$，故 $f(c)\leqslant c$，同时据定理中假设，$f(c)\geqslant c$．故据关于半序集的条件(iii)得 $f(c)=c$。

定理证完。

**定义 5.4** 设 $X$ 为半序集，$x\in X$．如果对任一个 $y\in X$，满足 $x\leqslant y$，即有 $y=x$，则称 $x$ 为 $X$ 的极大元．关于极小元可以类似地定义。

注意，一个集的极大元、极小元未必是唯一的。

**例 6** 设 $E$ 为一非空集，它的一切子集构成一个类 $X$．依平常集的包含关系 $\subset$，$X$ 成一半序集．容易看出，$X$的极大元为 $E$，极小元为 $\varnothing$．若考虑 $X$ 的一子集 $X_0=X-\{\varnothing\}$，则容易验明，把 $E$ 中任一点所成的集看成 $X_0$ 的元时，都是 $X_0$ 的极小元。

下列定理的证明是以策莫罗选择公理(参阅定理 5.6) 为基础的。

**定理 5.4 每个半序集都含有极大全序子集。**

**证** 设 $X$ 是所给带有序$\leqslant$的半序集．用 $\mathscr{A}$ 表示 $X$ 的一切全序子集所成的类．$\mathscr{A}$ 中的元依平常集的包含关系$\subset$成一半序集．我们要证明，$\mathscr{A}$ 有一极大元。

假如不然，$\mathscr{A}$ 中无极大元．那么对 $\mathscr{A}$ 中任一元 $A$，由于不是极大元，应存在 $\mathscr{A}$ 的一个元 $A_1\neq A$，使 $A_1\supset A$．令映射 $f$ 为实现这种 $A$ 到 $A_1$ 的映射($A\in\mathscr{A}$)．就是说，$f:\mathscr{A}\to\mathscr{A}$ 为满足 $f(A)$

$\supset A$ 且 $f(A)\neq A(A\in\mathscr{A})$ 的映射. 并且显然, $\mathscr{A}$ 的每一非空全序子集恒存在上确界(取并集即得). 于是根据定理 5.3, 存在一个元 $A_0\in\mathscr{A}$, 使 $f(A_0)=A_0$. 据映射 $f$ 的定义, $f(A_0)\supset A_0$, 但不等于 $A_0$, 矛盾. 因而定理的结论为真.

据定理 5.4 容易证明佐恩(M. Zorn)引理, 它在应用上是很重要的:

**定理 5.5 设 $X$ 为非空半序集, 若 $X$ 的每一非空全序子集有上确界, 则 $X$ 有极大元.**

**证** 据定理 5.4, $X$ 有一极大全序子集 $X_0$. 令 $x_0=\sup X_0$. 任取一个元 $x\in X$, 满足 $x_0\leqslant x$. 若 $x\overline{\in} X_0$, 则集 $X_0\cup\{x\}$ 为一全序子集, 它包含 $X_0$ 作为真子集. 这与 $X_0$ 为极大全序子集相矛盾. 故 $x\in X_0$. 又因 $x_0$ 为 $X_0$ 的上确界, 故 $x\leqslant x_0$. 据半序关系条件(iii), $x=x_0$. 这表明 $x_0$ 为 $X$ 的极大元.

如果我们仔细观察一下定理 5.4 的证明(也参看定理2.1的证明), 便可发现在那里用到下述公理, 它常称为策莫罗选择公理.

**定理 5.6 设 $\mathscr{A}$ 为一非空集的类, 则存在映射 $f:\mathscr{A}\to\bigcup\limits_{A\in\mathscr{A}}A$, 满足: 对每个 $A\in\mathscr{A}$, 有 $f(A)\in A$.**

定理 5.6 的意思是说: 对于由非空集组成的类 $\mathscr{A}$, 可以作出这样一个集 $E$, 它是由属于 $\mathscr{A}$ 的每个集中取一个元组成的. 这定理的意思比较明白, 本书采取承认的态度. 可以证明, 上面所讲的定理 5.4—5.6 是彼此等价的.

在本章末我们举一个关于势的关系的例. 设集 $M$ 的势为 $\mu$, 且 $M$ 为无限集. 令

$$P=\{(a,0):a\in M\}\cup\{(a,1):a\in M\},$$

并记成 $P=M\times\{0,1\}$. 对于任意两个不相交的集 $M_1, M_2$, 令 $\mu_1$, $\mu_2$ 分别为他们的势, 我们定义 $\mu_1+\mu_2$ 为集 $M_1\cup M_2$ 的势. 那么有下列结果.

**例6** 设$\mu$为任一无限集的势，则有$\mu+\mu=\mu$.

**证** 设集$M$的势为$\mu$. 令$P=M\times\{0,1\}$如上定义，则据定义，$P$的势为$\mu+\mu$. 用$\mathscr{F}$表示一切这样的一一映射$f$的类，使$f$的定义域$D_f\subset M$且值域$R_f=D_f\times\{0,1\}$. 由于$A$是无限集，它有可列子集$C$. 显然$C\times\{0,1\}$是可列集，因而有$C$到$C\times\{0,1\}$的一一映射存在，这表明$\mathscr{F}$非空. 利用集的包含关系将$\mathscr{F}$半序化：即$f_1\leqslant f_2$当且仅当$D_{f_1}\subset D_{f_2}$，设$\mathscr{F}_0$是$\mathscr{F}$的任一非空全序子类，令$D=\bigcup\limits_{f\in\mathscr{F}_0}D_f$，$R=\bigcup\limits_{f\in\mathscr{F}_0}R_f$，则以$D$为定义域$R$为值域的一一映射$F$属于$\mathscr{F}$，它是$\mathscr{F}_0$的上确界，即佐恩引理的条件满足. 于是据此引理，存在$\mathscr{F}$的极大元$g$. 令$D_g$为$g$的定义域，$R_g$为$g$的值域，由$g\in\mathscr{F}$知$D_g$的势$\mu'$适合条件$\mu'=\mu'+\mu'$. 如能证明$\mu'=\mu$，则结论便得到证明. 可是，令$A=M-D_g$，若$A$为有限集，则$D_g$的势等于$D_g\cup A=M$的势，即$\mu'=\mu$；若$A$为无限集，取$A$的可列子集$A_0$，并令$h$为$A_0$到$A_0\times\{0,1\}$上的一一映射，则可得$\mathscr{F}$中的元$\varphi$，满足$D_\varphi=D_g\cup D_h$，且$g<\varphi$（指$D_g\subset D_\varphi$但$D_g\neq D_\varphi$）. 这与$g$的极大性相矛盾. 从而$A$为有限集且$\mu'=\mu$.

## 第一章 习 题

1. 证明下列关系：

(i) $(A-B)\cap(C-D)=(A\cap C)-(B\cup D)$.

(ii) $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

(iii) $A-(B-C)\subset(A-B)\cup C$.

(iv) $(A-B)-(C-D)\subset(A-C)\cup(D-B)$.

(v) 问$(A-B)\cup C=A-(B-C)$成立的充要条件是什么？

2. 设给出集$E$与任意一集族$A_\alpha$，$\alpha\in I$. 问关系式

$$E\cup\left(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\right)=\bigcap_{\alpha\in I}(E\cup A_\alpha)$$

是否恒成立？

3. 设 $A=\{0,1\}$，试证一切排列

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots),\ a_n\in A$$

所成的集的势为$\aleph$.

4. 试作下列各题中集之间的一一对应：

(i) $[0,1]$与$(0,1)$.

(ii) $[a,b]$与$(-\infty,\infty)$.

(iii) 开上半平面与开单位圆.

5. 问下列各集能否同自然数集或区间$[0,1]$构成一一对应：

(i) 以有理数为端点的区间集；

(ii) 闭正方形$[0,1;0,1]$.

如果可能，试作这种对应方法.

6. 证明整系数多项式全体是可列的.

7. 设用 $C[0,1]$表示 $[0,1]$ 上一切连续函数所成的集，试证它的势为$\aleph$.

8. 设用 $M$ 表示 $(-\infty,\infty)$ 上一切单调函数所成的集，试证它的势为$2^{\aleph}$.

9. 设 $A$ 是非空集，它的势大于 1. $A$ 上的一一映射称为 $A$ 的置换. 试证存在 $A$ 的一个置换 $f$ 使 $f(x)\neq x$，对一切 $x\in A$.

10. 在上题中设 $A$ 的势为偶数或无限. 则那里所指的 $f$ 可选得满足 $f(f(x))=x$，对一切 $x\in A$. 当 $A$ 的势为奇数时，情况如何？

11. 设 $A$ 为无限集，试求它的一切置换所成的集的势.

12. 设 $G_1$, $G_2$ 是 $R^1$ 中的开集，且 $G_1\subset G_2$. 试证 $G_1$ 的每个构成区间含于 $G_2$ 的某个构成区间之中.

13. 设 $F_1$, $F_2$ 是 $R^n$ 中的闭集，且 $F_1\cap F_2=\varnothing$. 试证，存在开集 $G_1$, $G_2$，使 $G_1\cap G_2=\phi$ 而 $G_1\supset F_1$, $G_2\supset F_2$.

14. 证明任何点集的内点全体是开集.

15. 设 $f(x)$ 是定义在 $R^1$ 上只取整数值的函数. 试证它的连续点集为开集，不连续点集为闭集.

16. 设 $f(x)$ 是 $R^1$ 上实函数，映任一开集为开集，问 $f$ 是否连续？又连续映射是否映开集为开集？

17. 试证 $R^n$ 中每个闭集可表为可列个开集的交，每个开集可表为可列个闭集的并.

18．设 $E$ 是康脱集的补集中构成区间的中点所成的集，求 $E'$.

19．设点集列 $\{E_k\}$ 是有限区间 $[a,b]$ 中的渐缩序列：$E_1 \supset E_2 \supset \cdots$，且每个 $E_n$ 均为非空闭集，试证交集 $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ 非空.

20．设 $n$ 为一自然数．令 $P_n = \{k \in \mathbb{N} \cdot k$ 为 $n$ 的约数$\}$．对任意 $a$，$b \in P_n$，约定 $a \leqslant b$ 的意义为 $a$ 是 $b$ 的约数．试证 $P_n$ 以 $\leqslant$ 为序是一半序集．又，欲使 $P_n$ 为全序集，对 $n$ 应有什么要求？

21．称 $X$ 的子集所成的类 $\mathscr{A}$ 有性质 $(\sigma)$：若 $X$ 非 $\mathscr{A}$ 中有限个元的并．试证，若 $\mathscr{A}$ 有性质$(\sigma)$，则存在 $X$ 的子集的极大类 $\mathscr{B}$，具有性质$(\sigma)$且包含 $\mathscr{A}$．并证明，若 $A_1, A_2, \cdots, A_n \subset X$，且 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \in \mathscr{B}$，则必有某个 $A_i \in \mathscr{B}$.

22．试以定理 5.5 作为出发点，来证明定理 5.6.

23．设 $\mathscr{A}$ 是由给定的集的子集所成的类；$A \in \mathscr{A}$ 指的是 $A$ 的每一有限子集属于 $\mathscr{A}$．试证 $\mathscr{A}$ 含有一极大元.

24．试证，设 $X$ 为非空半序集，若 $X$ 的每一非空全序子集有上界，则 $X$ 有极大元(佐恩引理的另一形式).

# 第二章 勒贝格测度

从本章开始，我们将讨论欧几里得空间点集的测度理论．我们以第一章定理 4.1 为基础来定义开集、闭集的测度，然后用以构造任意点集的外测度与内测度，并进而讨论可测集的性质，特别是完全可加性与可测集类定理．为了便于学习，将着重讲一维有界点集的勒贝格测度．至于多维及无界集情形在本章末作一些扼要说明．作为补充内容，还介绍了环上测度的基本结果．

## §1. 引 言

从本章起我们进入积分理论的第一步，即讨论与积分相关的点集度量性质．这在黎曼积分情形是不需要的，因为它仅考虑区间或极其简单的区域上的积分，而这些集的长度或容积都是易于了解的．要想在较复杂的点集(假定是一维的)上考察积分，就应先考虑点集的相应“长度”．不过，这种点集也不能太复杂，使有可能对它引进一种“适当的度量”．这种度量就是以后所说的测度．

先考察一下区间的情况．区间 $I=(a,b)$，$[a,b)$，$(a,b]$，或$[a,b]$的测度自然都应是 $b-a$，以便同它们通常的长度相一致．

假定基本集为$[0,1]$，则所有有限个区间的并构成类 $\mathscr{R}$，并且这个类中两个元的差也属于 $\mathscr{R}$．设 $E\in\mathscr{R}$，$E$ 可以表示成有限个互不相交的区间的并，定义 $E$ 的测度 $mE$ 为这些互不相交区间的长度之和．那么，显然有下列性质：

(i) $mE\geqslant 0$ (非负性)；

(ii) 若 $E_1\cap E_2=\varnothing$，则 $m(E_1\cup E_2)=mE_1+mE_2$ (**有限可加性**)；

(iii) $m[0,1]=1$；

其中 $E, E_1, E_2\in\mathscr{R}$.

这三条性质事实上即为测度的特征．我们称它们为测度公理．最值得注意是第二条性质，即有限可加性．从客观事实看来，它的内容部分体现了"全量等于分量之和"这一公理．由此联想到，如果用下列条件代替(ii)(图 7)

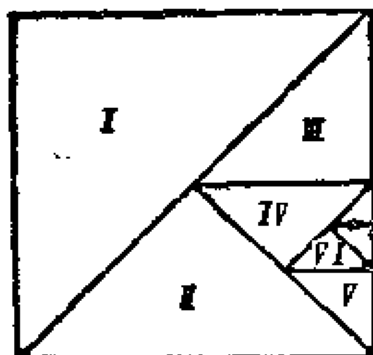


图 7　可加性示意

(ii′) 若 $E_k\cap E_j=\varnothing (k\neq j)$，则

$$m(E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_k\cup\cdots)=mE_1+mE_2+\cdots+mE_k+\cdots,$$

那么，测度公理 (i), (ii), (iii) 将可以反映更多的现象．同时，从表面上就可看出，如果仅考察由有限个区间的并构成的类是不够的．因为，可列个互不相交的区间的并，一般说来，已不能表为有限个区间的并；同时它们的差一般也不能表为可列个区间的并．

假如要考察的不是区间，而是 $[0,1]$ 中某个点集 $E$ (例如有理点集)，怎样来定义它的长度呢？或者说得确切些，怎样来定义它的测度呢？

试用黎曼积分的办法来考察 $E$ 的测度，看看会得到什么结论．用分点

$$x_0=0<x_1<x_2<\cdots<x_n=1$$

将区间$[0,1]$分成一些小区间，如果把与 $E$ 有公共点的区间的长度的和当

$$\max_{i=1,\dots,n}(x_i-x_{i-1})\to 0$$

时的极限作为 $E$ 的测度，立即看出，$E$ 的测度等于 1．另一方面，依同样方法，$[0,1]-E$ (即$[0,1]$ 中无理点集) 的测度也等于

1，而这两个集互不相交，其并为 $[0,1]$，故若测度公理可应用，将得到 $1=1+1$ 的矛盾．此矛盾在于测量方法不合理．

还有另一种办法来测量 $E$ 的测度．设 $\varepsilon>0$ 是任意给定的一个正数．把 $E$ 中的点排列为

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots,$$

并考虑开区间 $(x_n-\varepsilon/2^{n+1}, x_n+\varepsilon/2^{n+1})$，$n\in\mathbb{N}$，所成的类 $\mathscr{E}$．由于 $E$ 中每一点都含在 $\mathscr{E}$ 的某个元中．可以说 $E$ 被 $\mathscr{E}$ 所覆盖．可是 $\mathscr{E}$ 中区间长度的总和不超过

$$\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2^2}+\cdots+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}+\cdots=\varepsilon,$$

而 $\varepsilon$ 可以任意小，因此可以想象 $E$ 的测度应等于 0．这个结论看来是合理的，利用以后定义的测度将会得到同样的结论．

测度的严格定义将在下面给出．下一节先从简单的开集的测度出发，逐步引进外测度、内测度与可测集的概念．

## §2．有界点集的外、内测度·可测集

前面已经说过，本章将着重研究直线上有界点集的测度，这一点以后不再一一声明．

这里用构造方法来讲点集的测度．我们逐步讲开集与闭集的测度，然后讲外测度与内测度，最后讲可测集．在这里我们可以学到一种成套理论的模型，而且这种处理方法可以直接用到其它情形(例如第四章 §7 的 $LS$ 测度)．

首先讲开集与闭集的测度．

**定义 2.1** 设 $G$ 为非空开集．据第一章定理 4.1．$G$ 有结构表示：

$$G=\bigcup_k(\alpha_k, \beta_k),$$

其中$(\alpha_k,\beta_k)$等互不相交，它们是$G$的构成区间。我们规定开集$G$的测度为它的一切构成区间长度的和，并记为$mG$：

$$mG=\sum_k(\beta_k-\alpha_k).$$

不难看出，$mG<\infty$．事实上，因$G$有界，存在有限区间$(a,b)$，使$G\subset(a,b)$．显然，对任何自然数$n$（不妨假定上面的和是无穷级数而非有限和），有$\bigcup_{k=1}^{n}(\alpha_k,\beta_k)\subset(a,b)$，从而推出

$$\sum_{k=1}^{n}(\beta_k-\alpha_k)\leqslant b-a.$$

令$n\to\infty$，即得$\sum_{k=1}^{\infty}(\beta_k-\alpha_k)\leqslant b-a<\infty$．这样，正项级数$\sum_{k=1}^{\infty}(\beta_k-\alpha_k)$收敛．正是由于这一原因，用以定义$mG$的级数与项的次序无关．

**定义 2.2** 设$F$为非空闭集，任取一个包含$F$的开区间$(a,b)$，令$G=(a,b)-F$，则$G$为开集．定义闭集$F$的测度为

$$mF=b-a-mG.$$

可以证明，$F$的测度与区间的选择无关．其实，由于$F$为有界闭集，令$\alpha=\inf\{x:x\in F\}$，$\beta=\sup\{x:x\in F\}$，则$\alpha$，$\beta$为实数且均属于$F$．容易验明，

$$G=(a,\alpha)\cup(\beta,b)\cup((\alpha,\beta)-F),$$

且右边三个开集互不相交．据开集的测度的定义，有

$$mG=\alpha-a+b-\beta+m((\alpha,\beta)-F),$$

或

$$b-a-mG=\beta-\alpha-m((\alpha,\beta)-F).$$

可见$mF$与$a$，$b$的取法无关．

在第一章已指出，除了空集与整个数直线是既开又闭的集以外，在直线上不再有其它的既开又闭的集．因此用上述方法定义

闭集的测度是合理的，不会与开集的测度定义相矛盾．

**例** 考察康脱完全集 $P_0$ 与相应的开集 $G_0$ 的测度．由上面定义可知，

$$mG_0=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\cdots+2^k\cdot\frac{1}{3^{k+1}}+\cdots=1,$$

$$mP_0=1-mG_0=0.$$

这里我们得到了一个测度为 0 的不可列集的例子．

开集测度具有下列性质：

**定理 2.1** (i) **设 $G_1$，$G_2$ 是两个有界开集，且 $G_1\subset G_2$，则 $mG_1\leqslant mG_2$ (单调性)；**

**(ii) 设有界开集 $G$ 是有限个或可列个开集 $G_1, G_2, \cdots$ 的并，则 $mG\leqslant\sum\limits_k mG_k$ (半可加性)；如果 $G_k$ 彼此互不相交，则 $mG=\sum\limits_k mG_k$ (完全可加性)．**

**证** (i) 设 $G_1$，$G_2$ 的构成区间类分别是 $\{\delta_k^{(1)}\}$ 与 $\{\delta_k^{(2)}\}$，$k\in\mathbb{N}$．那么

$$mG_1=\sum_k m\delta_k^{(1)},\quad mG_2=\sum_k m\delta_k^{(2)}.$$

任取 $\varepsilon>0$，有自然数 $n$ 存在，使

$$mG_1<\sum_{k=1}^{n}m\delta_k^{(1)}+\varepsilon.$$

由于 $G_1\subset G_2$，$\delta_1^{(1)}, \delta_2^{(1)}, \cdots, \delta_n^{(1)}$ 必含于 $G_2$ 的某 $m$ 个互不相交的构成区间 $\delta_{r_1}^{(2)}$，$\delta_{r_2}^{(2)}$，$\cdots, \delta_{r_m}^{(2)}$ 中 ($m\leqslant n$)，把两组有限个区间 $\delta_1^{(1)}, \cdots, \delta_n^{(1)}$ 与 $\delta_{r_1}^{(2)}, \cdots, \delta_{r_m}^{(2)}$ 进行比较，容易知道

$$\sum_{k=1}^{n}m\delta_k^{(1)}\leqslant\sum_{j=1}^{m}m\delta_{r_j}^{(2)},$$

因此

$$mG_1<\sum_{j=1}^{m}m\delta_{r_j}^{(2)}+\varepsilon\leqslant mG_2+\varepsilon.$$

由于 $\varepsilon$ 可取任意的正数，有 $mG_1 \leqslant mG_2$.

(ii) 为了证明半可加性，不妨假定 $\sum_k mG_k < \infty$. 设 $G_k$ 的构成区间是 $(\alpha_i^{(k)}, \beta_i^{(k)})$, $i, k \in \mathbb{N}$, $G$ 的构成区间是 $(\alpha_j, \beta_j)$, $j \in \mathbb{N}$. 显然，每个区间 $(\alpha_j, \beta_j)$ 都是某些区间 $(\alpha_i^{(k)}, \beta_i^{(k)})$ 的并. 于是对任意小于 $(\beta_j - \alpha_j)/2$ 的正数 $\varepsilon$, 闭区间 $[\alpha_j + \varepsilon, \beta_j - \varepsilon]$ 中每一点都是构成 $(\alpha_j, \beta_j)$ 的某个开区间 $(\alpha_i^{(k)}, \beta_i^{(k)})$ 的内点. 根据有限覆盖定理，这些 $(\alpha_i^{(k)}, \beta_i^{(k)})$ 中有有限个区间就可以覆盖 $[\alpha_j + \varepsilon, \beta_j - \varepsilon]$. 如果用 $\Sigma'_j(\beta_i^{(k)} - \alpha_i^{(k)})$ 表示相应的有限个区间长度之和，而以 $\Sigma_j(\beta_i^{(k)} - \alpha_i^{(k)})$ 表示构成 $(\alpha_j, \beta_j)$ 的一切开区间 $(\alpha_i^{(k)}, \beta_i^{(k)})$ 的长度之和，那么

$$\beta_j - \alpha_j - 2\varepsilon \leqslant \Sigma'_j(\beta_i^{(k)} - \alpha_i^{(k)}) \leqslant \Sigma_j(\beta_i^{(k)} - \alpha_i^{(k)}).$$

上式右边与 $\varepsilon$ 无关，故

$$\beta_j - \alpha_j \leqslant \Sigma_j(\beta_i^{(k)} - \alpha_i^{(k)}).$$

再对 $j$ 求和，便得.

$$mG = \sum_{j=1}^{\infty}(\beta_j^{(k)} - \alpha_j) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \Sigma_j(\beta_i^{(k)} - \alpha_i^{(k)}).$$

因为收敛的正项二重级数可以交换求和次序. 上式右边可整理成

$$\sum_{j=1}^{\infty} \Sigma_j(\beta_i^{(k)} - \alpha_i^{(k)}) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty}(\beta_i^{(k)} - \alpha_i^{(k)}) = \sum_{k=1}^{\infty} mG_k,$$

故得 $mG \leqslant \sum_k mG_k$, 于是 (ii) 的前半部分得证.

剩下来要证明，当 $G_k$ 等互不相交时完全可加性成立. 设 $G_k \cap G_j = \varnothing (k \neq j)$, 则易知每个 $(\alpha_j, \beta_j)$ 正好是某个 $(\alpha_i^{(k)}, \beta_i^{(k)})$, 因此上面对一切 $j$ 求和，也就是对一切 $k$ 与 $i$ 求和时，有

$$mG = \sum_j(\beta_j - \alpha_j) = \sum_k \sum_i(\beta_i^{(k)} - \alpha_i^{(k)}) = \sum_k mG_k.$$

定理全部得证.

**引理 2.1** 设 $F_1, F_2, \cdots, F_n$ 均为闭集，$F_k \subset (\alpha_k, \beta_k)$, $k=1$,

$2, \cdots, n$, 且 $(\alpha_k, \beta_k)$ 等互不相交. 则

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{n} F_k\right)=\sum_{k=1}^{n} mF_k.$$

**证** 由于有限个闭集的并为闭集, 上述等式左边有意义. 我们对 $n=2$ 来证明引理, 一般情形可用归纳法完成. 令

$$a_k=\inf\{x:x\in F_k\},\ b_k=\sup\{x:x\in F_k\},\ k=1,2.$$

那么, 由于 $F_k$ 为闭集, $a_k, b_k$ 均属于 $F_k$, 从而据闭集测度的定义知

$$mF_k=b_k-a_k-m\mathscr{C}_kF_k,$$

这里 $\mathscr{C}_kF_k$ 表示开集 $(a_k, b_k)-F_k$, $k=1, 2$.

不妨假定 $\beta_1<\alpha_2$. 由于 $F_1\cup F_2$ 为闭集, 它含于闭区间 $[a_1, b_2]$ 中, 而 $a_1, b_2$ 分别为 $F_1\cup F_2$ 的下、上确界, 故令 $\mathscr{C}(F_1\cup F_2)$ 表示 $F_1\cup F_2$ 关于 $(a_1, b_2)$ 的补集时, 有

$$m(F_1\cup F_2)=b_2-a_1-m\mathscr{C}(F_1\cup F_2).$$

但 $\mathscr{C}(F_1\cup F_2)=\mathscr{C}_1F_1\cup\mathscr{C}_2F_2\cup(b_1, a_2)$ 且右边三个开集互不相交, 故根据定理 2.1 的 (ii),

$$m\mathscr{C}(F_1\cup F_2)=m\mathscr{C}_1F_1+m\mathscr{C}_2F_2+a_2-b_1,$$

从而

$$\begin{aligned}m(F_1\cup F_2)&=b_2-a_1-(a_2-b_1)-m\mathscr{C}_1F_1-m\mathscr{C}_2F_2\\&=b_1-a_1-m\mathscr{C}_1F_1+b_2-a_2-m\mathscr{C}_2F_2\\&=mF_1+mF_2.\end{aligned}$$

引理得证.

**定理 2.2** **设 $F$ 为闭集, $G$ 为开集, 且 $F\subset G$, 则**

$$m(G-F)=mG-mF.$$

**证** 设 $G$ 的构成区间类是 $\{(\alpha_k, \beta_k)\}$, $k\in\mathbb{N}$ 据有限覆盖定理, 存在自然数 $n$, 使 $\bigcup_{k=1}^{n}(\alpha_k, \beta_k)\supset F$. 令 $F_k=F\cap(\alpha_k, \beta_k)$, 则 $F_k$ 为含于 $(\alpha_k, \beta_k)$ 的闭集, 且互不相交. 我们有

$$G-F=\left\{\bigcup_{k=1}^{n}(\alpha_k,\beta_k)-F\right\}\cup\left\{\bigcup_{k=n+1}^{\infty}(\alpha_k,\ \beta_k)\right\}$$

$$=\left\{\bigcup_{k=1}^{n}(\alpha_k,\beta_k)-F_k\right\}\cup\left\{\bigcup_{k=n+1}^{\infty}(\alpha_k,\ \beta_k)\right\},$$

即开集 $G-F$ 被表示成互不相交的开集的并. 据定理 2.1 与闭集测度的定义,有

$$m(G-F)=\sum_{k=1}^{n}m((\alpha_k,\beta_k)-F_k)+\sum_{k=n+1}^{\infty}(\beta_k-\alpha_k)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(\beta_k-\alpha_k)-\sum_{k=1}^{n}mF_k+\sum_{k=n+1}^{\infty}(\beta_k-\alpha_k).$$

注意到 $F_k$ 等满足引理的条件,应用引理便得.

$$m(G-F)=\sum_{k=1}^{\infty}(\beta_k-\alpha_k)-m(\bigcup_{k=1}^{n}F_k)=mG-mF.$$

**推论** **设 $F_k$, $k=1,2,\cdots,n$ 是互不相交的闭集, 则**

$$m(\bigcup_{k=1}^{n}F_k)=\sum_{k=1}^{n}mF_k.$$

**证** 不妨设 $n=2$. 作开区间 $I\supset F_1\cap F_2$, 令 $G_k=I-F_k$, $k=1,2$. 因 $F_1$, $F_2$ 不相交, $G_1\supset F_2$ 于是由定理 2.2,

$$mF_1+mF_2=mI-(mG_1-mF_2)=mI-m(G_1-F_2)$$
$$=mI-m(G_1\cap G_2)=m(F_1\cup F_2).$$

现在引进有界集的外、内测度与可测集的定义.

**定义 2-3** 设 $E$ 为有界集, $E$ 的外测度定义为一切包含 $E$ 的开集的测度的下确界,并记成

$$m^*E=\inf_{G\supset E}mG.$$

$E$ 的内测度则定义为所有含于 $E$ 中闭集的测度的上确界, 并记成.

$$m_*E=\sup_{F\subset E}mF.$$

由于类 $\{G:G$ 为开集且 $G\supset E\}$ 是非空的. 例如包含 $E$ 的开

区间便属于这个类，同时开集的测度已有了定义．故数集 $\{mG:G$ 为开集且 $G\supset E\}$ 的下确界有意义，并且满足 $0\leqslant m^*E<\infty$．同样，$m_*E$ 有意义，$0\leqslant m_*E<\infty$．此外，对于任意开集 $G$ 与闭集 $F$，满足 $G\supset E\supset F$ 时，据定理 2.2 推出 $mG\geqslant mF$．令 $F$ 固定而 $G$ 变动取下确界时，即得 $m^*E\geqslant mF$；再令 $F$ 变动取上确界时即得 $m^*E\geqslant m_*E$．这就是说，任何有界集的内测度均不超过外测度．又据定义易知外、内测度均具有单调性，例如，对于外测度，设 $E_1\subset E_2$，则当开集 $G\supset E_2$ 时也有 $G\supset E_1$．因此类 $\{G:G$ 为开集且 $G\supset E_2\}$ 是 $\{G:G$ 为开集且 $G\supset E_1\}$ 的子类，故其中开集测度的下确界不可能较小，从而得 $m^*E_2\geqslant m^*E_1$．

**定义 2-4** 设 $E$ 为有界集，当 $m_*E=m^*E$ 时，称 $E$ 为勒贝格可测的，简称 $E$ 为可测的．这时 $E$ 的外测度或内测度称为 $E$ 的测度，并记成 $mE$．

不难验明，象开区间、闭区间、半闭半开区间等这样一些简单的集都是可测的，并且测度与区间长度一致．特别是，由一点所成的集是可测的且测度为零．今后还要阐明，开集、闭集以及所谓波雷尔集也都是可测的．但是，不可测集是存在的，我们将在后面§4 中给出例子．

## §3．可测集的性质

上一节给出了可测集概念，本节讨论可测集的性质．这些性质中有的是讲一个集为可测的充要条件，因而也可作为可测集的定义．

**定理 3.1 有界集 $E$ 为可测的充要条件是：对任给的 $\varepsilon>0$，存在开集 $G\supset E$ 与闭集 $F\subset E$，使 $m(G-F)<\varepsilon$．**

**证** 必要性．设 $E$ 可测，$m^*E=m_*E$．据内、外测度的定

义, 对任给的 $\varepsilon>0$, 存在开集 $G\supset E$ 与闭集 $F\subset E$, 使

$$mG<m^*E+\varepsilon/2, \qquad mF>m_*E-\varepsilon/2,$$

但 $m^*E=m_*E$, 故 $mG-mF<\varepsilon$. 因 $F\subset G$, 据定理 2.2 即得

$$m(G-F)<\varepsilon.$$

充分性. 设对任给的 $\varepsilon>0$, 存在开集 $G\supset E$ 与闭集 $F\subset E$, 使 $m(G-F)<\varepsilon$. 据定理 2.2 得 $mG-mF<\varepsilon$, 又因 $mF\leqslant m_*E\leqslant m^*E\leqslant mG$, 故 $m^*E-m_*E\leqslant\varepsilon$. 由 $\varepsilon$ 的任意性, 得 $m^*E\leqslant m_*E$, 但已知 $m^*E\geqslant m_*E$, 故 $m^*E=m_*E$. 这样, $E$ 的可测性得证.

**定理 3.2** (i) **设基本集为 $X=(a,b)$, 若 $E$ 可测, 则 $E$ 关于 $X$ 的补集 $\mathscr{C}E$ 也可测.**

(ii) **若 $E_1$, $E_2$ 可测, 则 $E_1\cup E_2$, $E_1\cap E_2$, $E_1-E_2$ 均可测. 又若 $E_1$, $E_2$ 不相交时, 则 $m(E_1\cup E_2)=mE_1+mE_2$.**

**证** (i) 因 $E$ 可测, 据定理 3.1, 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在开集 $G\supset E$ 与闭集 $F\subset E$, 使 $m(G-F)<\varepsilon$. 如果必要的话, 我们在 $(a,b)$ 内取两点 $a'$, $b'(a'<b')$, 使开集 $G_1=G\cup(a,a')\cup(b',b)$ (目的是使 $\mathscr{C}G_1$ 成为闭集)满足

$$m(G_1-F)<2\varepsilon.$$

易见 $\mathscr{C}G_1$ 是含在 $\mathscr{C}E$ 中的闭集, 而 $\mathscr{C}F$ 是包含 $\mathscr{C}E$ 的开集, 又因 $\mathscr{C}F-\mathscr{C}G_1=G_1-F$, 故 $m(\mathscr{C}F-\mathscr{C}G_1)<2\varepsilon$. 据定理 3.1 $\mathscr{C}E$ 是可测的.

(ii) 因 $E_1, E_2$ 均可测, 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在开集 $G_i$ 与闭集 $F_i$, 使

$$G_i\supset E_i\supset F_i, \quad m(G_i-F_i)<\varepsilon, \quad i=1,2.$$

令 $G=G_1\cup G_2$, $F=F_1\cup F_2$. 易见 $G-F\subset(G_1-F_1)\cup(G_2-F_2)$, 故 $m(G-F)<2\varepsilon$. 再注意到 $G\supset(E_1\cup E_2)\supset F$ 且 $G$, $F$ 分别为开集与闭集, 据定理 3.1 知 $E_1\cup E_2$ 可测.

当 $E_1$, $E_2$ 不相交时, $F_1$, $F_2$ 也不相交, 故

$$m(E_1 \cup E_2) \geqslant m(F_1 \cup F_2)$$
$$= mF_1 + mF_2 > mG_1 + mG_2 - 2\varepsilon$$
$$\geqslant mE_1 + mE_2 - 2\varepsilon,$$

由 $\varepsilon$ 的任意性，有 $m(E_1 \cup E_2) \geqslant mE_1 + mE_2$. 同理可证 $m(E_1 \cup E_2) \leqslant mE_1 + mE_2$. 因此得 $m(E_1 \cup E_2) = mE_1 + mE_2$.

最后，要证明 $E_1 \cap E_2$ 与 $E_1 - E_2$ 的可测性，只须利用关系式

$$E_1 \cap E_2 = \mathscr{C}(\mathscr{C}E_1 \cup \mathscr{C}E_2),$$
$$E_1 - E_2 = E_1 \cap \mathscr{C}E_2$$

以及已证明的事实即可.

**定理 3.3** （测度的单调性）**设** $E_1, E_2$ **是两个可测集**, $E_1 \subset E_2$, **则** $mE_1 \leqslant mE_2$.

**证** 据定理 3.2, $E_2 - E_1$ 是可测的. 现在 $E_2$ 有互斥分解

$$E_2 = (E_2 - E_1) \cup E_1,$$

故 $mE_2 = m(E_2 - E_1) + mE_1$. 显然，任何可测集的测度是非负的，故 $mE_2 \geqslant mE_1$.

**定理 3.4** (i) **设** $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, **每个** $E_k$ **均可测，则** $E$ **也可测. 又如果** $E_k$ **等互不相交，则有**

$$mE = \sum_{k=1}^{\infty} mE_k.$$

(ii) **设** $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$, **每个** $E_k$ **均可测，则** $E$ **也可测.**

**证** (i) 首先假定 $E_k$ 等互不相交. 据定理 3.2, 对任意自然数 $n$, $\bigcup_{k=1}^{n} E_k$ 是可测的，而且有

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum_{k=1}^{n} mE_k.$$

对于任意的 $\varepsilon>0$，作闭集 $F\subset\bigcup_{k=1}^{n}E_k$，使

$$mF>m\left(\bigcup_{k=1}^{n}E_k\right)-\varepsilon,$$

那么

$$m_*E\geqslant mF>m\left(\bigcup_{k=1}^{n}E_k\right)-\varepsilon=\sum_{k=1}^{n}mE_k-\varepsilon.$$

先令 $\varepsilon\to0$，再令 $n\to\infty$，得

$$m_*E\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}mE_k \tag{1}$$

另一方面，对每个 $k$，可作开集 $G_k\supset E_k$，使 $mG_k<mE_k+\varepsilon/2^k$，$k\in\mathbb{N}$，令 $G=\bigcup_{k=1}^{\infty}G_k$，则

$$m^*E\leqslant mG\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}mG_k<\sum_{k=1}^{\infty}mE_k+\varepsilon,$$

令 $\varepsilon\to0$ 得

$$m^*E\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}mE_k. \tag{2}$$

比较 (1)，(2)，知 $E=\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k$ 是可测的，且 $mE=\sum_{k=1}^{\infty}mE_k$.

当 $E_k$ 等是任意可测集情形，由等式

$$E=E_1\cup(E_2-E_1)\cup(E_3-E_1-E_2)\cup\cdots$$
$$\cup(E_n-E_1\cdots E_{n-1})\cup\cdots$$

得到 $E$ 的一种互斥分解，据定理 3.2 的 (ii)，知上式右边每一项可测，于是应用已证明结果，得知 $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$ 可测.

(ii) 根据第一章定理1.2，$\mathscr{C}E=\mathscr{C}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k\right)=\bigcup_{k=1}^{\infty}(\mathscr{C}E_k)$，从而据已证的 (i)，知 $\mathscr{C}E$ 可测，因而 $E$ 也可测.

定理 3.4 所揭示的性质是测度的完全可加性 ((i) 的后一部分) 以及可测集关于可列并、可列交运算的封闭性，这些正是勒贝格测度的最重要性质.

由于一点所成的集的测度为零，根据完全可加性，任何可列集的测度为零(参看 §1).

顺便指出，由定理 3.4(i) 的证明可以看出，若 $E_k$ 不一定可测，所证的 (2) 表现为

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty} m^*E_k,$$

它称为外测度的半可加性.

设 $(a,b)$ 是基本集. 根据定理 3.2 的 (i) 可知，$E$ 与它的补集 $\mathscr{C}E$ 的可测性相同. 再据可加性，当 $E$ 或 $\mathscr{C}E$ 可测时，有等式

$$mE+m\mathscr{C}E=b-a$$

成立. 当 $E$ 未必可测时，我们有

**引理 3.1** **设** $E\subset(a,b)$, $\mathscr{C}E$ **是** $E$ **关于** $(a, b)$ **的补集. 则有**

$$m_*E+m^*\mathscr{C}E=b-a. \tag{1}$$

**证** 对于任意的 $\varepsilon>0$, 取闭集 $F\subset E$, 使

$$mF>m_*E-\varepsilon. \tag{2}$$

$F$ 关于 $(a,b)$ 的补集 $\mathscr{C}F$ 为开集，且 $\mathscr{C}F\subset\mathscr{C}E$, 故

$$m^*\mathscr{C}E\leqslant m\mathscr{C}F=b-a-mF, \tag{3}$$

于是由(2), (3)得

$$m_*E+m^*\mathscr{C}E\leqslant b-a. \tag{4}$$

另一方面，取开集 $G\supset\mathscr{C}E$, 使

$$mG<m^*\mathscr{C}E+\varepsilon, \tag{5}$$

在必要时可适当扩大开集 $G$, 使它包含两个小区间 $(a,a')$ 与 $(b',b)$, 这里 $a<a'<b'<b$, 并使不等式(5)仍成立 (相应的只要增大

(5)中的 $\varepsilon$). 这时有 $H=\mathscr{C}G=[a', b']-G$, 它是闭集(这是目的所在), 且显然含于 $E$. 故

$$m_*E \geqslant mH=b-a-mG,$$

由此式与(5)得

$$m_*E+m^*\mathscr{C}E>b-a-\varepsilon,$$

令 $\varepsilon\to 0$ 得 $m_*E+m^*\mathscr{C}E\geqslant b-a$. 此式与(4)一起表明 (1) 成立. 引理证完.

从等式(1)可以看出, 由于 $E$ 与 $\mathscr{C}E$ 处于对称地位, 等式

$$m_*\mathscr{C}E+m^*E=b-a.$$

也成立. 因而得到:

$$m^*\mathscr{C}E-m_*\mathscr{C}E=m^*E-m_*E,$$

由此推知, 关于基本区间$(a, b)$, 集 $E$ 与其补集的可测性相同, 这在定理 3.2 中已提到过了, 此外, 把(1)改写成

$$m_*E=b-a-m^*\mathscr{C}E,$$

我们看出, 集 $E$ 的内测度可以通过它的补集的外测度来定义.

下面再给出可测集的另一充要条件.

**定理 3.5 有界集 $E$ 为可测的充要条件是: 对任何集 $A$, 等式**

$$m^*A=m^*(A\cap E)+m^*(A\cap\mathscr{C}E) \tag{1}$$

**成立.**

**证** 充分性. 设 $E\subset(a, b)$, 并且不妨假定 $(a, b)$ 是基本区间. 取 $A=(a, b)$, 由条件 (1) 得

$$m^*E=b-a-m^*\mathscr{C}E,$$

据引理 3.1, 上式右边正是 $E$ 的内测度 $m_*E$, 故 $m^*E=m_*E$, 即 $E$ 可测.

必要性. 设 $E$ 可测, 由外测度的半可加性, 得

$$m^*A\leqslant m^*(A\cap E)+m^*(A\cap\mathscr{C}E). \tag{2}$$

另一方面，对任意的 $\varepsilon>0$，据外测度定义，存在开集 $G\supset A$，使

$$m^*A>mG-\varepsilon. \tag{3}$$

这时 $G\cap E\supset A\cap E$, $G\cap\mathscr{C}E\supset A\cap\mathscr{C}E$. 故

$$m^*(A\cap E)\leqslant m(G\cap E),\ m^*(A\cap\mathscr{C}E)\leqslant m(G\cap\mathscr{C}E).$$

不难看出，开集是可测的(参阅定理 3.6 证明以后的说明)，且据定理 3.4，有

$$m(G\cap E)+m(G\cap\mathscr{C}E)=m\{G\cap(E\cup\mathscr{C}E)\}=mG,$$

从而由 (3) 得

$$\begin{aligned}m^*A&>m(G\cap E)+m(G\cap\mathscr{C}E)-\varepsilon\\&\geqslant m^*(A\cap E)+m^*(A\cap\mathscr{C}E)-\varepsilon.\end{aligned}$$

令 $\varepsilon\to0$ 即得

$$m^*A\geqslant m^*(A\cap E)+m^*(A\cap\mathscr{C}E).$$

把此式与 (2) 联合便得 (1).

**定理 3.6** (i) 设 $\{E_k\}$ 是基本集 $(a,b)$ 中的渐张可测集列，即 $E_1\subset E_2\subset\cdots$，则 $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$ 是可测的，且 $mE=\lim_{k\to\infty}mE_k$.

(ii) 设 $\{E_k\}$ 是基本集 $(a,b)$ 中渐缩可测集列，即 $E_1\supset E_2\supset\cdots$，则 $E=\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k$ 是可测的，且 $mE=\lim_{k\to\infty}mE_k$.

**证** (i) $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$ 的可测性是显然的. 注意到 $E$ 的下列分解

$$E=E_1\cup(E_2-E_1)\cup\cdots\cup(E_k-E_{k-1})\cup\cdots,$$

其中右边各项互不相交，应用定理 3.4，即得

$$\begin{aligned}mE&=mE_1+\sum_{k=2}^{\infty}m(E_k-E_{k-1})\\&=mE_1+\sum_{k=2}^{\infty}(mE_k-mE_{k-1})=\lim_{k\to\infty}mE_k.\end{aligned}$$

对于 (ii), 只须注意到 $\mathscr{C}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right)=\bigcup_{k=1}^{\infty}(\mathscr{C}E_k)$, 再应用 (i) 即得所需结论.

至此, 可测集的一些基本性质已讨论过了. 我们指出, 其中比较重要的是关于差集的可测性、测度的完全可加性与单调性. 或者说, 可测集关于差集与可列并的运算是封闭的. 实际上, 一切可测集所成的类构成一个集的 $\sigma$ 环. 由此还推出, 可测集关于可列交运算也是封闭的. 这样, 在可测集类中进行运算是相当方便的.

读者可以回顾一下, 我们正是遵循由简单到复杂的思想来讨论测度的, 即由开集的测度到可测集, 由开集的完全可加性到可测集的完全可加性, 等等. 先解决特殊的问题, 再解决一般的问题. 但是, 我们应当思考一下, 开集、闭集等是否可测? 如果可测, 它们的测度与作为出发点规定的测度是否一致? 下面说明, 答案是肯定的.

先看开区间 $I=(a,b)$ 的情形. $I$ 自身就是包含 $(a,b)$ 的一个开集(只含一个构成区间), 故 $m^*I\leqslant mI=b-a$, 但数集

$$\{mG: G \text{ 为开集且 } G\supset I\}$$

中有数 $mI$, 因而 $mI$ 即为这数集的下确界. 这样, $m^*I=b-a$. 另一方面, $[a+\varepsilon/2,\ b-\varepsilon/2]$ $(0<\varepsilon<b-a)$ 为含于 $I$ 中的闭集, 它的测度显然为 $b-a-\varepsilon$, 其上确界为 $b-a$. 故 $m_*I=b-a$. 因此据可测集的定义, $I=(a,b)$ 可测且测度为 $b-a$, 与我们开始时规定的相一致, 并且测度记号 $mI$ 也毋需改变. 既然开集可表示为有限个或可列个开区间的并, 据定理 3.4, 它是可测的. 再根据开集的结构表示, 它的测度也与原来规定的相一致. 由此据定理 3.2, 闭集是可测的, 它的测度也与原来规定的相一致. 在这里我们指出重要的一类集, 它以开集、闭集为对象, 作至多可列次或并

或交的运算，所得的集统称波雷尔 (E.Borel) 集 (§6 末将给出标准定义)．这样，一切波雷尔集是可测的．特别．波雷尔集中有这样的集是值得注意的：一是可表为可列个开集的交，称为 $G_\delta$ 集；另一是可表为可列个闭集的并，称为 $F_\sigma$ 集．它们可以用来构造任意可测集的测度．

**定理 3.7** **设 $E$ 是可测集，则存在 $G_\delta$ 集 $A$ 与 $F_\sigma$ 集 $B$，满足 $A \supset E \supset B$ 且 $mE = mA = mB$．**

**证** 设 $E$ 可测，则 $mE = m^*E$．于是据外测度定义，对每个 $n \in \mathbb{N}$，存在开集列 $G_n \supset E$，使 $mG_n < mE + 1/n$．令 $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$，则 $A$ 适合定理要求．其实，$A$ 显然为 $G_\delta$ 集，且对任一 $n \in \mathbb{N}$，有 $E \subset A \subset G_n$，故 $0 \leqslant mA - mE \leqslant mG_n - mE < 1/n$．令 $n \to \infty$ 即得 $mA = mE$．

同样，从 $mE = m_*E$ 出发，据内测度定义，对每个 $n \in \mathbb{N}$，存在闭集列 $F_n \subset E$，使 $mF_n > mE - 1/n$，令 $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$，则 $B$ 为含于 $E$ 的 $F_\sigma$ 集且 $mB = mE$．

定理 3.7 告诉我们，可测集 $E$ 是与某个 $G_\delta$ 集以及某个 $F_\sigma$ 集仅相差一个零测度的集．由于其逆也成立，这样我们就获得了可测集的构造．此外，从定理 3.7 的证明中可以看出，当 $E$ 不可测时，则所作出的集 $A$ 与 $B$ 满足关系

$$mA = m^*E, \qquad mB = m_*E.$$

## §4. 关于测度的几点评注

### 1. 无界集的测度

以上三节讨论的都是有界集情形，在很多问题中往往要考虑无界可测集．设 $E$ 是一维无界集，如果它与任何开区间的交是可

测的，就称 $E$ 为可测的，它的测度定义为

$$\lim_{a\to\infty} m\{[-a,a]\cap E\},$$

仍以 $mE$ 表示 $E$ 的测度．当 $E$ 可测时，这个极限恒存在，但 $mE$ 可能为有限也可能为无穷大(两种情形均认为极限存在)，这与有界集情形不一样．当 $E$ 为有界可测集时，此限限值与 §2 定义的测度相一致．

无界可测集与有界可测集有完全类似的性质．例如，我们来证明下列命题：

**设 $\{E_k\}$，$k\in\mathbb{N}$ 是可测集列（有界或无界），则它的并集 $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$ 是可测的；又若 $E_k$ 等互不相交，则 $mE=\sum_{k=1}^{\infty}mE_k$．**

**证** 任取开区间 $I$，有

$$E\cap I=\bigcup_{k=1}^{\infty}(E_k\cap I).$$

因 $E_k$ 等可测，故 $E_k\cap I$ 可测且它们都是含于 $I$ 内的有界集．从而据有界可测集的性质，并集 $\bigcup_{k=1}^{\infty}(E_k\cap I)$ 可测．这样，$E$ 是可测的．当 $E_k$ 等互不相交时，可取上面的 $I=I_a=[-a,a]\,(a>0)$，则 $E_k\cap I$ 等也互不相交，据有界可测集的完全可加性，得

$$m(E\cap I_a)=\sum_{k=1}^{\infty}m(E_k\cap I_a),$$

令 $a\to\infty$ 得

$$mE=\sum_{k=1}^{\infty}mE_k.$$

自然，这个等式可能是 $\infty=\infty$ 情形．只有当右边正项级数收敛时，$E$ 才有有限测度．

在这个证明中，我们看到无界可测集的性质是相应的有界可

测集性质的发展，而证明方法也只是多加一道极限手续而已．一些其它的性质也极为类似．由于本质差别不大，故全部略去．

**2．多维空间点集的测度**

对于多维空间中点集，同样可以建立勒贝格测度理论．在处理方法上本质相同，只是在细节上有所差异．多维情形显得复杂些．例如，在一维情形，开集的构造比较简单，可以利用它的结构表示来定义测度．而在二维情形，就要利用第一章的定理 4.2．根据这条定理，平面上有界开集被表成可列个两两无公共内点的半闭正方形的并，$G=\bigcup I_k$．令 $mI_k$ 表示 $I_k$ 的面积，我们定义 $G$ 的测度为所有 $mI_k$ 的和，即

$$mG=\sum mI_k$$

并且可以证明 $G$ 的测度与所述表示法无关．定义了开集测度以后，可以与一维情形类似，逐步引进闭集的测度，任意有界集的外、内测度以及可测集的定义等．无界集情形也可以仿照第 1 段那样处理．读者如有兴趣，可作为练习去做．

**3．不可测集的例**

平常我们所遇到的点集大多是可测集，因而自然要问是否有不可测集存在？这里我们将引进一个不可测集的例，它是依赖于策莫罗选择公理而作出的，其它类型的例子至今未见．正因如此，一直有人不承认不可测集的存在．

考察集的平移变换．设 $h$ 为实数，$E$ 为 $\mathbb{R}$ 的一子集．对于 $x\in E$，令 $T_h$ 为平移变换，$T_h:x\to x+h$，并令

$$T_h:E=\{T_hx:x\in E\},$$

称它为 $E$ 的 $h$ 平移变换．显然，设 $E=(\alpha,\beta)$，则 $T_hE=(\alpha+h,\beta+h)$，因而 $E$ 的 $h$ 平移变换后测度保持不变，$m(T_hE)=mE$．由此可知，当 $E$ 为开集 $G$ 时，亦有 $m(T_hG)=mG$．据外测度的定义容易推出，对于任意点集 $E$，$T_hE$ 的外测度保持不变．从而当 $E$ 可

测时，$T_kE$ 也可测且有 $m(T_kE)=mE$. 这种性质称为勒贝格测度关于平移的不变性. 它在下面的讨论中要用到.

**引理 4.1** **设 $E$ 是一维点集，具有正的测度，数 $\alpha$ 满足 $0<\alpha<1$，那么，存在开区间 $I$，使 $m(E\cap I)>\alpha mI$.**

**证** 据外测度定义，存在一开集 $G\supset E$，使

$$mE>\alpha mG.$$

设 $G$ 的结构表示为 $G=\bigcup_k I_k$，$I_k$ 等为互不相交的开区间，那么必有某个 $I_k$ 可以作为引理中的 $I$. 其实，假设不然，对每个 $k\in\mathbb{N}$，有 $m(E\cap I_k)\leqslant\alpha mI_k$. 则由等式

$$mE=m(E\cap G)=m\{\bigcup_k(E\cap I_k)\}=\sum_k m(E\cap I_k)$$

将推出

$$mE\leqslant\sum_k\alpha mI_k=\alpha mG,$$

这同 $G$ 的取法相矛盾.

**引理 4.2** **设 $E$ 为正测度集，令 $\Delta(E)\{x-y:x,y\in E\}$，则 $\Delta(E)$ 包含一个与原点对称的开区间 $J$.**

**证** 应用引理 4.1，可作出开区间 $I$，使

$$m(E\cap I)>\frac{3}{4}mI.$$

令 $J=(-mI/2,mI/2)$，则 $J$ 符合引理要求.

其实，任取 $z\in J$，用 $A+z=T_zA$ 表示集 $A$ 的 $z$ 平移. 那么有

$$(E\cap I)\cup((E\cap I)+z)\subset I\cup(I+z);$$

注意到 $m(I\cup(I+z))\leqslant mI+|z|<\frac{3}{2}mI$，便有

$$m\{(E\cap I)\cup((E\cap I)+z)\}<\frac{3}{2}mI.$$

我们断言，$E\cap I$ 与 $(E\cap I)+z$ 相交．因若不然的话，将有

$$
\begin{aligned}
& m\{(E\cap I)\cup((E\cap I)+z)\} \\
=& m(E\cap I)+m((E\cap I)+z) \\
=& 2m(E\cap I)>\frac{3}{2}mI,
\end{aligned}
$$

在这里利用了测度的平移不变性．这与上述结果相矛盾．于是可取一点 $x\in(E\cap I)\cap((E\cap I)+z)$． 从而 $x\in E$ 且可写成 $x=y+z$ 的形式，这里 $y\in E$．这样就有

$$z=x-y, \qquad x,y\in E,$$

即 $z\in\Delta(E)$．由于 $z$ 是 $J$ 中任意的点，故 $J\subset\Delta(E)$．

**定理 4.1 一维不可测集是存在的．**

**证** 设 $\mathbb{Q}$ 为有理数集．我们利用 $\mathbb{Q}$ 将 $\mathbb{R}$ 中的点分类，当 $x-y\in\mathbb{Q}$ 时认为 $x$，$y$ 属于同一等价类．这样，$\mathbb{R}$ 被分成等价类，并且每两个不同等价类互不相交．其实，设 $E_x$，$E_y$ 是两个等价类，如果有公共元 $z\in E_x\cap E_y$，则 $x-y=x-z+z-y\in\mathbb{Q}$，于是将有 $x$，$y\in E_y$，即 $E_x$ 与 $E_y$ 一致，矛盾．现在，据第一章定理 5.6，从每个等价类中取一点构成一集 $E$（注意这里应用到策莫罗选择公理）．那么，$E$ 是不可测的．

为了证明 $E$ 的不可测性，首先注意 $\Delta(E)=\{x-y:x,y\in E\}$ 显然包含原点，且除原点外没有其它有理点，因而它不含有对称的开区间．据引理 4.2，若 $E$ 可测的话，将有 $mE=0$．其次，设 $a_1$，$a_2$ 是 $\mathbb{Q}$ 中任意两个不同的点，测集 $E_i=\{x:x=e+a_i,\ e\in E\}$ $(i=1,2)$ 互不相交．因若不然的话，设有 $e_1$，$e_2\in E$ 使 $e_1+a_1=e_2+a_2$，将有 $e_1-e_2=a_2-a_1\in\mathbb{Q}$，从而 $e_1-e_2=0$ 或 $e_1=e_2$．由此推出 $a_1=a_2$，矛盾．另一方面，$\mathbb{R}$ 中任一点 $x$ 必属于这些等价类中之一，因而可写成 $x=e+a$，$e\in E$，$a\in\mathbb{Q}$．因此，若将 $\mathbb{Q}$ 写成 $\{a_n\}$，$E_n=\{x:x=e+a_n,\ e\in E\}$，$n\in\mathbb{N}$，则据测度的平移不变性，

有 $mE_n=mE=0$. 从而注意 $\mathbf{R}=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ 将得出, $m\mathbf{R}=\sum_n mE_n=0$, 这是不可能的. 因而, $E$ 的不可测性得到证明.

由上述等价类的作法,假如由每个等价类中取属于$[0,1)$中一点构成一集 $E$,则 $E$ 是有界不可测的.

## §5. 环与环上定义的测度

从本节开始我们将介绍抽象测度的基本知识. 读者有了$\mathbf{R}$中勒贝格测度的模型, 进一步学习抽象测度是不太困难的. 抽象测度对于进一步学习现代分析是不可缺少的, 它概括了测度的最一般特征,同时能包括种种具体测度作为特例. 现在分三节来讲,本节讲环与环上测度, 以后再讲抽象外测度与可测集以及广义测度的较深入的性质. 对于要求不甚高的读者, 初学时可以略去这一部分而直接进入第三章.

**定义 5.1** 设 $X$ 为基本集,$\mathscr{R}$ 为由 $X$ 的子集所成的非空类. 如果下列条件满足:

(i) 由 $A,B\in\mathscr{R}$ 即有 $A-B\in\mathscr{R}$,

(ii) 由 $A,B\in\mathscr{R}$ 即有 $A\cup B\in\mathscr{R}$,

则 $\mathscr{R}$ 称为集的环或简称为环,如果 (i) 成立,而 (ii) 代之以

(ii′) 由 $A_1, A_2, \cdots\in\mathscr{R}$, 即有 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{R}$, 即对于 $\mathscr{R}$ 有(i),(ii′)成立,则 $\mathscr{R}$ 称为集的 $\sigma$ 环;或简称为 $\sigma$ 环. 若环 $\mathscr{R}$中含有 $X$ 自身, 则称 $\mathscr{R}$ 为代数. 同样, $\sigma$ 代数是指含有 $X$ 的 $\sigma$环.

设 $\mathscr{E}$是 $X$ 中子集的类, 包含类 $\mathscr{E}$的一切环的交记为 $\mathscr{R}(\mathscr{E})$, 它是包含 $\mathscr{E}$ 的最小环,称为由 $\mathscr{E}$产生的环. 由 $\mathscr{E}$产生的 $\sigma$ 环可类似地定义.

**例1** $[0,1]$ 中的一切可测集构成环，也是 $\sigma$ 环，并且还是代数，$\sigma$ 代数. $[0,1]$ 中的一切开集不是环，因为 (i) 不成立.

**例2** $X$ 中一切子集所成的类是 $\sigma$ 环也是 $\sigma$ 代数. 因而包含类 $\mathscr{E}$ 的环是存在的，故定义中所述的 $\mathscr{R}(\mathscr{E})$ 有意义.

**例3** 为了给出 $\mathbb{R}$ 中常见的环的例子，考察任意半闭区间，$[\alpha,\beta)$，这里 $-\infty<\alpha<\beta<\infty$. 任何两个半闭区间的差可能是空集 $\varnothing$，也可能是两个互不相交的半闭区间的并：

$$[\alpha_1,\beta_1)\cup[\alpha_2,\beta_2),\ \beta_1<\alpha_2.$$

这已不是一个简单的半闭区间了. 但这种新的集的差与并至多是有限个半闭区间的并. 由此可以看出，$\mathbb{R}$ 的子类

$$\{\bigcup_{i=1}^{n}[\alpha_i,\beta_i):\alpha_i,\beta_i\in\mathbb{R},n\in\mathbb{N}\}$$

满足环的条件 (i) 与 (ii)，因而构成一个环.

为了看出最小环的某种特性，我们证明

**定理 5.1** **由类 $\mathscr{E}$ 产生的环 $\mathscr{R}(\mathscr{E})$ 中每个元均含于 $\mathscr{E}$ 的某有限个元的并中；由 $\mathscr{E}$ 产生的 $\sigma$ 环 $\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$ 中每个元均含于 $\mathscr{E}$ 的某可列个元的并中.**

**证** 只证定理的前半部分，后半部分完全类似. 考察类

$$\mathscr{S}=\{A:A\subset X,\text{存在}E_1,\cdots,E_n\in\mathscr{E},n\in\mathbb{N},\text{使}A\subset\bigcup_{k=1}^{n}E_k\},$$

就是说，$\mathscr{S}$ 是 $\mathscr{E}$ 中任意有限个元的并的子集所成的类. 我们证明 $\mathscr{S}$ 为环.

其实，设 $A_1$，$A_2\in\mathscr{S}$，那么有 $A_1\subset\bigcup_{k=1}^{n}E_k^{(1)}$，$A_2\subset\bigcup_{j=1}^{m}E_j^{(2)}$，其中 $E_k^{(1)},E_j^{(2)}\in\mathscr{E}$，$k=1,\cdots,n$，$j=1,\cdots,m$. 故

$$A_1\cup A_2\subset\left(\bigcup_{k=1}^{n}E_k^{(1)}\right)\cup\left(\bigcup_{j=1}^{m}E_j^{(2)}\right),\ A_1-A_2\subset\bigcup_{k=1}^{n}E_k^{(1)},$$

这表明，$A_1\cup A_2$, $A_1-A_2$ 均属于 $\mathscr{S}$，即 $\mathscr{S}$ 为环，且 $\mathscr{S}$ 显然包含类 $\mathscr{E}$ 自身．既然 $\mathscr{R}(\mathscr{E})$ 为包含 $\mathscr{E}$ 的最小环，故 $\mathscr{R}(\mathscr{E})\subset\mathscr{S}$，定理得证．

在 §3 定理 3.6 中，我们已讲过渐张序列与渐缩序列概念，现在引进单调类的定义．

**定义 5.2** 设 $\mathscr{M}$ 为 $X$ 的子集所成的类．若其中渐张序列的并与渐缩序列的交均属于 $\mathscr{M}$，则称 $\mathscr{M}$ 为单调类．

我们已经知道，$(a, b)$ 中的可测集类是单调类(定理 3.6)．一般地，每个 $\sigma$ 环都是单调类（注意关系 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n=A_1-\bigcup\limits_{n=2}^{\infty}(A_1-A_n)$．另一方面，一个环如果是单调类，也一定是 $\sigma$ 环．这些简单结论很容易从定义推出来．

与环的情形类似，称包含类 $\mathscr{E}$ 的最小单调类为由 $\mathscr{E}$ 产生的单调类，并记成 $\mathscr{M}(\mathscr{E})$．

**定理 5.2 设 $\mathscr{E}$ 为集 $X$ 的子集所成的环，则由 $\mathscr{E}$ 产生的单调类 $\mathscr{M}(\mathscr{E})$ 与由 $\mathscr{E}$ 产生的 $\sigma$ 环 $\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$ 相等，$\mathscr{M}(\mathscr{E})=\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$．**

**证** 因 $\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$ 是 $\sigma$ 环，它是单调类，$\mathscr{M}(\mathscr{E})$ 是最小单调类，故有 $\mathscr{M}(\mathscr{E})\subset=\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$．

另一方面，为证相反的包括式，只须证明 $\mathscr{M}=\mathscr{M}(\mathscr{E})$ 为 $\sigma$ 环即可．为此，作类

$$\mathscr{K}(A)=\{B: A-B, B-A, A\cup B\in\mathscr{M}\}.$$

那么，若 $B\in\mathscr{K}(A)$，则 $A\in\mathscr{K}(B)$．并且，若 $A\in\mathscr{E}$，则 $\mathscr{K}(A)\supset\mathscr{E}$．这是因为，对于任何 $B\in\mathscr{E}$，因 $\mathscr{E}$ 为环，$A-B$, $B-A$, $A\cup B$ 均属于 $\mathscr{E}$，从而均属于 $\mathscr{M}$，故 $B\in\mathscr{K}(A)$．因此 $\mathscr{K}(A)\supset\mathscr{E}$．

不难证明 $\mathscr{K}(A)$ 是单调类．例如，限于考察 $\mathscr{K}(A)$ 中渐张序列 $\{B_n\}$, $n\in\mathbb{N}$ 的情形，令 $B=\bigcup\limits_{n}B_n$．由于

$$A-B_n,\ B_n-A,\ B_n\cup A\in\mathscr{M},\ n\in\mathbb{N},$$

且它们都是单调列(第一个为渐缩列，其余为渐张列)，从而据 $\mathscr{M}$ 为

单调类，$A-B=\bigcap_n(A-B_n)$，$B-A=\bigcup_n(B_n-A)$，$B\cup A=\bigcup_n(B_n\cup A)$均属于$\mathscr{M}$. 这就表明$B\in\mathscr{K}(A)$. 故$\mathscr{K}(A)$为单调类得证。

这样，当$A\in\mathscr{E}$时，作为包含$\mathscr{E}$的单调类$\mathscr{K}(A)$，应有

$$\mathscr{K}(A)\supset\mathscr{M}$$

最后，我们证明$\mathscr{M}$为$\sigma$环. 设$A,B\in\mathscr{M}$. 任取$C\in\mathscr{E}$. 由上面所证，$\mathscr{K}(C)\supset\mathscr{M}$，从而$A\in\mathscr{K}(C)$，故$C\in\mathscr{K}(A)$，因$C$是$\mathscr{E}$中任意元，知$\mathscr{E}\subset\mathscr{K}(A)$．作为包含$\mathscr{E}$的单调类$\mathscr{K}(A)$，应有$\mathscr{K}(A)\supset\mathscr{M}$. 这样，$B\in\mathscr{K}(A)$，即$A-B$，$B-A$，$A\cup B$均属于$\mathscr{M}$. 这表明$\mathscr{M}$为环. 前面已经指出过，一个环如果是单调类必是$\sigma$环，因而$\mathscr{M}$为$\sigma$环. 定理得证.

**推论** 设$\mathscr{E}$为环，$\mathscr{M}$为单调类，$\mathscr{M}\supset\mathscr{E}$，则$\mathscr{M}\supset\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$.

**证** 据定理5.2，因$\mathscr{M}$为包含$\mathscr{E}$的单调类，应包含$\mathscr{M}(\mathscr{E})=\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$.

在第一章§2已讲了映射概念. 这里将考察一种特殊的映射——集函数与有关概念.

**定义 5.3** 设$X$为基本集，$\mathscr{R}$为$X$的子集的类. 称定义在$\mathscr{R}$上取值为实数或无穷大的广义实函数$\mu$为集函数. 若对每个$E\in\mathscr{R}$，$\mu E\geqslant0$，称$\mu$为非负的；若$\mu E\neq\pm\infty(E\in\mathscr{R})$，称$\mu$为有限的；若对$\mathscr{R}$中互不相交的序列$\{E_n\}$，$n\in\mathbb{N}$，其并$\bigcup_n E_n\in\mathscr{R}$，恒有

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu E_n,$$

称$\mu$为$\sigma$可加的或完全可加的. 对我们来说，最重要的是当$\mathscr{R}$为环或$\sigma$环的情形. 这时，若$\mathscr{R}$上定义的集函数$\mu$满足

(i) $\mu$是非负的；

(ii) $\mu$是$\sigma$可加的；

(iii) $\mu\varnothing=0$;

则称 $\mu$ 为环(或 $\sigma$ 环) $\mathscr{R}$ 上的测度. 如果集函数 $\mu$ 满足条件 (ii)、(iii), 而 (i) 未必满足, 则称 $\mu$ 为广义测度.

**例 4** 设 $\mathscr{R}$ 是由整数集的一切子集所成的 $\sigma$ 环. 对 $E\in\mathscr{R}$, 若 $E$ 为有限集, 它的元的个数为 $n$, 则令 $\mu E=n$; 若 $E$ 为无限集, 令 $\mu E=\infty$; 再规定 $\mu\varnothing=0$. 容易验明 (i)—(iii) 成立, 故 $\mu$ 为测度.

前面讨论过的 $\mathbb{R}^n$ 中勒贝格测度也是测度的例子; 当基本集为有界时, 测度是有限的.

关于测度的基本性质在叙述与证明方面都与以前的勒贝格测度情形相似, 但要注意一个重要差别: 即当证明结果时, 往往直接从条件 (i)—(iii) 出发, 而不是象以前那样先证明较为简单的结论.

**定理 5.3** 设 $\mu$ 是 $\sigma$ 环 $\mathscr{R}$ 上的测度, 则有下列性质:

(i) **单调性**. 设 $E_1, E_2\in\mathscr{R}$, $E_1\subset E_2$, 则 $\mu E_1\leqslant\mu E_2$.

(ii) **半可加性**. 设 $E_n\in\mathscr{R}$, $n\in\mathbb{N}$, 则 $\mu(\bigcup\limits_n E_n)\leqslant\sum\limits_n\mu E_n$. 从而推出, 若 $E\in\mathscr{R}$, $E\subset\bigcup\limits_n E_n$, 则 $\mu E\leqslant\sum\limits_n\mu E_n$.

(iii) 对于 $\mathscr{R}$ 中渐张序列 $\{E_n\}$, $n\in\mathbb{N}$, 有 $\mu(\bigcup\limits_n E_n)=\lim\limits_n\mu E_n$; 对于渐缩序列 $\{E_n\}$, $n\in\mathbb{N}$, 若 $\mu E_1<\infty$, 则有 $\mu(\bigcap\limits_n E_n)=\lim\limits_n\mu E_n$.

我们不去给出详细的证明, 只作几点注记. 单调性由有限可加性推出 (参看定理 3.3), 半可加性由 $\sigma$ 可加性与单调性推出 (参看定理 3.4 证明中 (2) 式). 至于 (iii) 的前半部分, 可依下列办法利用 $\sigma$ 可加性得出:

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\Big)=\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}(E_k-E_{k-1})\Big)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(E_k-E_{k-1})$$

$$=\lim_n \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k-E_{k-1})=\lim_n \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n}(E_k-E_{k-1})\right)$$

$$=\lim_n \mu E_n,$$

其中约定 $E_0=\varnothing$，并且避免利用等式 $\mu(E_k-E_{k-1})=\mu E_k-\mu E_{k-1}$ 所引起的 $\infty-\infty$ 问题。

至于 (iii) 的后半部分，我们应先指出交集 $\bigcap_n E_n \in \mathscr{R}$. 对每个 $n\in\mathbb{N}$，$E_1-E_n\in\mathscr{R}$，从而 $\bigcup_n (E_1-E_n)\in\mathscr{R}$。由等式 $\bigcap_n E_n=E_1-\bigcup_n (E_1-E_n)$

知 $\bigcap_n E_n\in\mathscr{R}$. 对渐张序列 $\{E_1-E_n\}$，$n\in\mathbb{N}$，应用 (iii) 的前半部分结论，即可证明所需结果(参看定理 3.6(ii)的证明).

## §6. σ环上外测度·可测集·测度的扩张

上一节我们初步讨论了环上的测度. 本节将继续讨论 σ 环上外测度及其性质，由此引出可测集概念并考察环上测度的扩张问题. 最后给出几个具体例子.

**定义 6.1** 设 $X$ 为基本集，$\mathscr{R}_\sigma$ 为由 $X$ 的子集所成的 σ 环，$\lambda$ 为定义在 $\mathscr{R}_\sigma$ 上的集函数. 如果下列三条件满足：

(i) $\lambda E\geqslant 0$ $(E\in\mathscr{R}_\sigma)$ $\lambda\varnothing=0$;

(ii) $\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\lambda E_n (E_n\in\mathscr{R}_\sigma)$;

(iii) 若 $E_1\subset E_2$，则 $\lambda E_1\leqslant\lambda E_2$ $(E_1, E_2\in\mathscr{R}_\sigma)$；则称 $\lambda$ 为 $\mathscr{R}_\sigma$ 上的外测度. 特别当 $\mathscr{R}_\sigma$ 为由 $X$ 的一切子集所成的 σ 环时，称 $\lambda$ 为 $X$ 上的外测度.

我们看出，这种抽象外测度是勒贝格外测度的推广. 由 §5 定理 5.1 知道，由类 $\mathscr{E}$ 产生的 σ 环 $\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$ 中每个元都含在 $\mathscr{E}$ 的某

可列个元的并中. 这使我们联想到，是否能从环上的一个测度 $\mu$ 出发，引进适当的外测度？这同由开集测度引进勒贝格外测度的想法类似. 虽然所有开集的类并不构成一个环.

设 $\mathscr{E}$ 是由 $X$ 的子集所成的环，$\mu$ 为 $\mathscr{E}$ 上的测度. 考察类

$$\mathscr{S}(\mathscr{E})=\{E:E\subset X, E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n, A_n\in\mathscr{E}\},$$

从定理 5.1 的证明中，知道 $\mathscr{S}(\mathscr{E})$ 是 $\sigma$ 环. 并且还容易看出，当 $\mathscr{S}(\mathscr{E})$ 是 $\sigma$ 代数时，它必是由 $X$ 的一切子集所构成的类. 现在对于每个 $E\in\mathscr{S}(\mathscr{E})$，令

$$\mu^*E=\inf\sum_{n=1}^{\infty}\mu A_n, \tag{1}$$

这里下确界取遍 $\mathscr{E}$ 中一切这样的序列 $A_n$: $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\supset E$. 那么 $\mu^*$ 是 $\sigma$ 环 $\mathscr{S}(\mathscr{E})$ 上的一个外测度，称为由 $\mu$ 导出的外测度. 其实，$\mu^*E\geqslant 0(E\in\mathscr{S}(\mathscr{E}))$ 是显然的，且由 $\mu\varnothing=0$ 显然有 $\mu^*\varnothing=0$. 这样，条件 (i) 成立. 据下确界定义，(iii) 也明显. 剩下来只须验证条件 (ii). 如果对于某个 $n\in\mathbb{N}$ 有 $\mu^*E_n=\infty$，则不须证明. 现设 $\mu^*E_n<\infty, n\in\mathbb{N}$，任取 $\varepsilon>0$. 于是对每个 $k\in\mathbb{N}$，可取序列 $A_n^{(k)}\in\mathscr{E}, n\in\mathbb{N}$，使 $E_k\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n^{(k)}$，且 $\sum_{n=1}^{\infty}\mu A_n^{(k)}<\mu^*E_k+\varepsilon/2^k$. 从而有

$$\bigcup_{n,k=1}^{\infty}A_n^{(k)}\supset\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k=E$$

且
$$\mu^*E\leqslant\sum_{n,k=1}^{\infty}\mu A_n^{(k)}<\sum_{k=1}^{\infty}(\mu^*E_k+\varepsilon/2^k)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu^*E_k+\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to 0$ 得 $\mu^*E\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\mu^*E_k$，即 $\mu^*$ 具有半可加性. (ii) 得证.

$\mu^*$ 不仅是 $\mathscr{S}(\mathscr{E})$ 上的外测度，而且是 $\mathscr{E}$ 上测度 $\mu$ 的扩张. 就是说，我们有

**引理 6.1** 由 (1) 定义的集函数 $\mu^*$ 满足条件：当 $E\in\mathscr{E}$ 时，$\mu^*E=\mu E$.

**证** 设 $E\in\mathscr{E}$，显然有 $\mu^*E\leqslant\mu E$. 另一方面，设 $A_n\in\mathscr{E}$，$n\in\mathbb{N}$，满足 $E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$. 令 $B_1=A_1$, $B_2=A_2-A_1$, $B_3=A_3-A_1-A_2$, …，则注意到 $\bigcup_n A_n=\bigcup_n B_n$，由 $\mu$ 的 $\sigma$ 可加性，有

$$\mu E=\mu(E\cap(\bigcup_n A_n))=\mu\Big(E\cap(\bigcup_n B_n)\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E\cap B_n),$$

从而据测度的单调性与 $\sigma$ 可加性，得

$$\mu E\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu B_n\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu A_n,$$

取下确界便得 $\mu E\leqslant\inf\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu A_n\}=\mu^*E$. 这样，我们证明了 $\mu E=\mu^*E(E\in\mathscr{E})$.

有了外测度 $\mu^*$ 之后，我们可以直接借用它来定义可测性概念（不用内测度，参看 §3 定理 3.6）. 现在就引进下面一般的

**定义 6.2** 设 $\lambda$ 为 $\sigma$ 环 $\mathscr{R}_\sigma$ 上的外测度. 称 $E\in\mathscr{R}_\sigma$ 为 $\lambda$ 可测的，如果对一切 $A\in\mathscr{R}_\sigma$，有

$$\lambda A=\lambda(A\cap E)+\lambda(A-E). \tag{1}$$

我们对上述等式作一点解释. 可测集 $E$ 有这样一种规则分布，能将任意集 $A$ 分成互不相交的两部分 $A\cap E$ 与 $A-E$，使关于这种分解，可加性对 $\lambda$ 是成立的.

现在把一切 $\lambda$ 可测集记成 $\mathscr{M}$. 关于它的结构，可以断言，$\mathscr{M}$ 是一个 $\sigma$ 环，并且限制在 $\mathscr{M}$ 上，$\lambda$ 成为测度. 为了证明，先建立下列引理.

**引理 6.2** 设 $\lambda$ 是 $\sigma$ 环 $\mathscr{R}_\sigma$ 上的外测度，则由 $\lambda$ 引出的一切 $\lambda$ 可测集（参看(1)）$\mathscr{M}$ 构成一个环.

**证** 设 $E, F\in\mathscr{M}$, 我们要证 $E\cup F\in\mathscr{M}$, $E-F\in\mathscr{M}$, 即要证对任何 $A\in\mathscr{R}_\sigma$ 有

$$\lambda A=\lambda(A\cap(E\cup F))+\lambda(A-(E\cup F)) \tag{2}$$

与

$$\lambda A=\lambda(A\cap(E-F))+\lambda(A-(E-F)) \tag{3}$$

成立. 为此我们将 $A$ 分解为互不相交的并(见图 8):

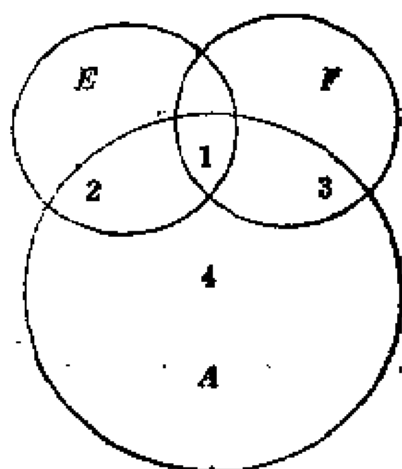



图 8. 引理 6.2 证明示意

$$A=A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4,$$

其中

$$A_1=A\cap(E\cap F),$$
$$A_2=A\cap(E-F),$$
$$A_3=A\cap(F-E),$$
$$A_4=A-(E\cup F).$$

那么, 因 $E$ 为 $\lambda$ 可测, 依次取(1)中二集 $A$, $E$ 为这里的 $A, E$, $A_1\cup A_2\cup A_3$, $E$ 与 $A_1\cup A_3\cup A_4$, $E$, 可得

$$\lambda A=\lambda(A_1\cup A_2)+\lambda(A_3\cup A_4), \tag{4}$$

$$\lambda(A_1\cup A_2\cup A_3)=\lambda(A_1\cup A_2)+\lambda A_3, \tag{5}$$

$$\lambda(A_1\cup A_3\cup A_4)=\lambda A_1+\lambda(A_3\cup A_4). \tag{6}$$

又因 $F$ 为 $\lambda$ 可测, 依次令(1)中二集, $E$, $A$ 为 $F$, $A_1\cup A_2$ 与 $F$, $A_3\cup A_4$, 得

$$\lambda(A_1\cup A_2)=\lambda A_1+\lambda A_2, \tag{7}$$

$$\lambda(A_3\cup A_4)=\lambda A_3+\lambda A_4. \tag{8}$$

联合(4), (8), (5)得

$$\lambda A=\lambda(A_1\cup A_2\cup A_3)+\lambda A_4,$$

这就是(2). 联合(4), (7), (6)得

$$\lambda A=\lambda A_2+\lambda(A_1\cup A_3\cup A_4),$$

这就是(3).

于是$\mathscr{M}$关于差与有限并运算是封闭的，因而构成一个环．引理得证．

**定理 6.1　设$\lambda$是$\sigma$环$\mathscr{R}_\sigma$上的外测度，$\mathscr{M}$是一切$\lambda$可测集的类．**则有

(i) **$\mathscr{M}$为$\sigma$环，**

(ii) **设$\{E_n\}$, $n\in\mathbb{N}$为$\mathscr{M}$中互不相交的序列，它的并是$E$．则对任何$A\in\mathscr{R}_\sigma$有**

$$\lambda(A\cap E)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(A\cap E_n).$$

(iii) **$\lambda$限制于$\mathscr{M}$上为测度．**

**证**　(i) 引理中已证明$\mathscr{M}$为环，因而只须证明，当$E_n\in\mathscr{M}$, $n\in\mathbb{N}$时，有$E=\bigcup E_n\in\mathscr{M}$．不妨设$E_n$等互不相交．根据外测度的半可加性，有

$$\lambda A\leqslant\lambda(A\cap E)+\lambda(A\cup\mathscr{C}E). \tag{1}$$

下面证明相反的不等式成立．

因$E_1$可测，$E_1\cap E_2=\varnothing$，取定义 6.2 (1) 中的$A, E$分别为$A\cap(E_1\cup E_2)$, $E_1$得

$$\begin{aligned}&\lambda(A\cap(E_1\cup E_2))\\&=\lambda(A\cap(E_1\cup E_2)\cap E_1)+\lambda(A\cap(E_1\cup E_2)\cap\mathscr{C}E_1)\\&=\lambda(A\cap E_1)+\lambda(A\cap E_2),\end{aligned}$$

因而根据有限归纳法，

$$\begin{aligned}&\lambda(A\cap(E_1\cup\cdots\cup E_n))\\&=(A\cap E_1)+\lambda(A\cap E_2)+\cdots+\lambda(A\cap E_n),\end{aligned} \tag{2}$$

令$F_n=\bigcup_{k=1}^{n}E_k$，那么$F_n\in\mathscr{M}$，取定义 6.2(1)中的$A, E$为$A, F_n$并注意到$\lambda$的单调性，可得

$$\lambda A=\lambda(A\cap F_n)+\lambda(A\cap\mathscr{C}F_n)$$

$$\geqslant \lambda(A\cap F_n)+\lambda(A\cap \mathscr{C}E), \tag{3}$$

利用(2)，由上式得

$$\lambda A\geqslant \sum_{k=1}^{n}\lambda(A\cap E_k)+\lambda(A\cap \mathscr{C}E).$$

令 $n\to\infty$，上式给出

$$\lambda A\geqslant \sum_{k=1}^{\infty}\lambda(A\cap E_k)+\lambda(A\cap \mathscr{C}E). \tag{4}$$

再根据 $\lambda$ 的半可加性，$\lambda(A\cap E)\leqslant\sum_k\lambda(A\cap E_k)$，故

$$\lambda A\geqslant \lambda(A\cap E)+\lambda(A\cap \mathscr{C}E), \tag{5}$$

(1)与(5)一起便表明不等式中应成立等号．这样，$E$ 是 $\lambda$ 可测的，(i)得证．

(ii) 根据 $\lambda$ 的半可加性与 $E$ 的可测性，可得

$$\lambda E\geqslant \sum_{k=1}^{\infty}\lambda(A\cap E_k)+\lambda(A\cap \mathscr{C}E)$$
$$\geqslant \lambda(A\cap E)+\lambda(A\cap \mathscr{C}E)=\lambda A,$$

即，

$$\lambda A=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(A\cap E_k)+\lambda(A\cap \mathscr{C}E). \tag{6}$$

在上式中用 $A\cap E$ 代替 $A$，给出

$$\lambda(A\cap E)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(A\cap E_k)$$

(iii) 在(6)中取 $A=E$ 得

$$\lambda E=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda E_k.$$

这表明 $\lambda$ 限制在 $\mathscr{M}$ 上满足 $\sigma$ 可加性，因而 $\lambda$ 确为 $\sigma$ 环 $\mathscr{M}$ 上的测度．定理证完．

**定义 6.3** 设在环 $\mathscr{E}$ 上给定一个测度 $\mu$，而 $\mathscr{R}_\sigma$ 为包含 $\mathscr{E}$ 的任一 $\sigma$ 环．若存在 $\mathscr{R}_\sigma$ 上的测度 $\bar{\mu}$，使对每个 $A\in\mathscr{E}$ 有 $\bar{\mu}A=$

$\mu A$，则称 $\tilde{\mu}$ 为 $\mu$ 到 $\mathscr{R}_\sigma$ 上的一个扩张．

对于环 $\mathscr{E}$ 上的测度 $\mu$，我们希望在更广的集类上定义一个测度，至少要将 $\mu$ 扩张到由 $\mathscr{E}$ 产生的 $\sigma$ 环 $\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$ 上．一种办法是这样：对任意元 $A\in\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$，据定理 5.1，存在集列 $A_n\in\mathscr{E}$，$n\in\mathbb{N}$，使 $A\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$．这时，由于每个 $\mu A_n$ 有意义，人们自然想到用下确界

$$\inf\sum_{n=1}^{\infty}\mu A_n \quad (\bigcup_n A_n\supset A,\ A_n\in\mathscr{E},\ n\in\mathbb{N})$$

作为 $A$ 的一种"测度"．可是，这种"测度"的定义域扩大了，它不限定于 $\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$ 上，而可能超出 $\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$ 之外．这时所述"测度"在它的实际定义域上将只是外测度而未必是测度（$\sigma$ 可加性一般不成立！）．因此必须缩小它的实际定义域而回到一个子类 $\mathscr{M}$ 上来，使它限制在 $\mathscr{M}$ 上真正成为一种测度．上面已证明（定理 6.1），这样的子类 $\mathscr{M}$ 是存在的，且 $\mathscr{M}$ 仍是 $\sigma$ 环．下面还要进一步证明（定理 6.2），$\mathscr{M}\supset\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$．而且还将看到，这种扩张在一定假设下还是唯一的（定理 6.3）．

**定理 6.2** 设 $\mu$ 为环 $\mathscr{E}$ 上的测度，$\mathscr{M}$ 为 $\mu^*$ 可测集类（参看定义 6.2 的(1)）．**则关系式 $\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})\subset\mathscr{M}$ 成立，并且 $\mu^*$ 在 $\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$ 上的限制是 $\mu$ 的扩张．**

**证** 第一步．我们证明 $\mathscr{E}\subset\mathscr{M}$．

设 $E\in\mathscr{E}$，$A\in\mathscr{H}(\mathscr{E})$，$\varepsilon$ 是任意指定的正数．注意到 $\mu^*$ 的半可加性，有

$$\mu^*A\leqslant\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap\mathscr{C}E),$$

因而一旦证明了对任意的 $\varepsilon>0$ 有

$$\mu^*A+\varepsilon\geqslant\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E),$$

即有 $E\in\mathscr{M}$．当 $\mu^*A=\infty$ 时这个不等式显然正确；现设 $\mu^*A<\infty$．

于是据外测度 $\mu^*$ 的定义，$\mathscr{E}$ 中存在集列 $A_n, n\in\mathbb{N}$，满足

$A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\mu A_n\leqslant\mu^*A+\varepsilon$. 由于 $A\cap E\subset\bigcup_n(A_n\cap E)$，故

$$\mu^*(A\cap E)\leqslant\sum_n\mu(A_n\cap E),$$

同理，

$$\mu^*(A\cap\mathscr{C}E)\leqslant\sum_n\mu(A_n\cap\mathscr{C}E).$$

利用 $\mu$ 在 $\mathscr{E}$ 上的可加性，

$$\mu A_n=\mu(A_n\cap E)+\mu(A_n\cap\mathscr{C}E),$$

因而得，

$$\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap\mathscr{C}E)\leqslant\sum_n\mu A_n\leqslant\mu^*A+\varepsilon.$$

第二步，既然 $\mathscr{E}\subset\mathscr{M}$，而据定理 6.1，$\mathscr{M}$ 是 $\sigma$ 环，故作为包含 $\mathscr{E}$ 的最小 $\sigma$ 环 $\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$，应有 $\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})\subset\mathscr{M}$. 这样，定理中的包括式已经得到. 至于 $\mu^*$ 在 $\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$ 上的限制是 $\mu$ 的扩张，我们在引理6.1 的证明中已证实过了.

**定义 6.4** 设 $\mathscr{R}$ 是环，$\mu$ 是 $\mathscr{R}$ 上测度. 若对任何 $A\in\mathscr{R}$，存在集列 $A_1, A_2, \cdots\in\mathscr{R}$，使 $A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ 且 $\mu A_n<\infty$, $n\in\mathbb{N}$，则称 $\mu$ 为 $\sigma$ 有限的.

**定理 6.3** **设 $\mathscr{E}$ 为环，$\mu_1, \mu_2$ 为由 $\mathscr{E}$ 产生的 $\sigma$ 环 $\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$ 上的测度，满足 $\mu_1(A)=\mu_2(A)$（对每个 $A\in\mathscr{E}$），并假定 $\mu_1$，$\mu_2$ 限制在环 $\mathscr{E}$ 上均是 $\sigma$ 有限的. 那么，在 $\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$ 上有 $\mu_1=\mu_2$. 即，环 $\mathscr{E}$ 上测度到 $\sigma$ 环 $\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$ 上的扩张是唯一的**（假定测度在 $\mathscr{E}$ 上是 $\sigma$ 有限的）.

证 第一步. 考察 $\mu_1, \mu_2$ 为 $\mathscr{R}_\sigma=\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$ 上有限测度的情形.

这时，设 $\mathscr{A}$ 表示 $\mathscr{R}_\sigma$ 中一切满足 $\mu_1A=\mu_2A$ 的元 $A$ 的类. 那么有

$$\mathscr{E}\subset\mathscr{A}\subset\mathscr{R}_{\sigma}.$$

设 $\mathscr{M}$ 为任一单调类，且 $\mathscr{E}\subset\mathscr{M}$. 据定理5.2，由 $\mathscr{E}$ 产生的单调类与由 $\mathscr{E}$ 产生的 $\sigma$ 环相等，而 $\mathscr{M}$ 为包含 $\mathscr{E}$ 的单调类，故有 $\mathscr{R}_{\sigma}\subset\mathscr{M}$. 因此为了证明 $\mathscr{R}_{\sigma}\subset\mathscr{A}$，只须证明 $\mathscr{A}$ 为单调类即可.

设 $\{A_n\}$, $n\in\mathbb{N}$ 为 $\mathscr{A}$ 中渐张列，$A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$. 那么由测度的定义可知

$$\mu_i(A)\lim_n\mu_i(A_n),\quad i=1,2.$$

但因 $A_n\in\mathscr{A}$, $n\in\mathbb{N}$, 故 $\mu_1A_n=\mu_2A_n$, 从而

$$\mu_1A=\lim_n\mu_1A_n=\lim_n\mu_2A_n=\mu_2A.$$

于是 $A\in\mathscr{A}$. 再设 $\{A_n\}$, $n\in\mathbb{N}$ 为 $\mathscr{A}$ 中渐缩列，$A=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$. 由于

$$\mu_iA\leqslant\mu_iA_n\leqslant\mu_iA_1<\infty,\ n\in\mathbb{N},\quad i=1,2,$$

故 $\{A_1-A_n\}$, $n\in\mathbb{N}$ 为渐张列，且 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(A_1-A_n)=A_1-A$. 于是应用已证结果得

$$\mu_1(A_1-A)=\mu_2(A_1-A)\ 或\ \mu_1A_1-\mu_1A=\mu_2A_1-\mu_2A;$$

从而得 $\mu_1A=\mu_2A$. 这表明 $A\in\mathscr{A}$，即 $\mathscr{A}$ 为单调类.

第二步．考察一般情形．设 $A\in\mathscr{R}_{\sigma}$，我们证明 $\mu_1A=\mu_2A$.

由于假设 $\mu_1$, $\mu_2$ 限制在 $\mathscr{E}$ 上是 $\sigma$ 有限的，故存在 $\mathscr{E}$ 中的集列 $\{A_n\}$, $n\in\mathbb{N}$, 使 $A\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$, $\mu_iA_n<\infty$, $n\in\mathbb{N}$, $i=1,2$. 同时还可以假定 $A_n$ 为渐张列(可用 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 代替 $A_n$, $n\in\mathbb{N}$)，显然，$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(A_n\cap A)=A$, 故

$$\lim_n\mu_i(A_n\cap A)=\mu_iA,\quad i=1,2,\tag{1}$$

如能证明

$$\mu_1(A_n\cap A)=\mu_2(A_n\cap A),\quad n\in\mathbb{N},\tag{2}$$

则由(1)式得

$$\mu_1 A=\lim_n \mu_1(A_n\cap A)=\lim_n \mu_2(A_n\cap A)=\mu_2 A,$$

即定理得证．下面来证明(2)．据测度的单调性，知

$$\mu_i(A_n\cap A)\leqslant\mu_i A_n<\infty,\ n\in\mathbb{N},\ i=1,2.$$

且易见对每个 $n$，$\mu_i(A_n\cap A)\equiv\mu_{i,n}A$ 为 $\mathscr{R}_\sigma$ 上的有限测度．故对 $\mu_{i,n}$ 应用第一步已证结果，即得 $\mu_{1,n}A=\mu_{2,n}A$ 或(2)成立．定理证完．

我们简要地举几个典型例子，借以说明一般理论中的某些概念与应用．

**例1** 勒贝格测度．

基本集为 $X=\mathbb{R}$，半闭区间 $[\alpha,\beta)$ 的测度为 $\beta-\alpha$．$\mathscr{R}$ 为由一切半闭区间所产生的环，即 $\mathscr{R}$ 由一切形如 $E=\bigcup_{i=1}^{n}[\alpha_i,\beta_i)$ 的集所成的类，其中半闭区间 $[\alpha_i,\beta_i)$ 等互不相交．$E$ 的测度定义为 $mE=\sum_{i=1}^{n}(\beta_i-\alpha_i)$．可以证明，$X$ 中的子集的外测度 $m^*$ 与 §2 中所讲的相一致．一切 $m^*$ 可测集类 $\mathscr{M}$ 称为勒贝格可测集类，$m^*$ 限制在 $\mathscr{M}$ 上即为勒贝格测度．

一般地，设 $X$ 是任意基本集，$\mathscr{E}$ 为由 $X$ 的子集所成的环，由 $\mathscr{E}$ 所产生的 $\sigma$ 环 $\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$ 常称为 $X$ 中的波雷尔集类．当 $X=\mathbb{R}$ 而 $\mathscr{E}$ 为上面的环 $\mathscr{R}$ 时，$\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$ 与 §3 所讲的波雷尔集类相一致。这时由于已知波雷尔集是可测的，因而当 $\mathscr{E}=\mathscr{R}$ 时有

$$\mathscr{E}\subset\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})\subset\mathscr{M}.$$

如果不是由上面的环 $\mathscr{E}=\mathscr{R}$ 出发，而是由 $\mathbb{R}$ 中开集所成的类 $\mathscr{U}$ 出发，则可证明，$\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{U})$ 与 $\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$ 相一致．据定理 3.6 可

知，若从波雷尔集出发，我们也可以定义出勒贝格可测集，因为每个勒贝格可测集与某个波雷尔集仅相差一个零测度集.

**例 2** 设基本集为 $X=\mathbb{R}^n$.

取 $\mathscr{E}$ 为形如 $I=[\alpha_1,\beta_1;\cdots;\alpha_n,\beta_n)$ 的半闭方体的有限并与 $\varnothing$ 所成的环，令 $m\varnothing=0$, $mI=\prod_{i=1}^{n}(\beta_i-\alpha_i)$，则 $m$ 为 $\mathscr{E}$ 上的测度(利用有限可加性将 $m$ 扩充定义到 $\mathscr{E}$ 上). 再将 $m$ 扩充到 $\sigma$ 环 $\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{E})$ 上所得一切可测集即为 $\mathbb{R}^n$ 中的波雷尔集类. 同样，可由 $m$ 引出外测度 $m^*$，一切 $m^*$ 可测集类即为勒贝格可测集类. 对 $\mathbb{R}$ 情形的说明可以转移到这一情形来.

**例 3** 设基本集 $X=\mathbb{R}$, $\mu(x)$ 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的实的增函数，且为右连续的.

取 $E$ 为例 1 中的环. 对于区间 $I=[\alpha,\beta)$ 定义它的测度为 $mI=\mu(\beta-0)-\mu(\alpha-0)$，一点 $\alpha$ 的测度定义为 $m\{\alpha\}=\mu(\alpha)-\mu(\alpha-0)$. 它未必等于 0. 这与勒贝格测度不同. 实际上，四种类型区间的测度分别是

$$m[\alpha,\beta)=\mu(\beta-0)-\mu(\alpha-0),$$
$$m[\alpha,\beta]=\mu(\beta)-\mu(\alpha-0),$$
$$m(\alpha,\beta]=\mu(\beta)-\mu(\alpha),$$
$$\mu(\alpha,\beta)=\mu(\beta-0)-\mu(\alpha),$$

它们不一定完全相同。同样，依定理 6.1 的方式引出的 $\sigma$ 环 $\mathscr{M}$ 称为勒贝格-斯蒂杰 (T.J.Stieltjes) 可测集类，这种测度称为勒贝格-斯蒂杰测度. 它的构造方法在第四章 §7 中还要提到.

当 $\mu(x)=x$ 时，这种测度成为勒贝格测度. 设 $\mu(x)$ 为这样的阶梯函数，$\mu(x)=n$, 当 $n\leqslant x<n+1$, $n\in\mathbb{Z}$, 请读者考虑，这时相应的勒贝格-斯蒂杰测度是怎样的.

## §7. 广义测度

在定义 5.3 里曾讲到，设 $\mathscr{R}$ 为基本集 $X$ 中子集所成的 $\sigma$ 环，如果 $\mathscr{R}$ 上定义的集函数满足下列两条件：

(i) $\mu$ 是 $\sigma$ 可加的，$\mu(\bigcup_n E_n)=\sum_n \mu E_n$，$E_n\in\mathscr{R}$，$n\in\mathbb{N}$，

(ii) $\mu\varnothing=0$，

则称 $\mu$ 是 $\mathscr{R}$ 上的*广义测度*．本节将着重介绍广义测度的哈恩(H.Hahn)分解．

应当指出．(i) 中等式的意义包含两点：或者右边级数绝对收敛，或者级数为定号无穷．$\infty-\infty$ 将认为无意义．广义测度允许取无穷大，可是每个确定的广义测度只能取一种定号无穷．就是说，如果 $\mu$ 是给定的广义测度，存在 $A\in\mathscr{R}$ 使 $\mu A=\infty$，那么不可能有 $B\in\mathscr{R}$ 使 $\mu B=-\infty$．同样，如果有 $A\in\mathscr{R}$ 使 $\mu A=-\infty$．那么出现 $\mu(B)=\infty$ 便不可能．现以前一情形为例加以说明．设 $\mu(A)=\infty$．据条件 (i)，不论 $B\in\mathscr{R}$ 如何，有

$$\mu(A\cup B)=\mu(A-B)+\mu(A\cap B)+\mu(B-A), \tag{1}$$

同时有

$$\mu A=\mu(A-B)+\mu(A\cap B), \tag{2}$$

$$\mu B=\mu(B-A)+\mu(A\cap B). \tag{3}$$

我们证明，如果出现，$\mu B=-\infty$，将导致矛盾．因这时由 (3) 看出，$\mu(B-A)$ 或 $\mu(A\cap B)$ 中至少有一个为 $-\infty$．如果 $\mu(B-A)=-\infty$，则由 (1)，(2) 知 $\mu(A-B)+\mu(A\cap B)$ 或 $\mu A$ 不可能为 $\infty$，与假设 $\mu A=\infty$ 相矛盾．如果 $\mu(A\cap B)=-\infty$，则由 (2)看出，$\mu(A-B)\neq\infty$，于是不论 $\mu(A-B)$ 取有限或 $-\infty$，均不可能有 $\mu A=\infty$；矛盾．这样，$\mu B$ 只可能为有限或 $\infty$．

对于 $\sigma$ 环上广义测度 $\mu$，还可以证明下列论断：设 $A, B\in\mathscr{R}$，$A\subset B$，则当 $|\mu B|<\infty$ 时有 $|\mu A|<\infty$. 这可由下列等式看出：

$$\mu B=\mu A+\mu(B-A),$$

由于 $\mu B$ 有限，上式右边两项均有限，自然 $\mu A$ 为有限. 此外，我们还可以建立类似于定理 5.3(iii) 的结果.

**定义 7.1** 设 $\mu$ 为 $\sigma$ 环 $\mathscr{R}$ 上广义测度，$P\in\mathscr{R}$. 称 $P$ 为 $\mu$ 的非负集，如果对任何 $E\in\mathscr{R}$，恒有 $\mu(P\cap E)\geqslant 0$. 同样，称 $N\in\mathscr{R}$ 为 $\mu$ 的非正集，如果对任何 $E\in\mathscr{R}$，恒有 $\mu(N\cap E)\leqslant 0$.

由定义可知，空集 $\varnothing$ 既是非负集又是非正集. 若 $P$ 是非负集，则它的任何子集如果属于 $\mathscr{R}$，也必是非负集. 对非正集也有类似结论.

**定义 7.2** 设 $\mu$ 为 $\sigma$ 环 $\mathscr{R}$ 上的广义测度. 如果基本集 $X$ 可写成 $X=P\cup N$，其中 $P\cap N=\varnothing$，且 $P$，$N$ 分别为非负与非正集，则称这分解为 $X$ 的哈恩分解(关于测度 $\mu$).

**引理 7.1** **设 $\mu$ 为 $\sigma$ 环 $\mathscr{R}$ 上的广义测度，并设 $E$ 为 $\mathscr{R}$ 中的元，满足 $0<\mu E<\infty$. 则存在 $\mu$ 的非负集 $S\in\mathscr{R}, S\subset E$，使 $\mu S>0$.**

**证** 用反证法. 假定结论不成立，去证明有矛盾发生.

第一步. 我们断定，存在自然数 $n$ 与集 $A\in\mathscr{R}$，使

$$A\subset E, \text{ 且 } \mu A<-2^{-n}, \tag{1}$$

从而对每个 $n\in\mathbb{N}$，作集

$$\mathscr{A}_n=\{A:A\in\mathscr{R}, A\subset E \text{ 且 } \mu A<-2^{-n}\}, \tag{2}$$

则有自然数 $n$ 使 $\mathscr{A}_n$ 非空. 令 $n_1$ 为使 $\mathscr{A}_n$ 非空的最小自然数. 则存在 $A_1\in\mathscr{A}_{n_1}$. 即有 $A_1\in\mathscr{R}$ 满足

$$A_1\subset E \text{ 且 } \mu A_1<-2^{-n_1}. \tag{3}$$

为证 (1)，据 $0<\mu E<\infty$，对每个 $A\in\mathscr{R}, A\subset E$ 均有 $|\mu A|<\infty$. 由于假定定理中所求非负集不存在，$E$ 本身当然不是非负

集,故存在 $B\in\mathscr{R}$ 使 $\mu(E\cap B)<0$,从而有自然数 $n_1$ 使 $\mu(E\cap B)<-2^{-n_1}$. 令 $A=E\cap B$,易见 $A$ 适合要求(1).

第二步. 用归纳法可作出,对每个 $k\in\mathbb{N}$,有 $A_k\in\mathscr{R}$, $A_k\subset E-A_1-\cdots-A_{k-1}$ 且 $\mu A_k<-2^{-n_k}$, 并且 $n_k$ 为满足这种关系的最小自然数;此外还有

$$\mu(E-A_1-\cdots-A_k)>0. \tag{4}$$

其实,据第一步(3)选出 $A_1$ 后,注意到 $\mu(E-A_1)=\mu E-\mu A_1>0$ 且 $E-A_1$ 仍然不是非负集,对 $E-A_1$ 再应用第一步结论,可得 $A_2\in\mathscr{R}$, $A_2\subset E-A_1$ 且 $\mu A_2<-2^{-n_2}$,并且 $n_2$ 为满足这种关系的最小自然数. 对一般情形,应用归纳法即得所需序列 $\{A_k\}$, $k\in\mathbb{N}$;并且(4)也容易验证:

$$\mu(E-A_1-\cdots-A_k)=\mu(E-A_1-\cdots-A_{k-1})-\mu A_k>0.$$

第三步. 完成引理的证明. 令 $A=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$,有

$$\mu(E-A)=\mu E-\mu A_1-\cdots-\mu A_k-\cdots$$

$$>\mu E+\sum_{k=1}^{\infty}2^{-n_k}>0.$$

由于 $\mu(E-A)$, $\mu E$ 均有限,可见级数 $\sum_k 2^{-n_k}$ 收敛. 同时,由于我们的假定,$E-A$ 不是非负集. 据此又可以求得 $B\in\mathscr{R}$, $B\subset E-A$ 且 $\mu B<0$. 那么,在以上序列 $\{n_k\}$ 中有自然数 $n_k>2$ 使 $\mu B<-2^{-n_k}$. 现考察集 $B\cup A_k$, 它属于 $\mathscr{R}$ 且为 $E-A_1-\cdots-A_{k-1}$ 的子集;这是因为

$$B\cup A_k\subset(E-A)\cup A_k\subset E-A_1-\cdots-A_{k-1};$$

但另一方面,它的测度为

$$\mu(B\cup A_k)=\mu B+\mu A_k+<-2^{-n_k+1}=-2^{-(n_k-1)},$$

这与 $n_k$, $A_k$ 的选法相矛盾.

这样,引理便得到证明.

**定理 7.1 （哈恩分解定理）设 $\mu$ 是 $\sigma$ 环 $\mathscr{R}$ 上的广义测度，则有下述哈恩分解：**

$$X=P\cup N,\quad P\cap N=\varnothing,$$

其中 $P$ 为 $\mu$ 的非负集，$N$ 为 $\mu$ 的非正集。此外，这种分解在下述意义下唯一：若又有另外的分解 $X=P_1\cup N_1$，$P_1\cap N_1=\varnothing$，$P_1$，$N_1$ 分别为 $\mu$ 的非负、非正集，则对每个 $E\in\mathscr{R}$ 有

$$\mu(P\cap E)=\mu(P_1\cap E),\ \mu(N\cap E)=\mu(N_1\cap E).$$

**证** 第一步．先证唯一性．考虑两集 $E\cap P\cap N_1$ 与 $E\cap P_1\cap N$ 的测度．由于 $E\cap P\cap N_1$ 为 $P$ 的子集，$\mu(E\cap P\cap N_1)\geqslant 0$；它又是 $N_1$ 的子集，$\mu(E\cap P\cap N_1)\leqslant 0$．因此 $\mu(E\cap P\cap N_1)=0$．同理，$\mu(E\cap P_1\cap N)=0$．据可加性，

$$\begin{aligned}\mu(E\cap P)&=\mu(E\cap P\cap P_1)+\mu(E\cap P\cap N_1)\\&=\mu(E\cap P\cap P_1),\end{aligned}$$

由于这结果关于 $P,P_1$ 是对称的，$\mu(E\cap P)=\mu(E\cap P_1)$．同理，$\mu(E\cap N)=\mu(E\cap N_1)$．

第二步．由于每个广义测度只能取一种定号无穷大，不妨假定对一切 $E\in\mathscr{R}$，$\mu E<\infty$．令

$$\alpha=\sup\{\mu A: A\text{ 为 }\mu\text{ 的非负集}\}.$$

我们去确定一个非负集 $P$，满足 $\mu P=\alpha$．为此取 $\mu$ 的非负集列 $\{A_k\}$，$k\in\mathbb{N}$，使 $\lim\limits_k \mu A_k=\alpha$．令

$$P_n=\bigcup_{k=1}^{n}A_k,\quad P=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k,\quad n\in\mathbb{N}.$$

根据归纳法可证每个 $P_n$ 为非负集．其实，$P_1=A_1$ 为非负集．一般地，设 $P_n$ 为非负集，则因对每个 $E\in\mathscr{R}$，

$$\begin{aligned}P_{n+1}\cap E&=(P_n\cap E)\cup(A_{n+1}\cap E)\\&=(P_n\cap E)\cup(A_{n+1}\cap E\cap\mathscr{C}P_n),\end{aligned}$$

后式为 $P_{n+1}\cap E$ 的互斥分解，故

$$\mu(P_{n+1}\cap E)$$
$$=\mu(P_n\cap E)+\mu(A_{n+1}\cap(E\cap\mathscr{C}P_n))\geqslant 0,$$

这证明了 $P_{n+1}$ 为非负集.

据 $P_n=A_n\cup(P_{n-1}-A_n)$ 知

$$\mu P_n=\mu A_n+\mu(P_{n-1}-A_n)\geqslant\mu A_n\geqslant 0,$$

而 $\{P_n\}$ 为渐张序列，故

$$\mu(P\cap E)=\lim_{n\to\infty}\mu(P_n\cap E)\geqslant 0.$$

这表明 $P$ 为 $\mu$ 的非负集. 特别取 $E=X$ 时得

$$\mu P=\lim_n\mu P_n\geqslant\lim_n\mu A_n=\alpha.$$

据 $\alpha$ 的定义，$\mu P\leqslant\alpha$. 因此得 $\mu P=\alpha$.

第三步. 我们证明 $N=\mathscr{C}P$ 为 $\mu$ 的非正集. 假定不然，则存在集 $E\in\mathscr{R}$，使

$$E\subset N,\ 且\ \mu E>0.$$

由第二步开始时的假定，$0<\mu E<\infty$. 对 $E$ 应用引理 7.1，可得非负集 $S\subset E$, $S\in\mathscr{R}$ 使 $\mu S>0$. 于是 $S\cup P$ 为 $\mu$ 的非负集，且因 $S\cap P=\varnothing$，有

$$\mu(S\cup P)=\mu S+\mu P=\mu S+\alpha>\alpha.$$

这与 $\alpha$ 的定义相违. 所得矛盾表明 $N$ 为 $\mu$ 的非正集.

因此，第二步与第三步一起，证明了哈恩分解的存在性.

**定义 7.3** 设 $\mu$ 为 $\sigma$ 环 $\mathscr{R}$ 上的广义测度，并设 $X=P\cup N$ 为基本集 $X$ 的哈恩分解. 对一切 $E\in\mathscr{R}$，令

$$\mu^+E=\mu(E\cap P),\qquad \mu^-E=-\mu(E\cap N),$$
$$|\mu|(E)=\mu^+E+\mu^-E,$$

并分别称集函数 $\mu^+$, $\mu^-$ 与 $|\mu|$ 为广义测度 $\mu$ 的正变分，负变分与总变分.

下列定理表明广义测度可表为两个测度即正变分与负变分之差：

**定理 7.2** **设 $\mu$ 为 $\sigma$ 环 $\mathscr{R}$ 上的广义测度，则集函数 $\mu^+$，$\mu^-$ 与 $|\mu|$ 均为 $\mathscr{R}$ 上的测度，且有分解**

$$\mu E=\mu^+ E-\mu^- E, \qquad E\in \mathscr{R}.$$

**证** 先证 $\mu^+$ 为 $\mathscr{R}$ 上测度. 设 $E\in \mathscr{R}$, $X=P\cup N$ 为哈恩分解，$P,N$ 分别为 $\mu$ 的非负、非正集. 则因 $\mu^+E=\mu(E\cap P)\geqslant 0$，$\mu^+$ 的非负性得证. 显然，$\mu^+\varnothing=\mu(\varnothing\cap P)=\mu\varnothing=0$. 设 $\{E_k\}$，$k\in\mathbb{N}$ 是 $\mathscr{R}$ 中互不相交的集列，则据 $\mu$ 的完全可加性：

$$\mu^+(\bigcup_k E_k)=\mu((\bigcup_k E_k)\cap P)=\mu(\bigcup_k (E_k\cap P))$$

$$=\sum_k \mu(E_k\cap P)=\sum_k \mu^+E_k.$$

因此 $\mu^+$ 有完全可加性. 这样，$\mu^+$ 满足测度的所有条件，因而是 $\mathscr{R}$ 上测度. 同理，可证 $\mu^-$ 是 $\mathscr{R}$ 上测度.

既然已经证明了 $\mu^+$，$\mu^-$ 为 $\mathscr{R}$ 上测度，由表示

$$|\mu|(E)=\mu^+E+\mu^-E$$

立知 $|\mu|$ 为 $\mathscr{R}$ 上测度最后，利用上述哈恩分解，对每个 $E\in\mathscr{R}$，

$$\mu E=\mu(E\cap(P\cup N))=\mu(E\cap P)+\mu(E\cap N)$$

$$=\mu^+E-\mu^-E,$$

得到了 $\mu$ 的所需分解.

**定理 7.3** **设 $\mu$ 为 $\sigma$ 环 $\mathscr{R}$ 上的广义测度. 那么对一切 $E\in\mathscr{R}$ 有.**

$$|\mu|(E)=\sup\left\{\sum_{k=1}^{n}|\mu E_k|\right\}, \tag{1}$$

**其中上确界对一切互斥分解 $E=\bigcup_{k=1}^{n}E_k$，$E_1,\cdots,E_n\in\mathscr{R}$ 而取.**

**证** 设 $E=\bigcup_{k=1}^{n}E_k$ 为所述任一互斥分解，则有

$$\sum_{k=1}^{n}|\mu E_k| = \sum_{k=1}^{n}|\mu^+ E_k - \mu^- E_k|$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n}(\mu^+ E_k + \mu^- E_k) = \sum_{k=1}^{n}|\mu|(E_k) = |\mu|(E),$$

因此

$$\sup\left\{\sum_{k=1}^{n}|\mu E_k|\right\} \leqslant |\mu|(E). \tag{2}$$

另一方面,取 $X$ 的哈恩分解, $X = P \cup N$, $P \cap N = \varnothing$, $P$, $N$ 分别为 $\mu$ 的非负,非正集. 则

$$E = (E \cap P) \cup (E \cap N)$$

为 $E$ 的一个互斥分解. 因而(1)右边的上确界

$$\sup\{\sum_{k=1}^{n}|\mu E_k|\} \geqslant |\mu(E \cap P)| + |\mu(E \cap N)|$$

$$= \mu^+ E + \mu^- E = |\mu|(E). \tag{3}$$

联合(2)与(3)便得所需等式(1).

在定义 7.3 中我们曾给出测度 $|\mu|$ 的定义. 定理 7.3 中等式(1) 可看作 $|\mu|$ 的另一种定义.

# 第二章 习 题

1. 设 $E_1, E_2$ 均为有界可测集,试证.

$$m(E_1 \cup E_2) = mE_1 + mE_2 - m(E_1 \cap E_2).$$

2. 试证可列个零测度集的并仍是零测度集.

3. 已知 [0,1] 中无理点集 $E$ 的测度为 1. 试由内、外测度定义,考察测度与 1 任意接近且含于 $E$ 内的闭集以及包含 $E$ 的开集的构造是怎样的.

4. 设 $G_1, G_2$ 是开集,且 $G_1$ 是 $G_2$ 的真子集,是否一定有 $mG_1 < mG_2$?

5. 对任意开集 $G$,是否有 $m\bar{G} = mG$ 成立?

6. 如果把外测度的定义改为"有界集 $E$ 的外测度是包含 $E$ 的闭集的

测度的下确界"，是否合理？

7. 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是有限个互不相交的可测集，且 $E_k \subset A_k, k=1,2,\cdots,n$。试证 $m^*(\bigcup_{k=1}^{n} E_k) = \sum_{k=1}^{n} m^* E_k$.

8. 设 $G$ 是开集，$E$ 是零测度集，试证 $\overline{G} = \overline{(G-E)}$.

9. 设 $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n \subset \cdots$，试证 $m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} m^* E_n$.

10. 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 $[0,1]$ 中 $n$ 个可测集，且满足 $\sum_{k=1}^{n} m A_k > n-1$。试证. $m(\bigcap_{k=1}^{n} A_k) > 0$.

11. 设 $m^* E = q > 0$，则对任何 $c \in (0,q)$，有 $E_0 \subset E$，使 $m^* E_0 = c$.

12. 设 $E$ 为一维有界集，$I_1, I_2, \cdots$ 是区间集列（可以相交），它的并覆盖 $E$. 试证 $m^* E = \inf_{\bigcup I \supset E} \sum_{k=1}^{\infty} m I_k$. 对于二维情形如何？

13. 试作一闭集 $F \subset [0,1]$，使 $F$ 中不含任何开区间，而 $mF = 1/2$.

14. 如果把外测度的定义改为"$m^* E$ 为包含 $E$ 的可测集的测度的下确界"，问此定义与原来的外测度定义有何关系？

15. 试证定义在 $(-\infty, \infty)$ 上的单调函数的不连续点集至多可列，因而是零测度集.

16. 设 $\{E_n\}$ 为可测集列且 $\sum_{n=1}^{\infty} m E_n < \infty$，则 $m(\overline{\lim_n} E_n) = 0$.

17. 下列各题中给出了在 $\sigma$ 环 $\mathscr{R}_\sigma$ 上的集函数 $\lambda$ 的例子，问那些是外测度，那些不是？

(i) $X$ 是任意非空子集. $\mathscr{R}_\sigma$ 是 $X$ 的一切子集的类. 对于任意 $E \in \mathscr{R}_\sigma$. 令 $\lambda E = \chi_E(x_0)$，这里 $x_0$ 是 $X$ 中一固定点，$\chi_E(x)$ 是集 $E$ 的特征函数.

(ii) $X$ 是正整数集，$\mathscr{R}_\sigma$ 是 $X$ 的一切子集的类. 对于 $X$ 的任一有限子集 $E$，用 $N(E)$ 表示 $E$ 中点的个数. 令

$$\lambda E = \overline{\lim} N(E \cap \{1,2,\cdots,n\})/n,\ E \in \mathscr{R}_\sigma.$$

(iii) 设 $\mu^*$ 是 $\mathscr{R}_\sigma$ 上的外测度，$E_0$ 是 $\mathscr{R}_\sigma$ 的一个确定元。令 $\lambda E = \mu^*(E \cap E_0)$（$\lambda$ 称为 $\mu^*$ 关于 $E_0$ 的吸收），$E \in \mathscr{R}_\sigma$.

(iv) 设 $\mu_1^*$，$\mu_2^*$ 是 $\mathscr{R}_\sigma$ 上两个外测度，令 $\lambda E = a\mu_1^* E + b\mu_2^* E$，$E \in \mathscr{R}_\sigma$，这里 $a$，$b$ 是实数.

18. 设 $m$ 表示 $\mathbb{R}$ 中外测度限制在波雷尔集类上的测度，$a$, $b$ 为实数，集 $E$ 的 $T$ 变换定义为 $T(E)=\{x: ax+b, x\in E\}$. 试证，对每个波雷尔集 $E$，有 $mT(E)=|a|mE$。

19. 设 $\{E_k\}$ 为可测集列，$E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$，$\sum\limits_{k=1}^{\infty}mE_k<\infty$，则

$$m(\varlimsup_{k\to\infty}E_k)=0.$$

20 设用 $\varphi$ 表示 $\mathbb{R}$ 上的映射 $x\to x^{-1}$ (当 $x\neq 0$)，$0\to 0$. 问任一勒贝格可测集 $E$ 在映射 $\varphi$ 之下的象是否可测，测度如何？

21 试证，若存在勒贝格可测集 $X\supset E$，满足 $mX<\infty$ 与 $mX=m^*E+m^*(X-E)$，则 $E$ 是 $m$ 可测的.

22. 设 $Q$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的单位正方形$[0,1;0,1]$，$\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $Q$ 可测集列，且数列 $\{mE_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有聚点 1. 试证存在子列 $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$，使 $m\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}E_{n_k}>0$.

23. 设 $E$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中任一子集，$\alpha$ 为给定正数，对于任意的 $\varepsilon>0$，令

$$H_{\alpha,\varepsilon}(E)=\inf\sum_k\delta(E_k)^{\alpha},$$

其中 $\delta(E_k)$ 表示 $E_k$ 的直径，且下确界对一切满足 $E\subset\bigcup E_k$ 而 $\delta(E_k)<\varepsilon$，$k\in\mathbb{N}$ 的集列 $\{E_k\}$ 而取. 再令，

$$H_\alpha(E)=\lim_{\varepsilon\to 0}H_{\alpha,\varepsilon}(E)=\sup_{\varepsilon\to 0}H_{\alpha,\varepsilon}(E)$$

试证，$H_\alpha$ 为基本集 $\mathbb{R}^n$ 上的外测度，并满足条件：若 $H_\alpha(E)<\infty$，则当 $\beta>\alpha$ 时，$H_\beta(E)=0$。$H_\alpha$ 称为豪斯道夫 (F. Hausdorff) 测度.

24. 设 $\mathscr{A}$ 是基本集 $X$ 上的 $\sigma$ 代数，并且 $\mu$ 是 $\mathscr{A}$ 上的复函数. 如果对 $E$ 在 $\mathscr{A}$ 中的任一互斥分解 $E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$，都有 $\mu E=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu E_k$，则称 $\mu$ 是 $X$ 上的复测度.

(i) 若 $\mu$ 是 $X$ 上的复测度，则由 $|\mu|(E)=\sup\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\mu E_k|$ ($E\in\mathscr{A}$, $E=\bigcup\limits_k E_k$ 为 $\mathscr{A}$ 中的互斥分解)定义的 $|\mu|$ 是 $\mathscr{A}$ 上的测度.

(ii) 若 $\mu$ 是 $X$ 上的复测度，则 $|\mu|(X)<\infty$.

(iii) 问所述复测度与广义测度有何关系？

25. 设 $\mu$ 是 $\sigma$ 代数 $\mathscr{A}$ 上的复测度，$E\in\mathscr{A}$，并令 $a=\sup|\mu A|$，这里 $A$ 是 $\mathscr{A}$ 中含于 $E$ 的任意元. 试证 $a\leqslant|\mu|(E)\leqslant 4a$.

# 第三章　可测函数

本章引进一个重要的函数类——可测函数类并讨论它的性质，为下一章勒贝格积分作准备．我们将看到，在可测函数类中进行运算如代数运算、取极限运算等是相当方便的，所得结果仍是可测函数．本章最后一节还要研究可测函数的构造，使我们对这种函数有较深刻的理解．

## §1. 可测函数的基本性质

设 $X=\mathbb{R}$ 是基本集，$E$ 是它的一个可测子集（有界或无界），$f(x)$ 是定义在 $E$ 上的实函数，它的值允许取无穷大．设 $a$ 是任一实数，用 $E(f>a)$ 表示区间 $(a,\infty]$ 关于映射 $f$ 的原象 $f^{-1}((a,\infty])$，即

$$E(f>a)=\{x:x\in E,f(x)\in(a,\infty]\}.$$

要注意，这是函数定义域的一个子集（图 9）．下面用到的记号 $E(f\geqslant a)$，$E(a<f<\beta)$ 等均照此理解。

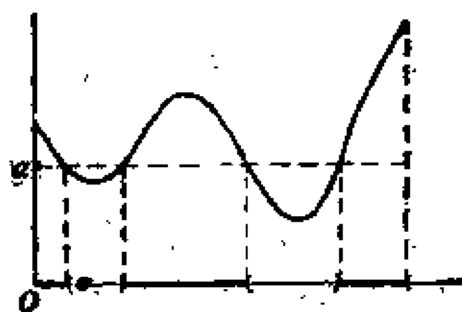


图 9　点集 $E(f<a)$

**定义 1.1**　设 $f$ 是定义在可测集 $E$ 上的实函数．如果对每个实数 $a$，集 $E(f>a)$ 恒可测（勒贝格可测），则称 $f$ 是 $E$ 上（勒贝格）可测函数．

该定义有几种等价形式。设 $f$ 可测，由等式

$$E(f\geqslant a)=\bigcap_{n=1}^{\infty}E\left(f>a-\frac{1}{n}\right)$$

推知 $E(f\geqslant\alpha)$ 可测，从而由等式

$$E(\alpha<f<\beta)=E(f>\alpha)-E(f\geqslant\beta)$$

知 $E(\alpha<f<\beta)$ 也可测。反之，如果给定可测集 $E$ 上实函数 $f$，使 $E(f=\infty)$ 与 $E(\alpha<f<\beta)$ 恒可测，则据等式

$$E(f>\alpha)=\bigcup_{n=n_0}^{\infty} E(\alpha<f<n)\cup E(f=\infty)$$

其中 $n_0>\alpha$，可知 $E(f>\alpha)$ 可测．因此可测函数的定义也可叙述为："设 $f(x)$ 是定义在可测集 $E$ 上的实函数，若 $E(f=\infty)$ 可测且对任何实数 $\alpha,\beta$ $(\alpha<\beta)$，集 $E(\alpha<f<\beta)$ 恒可测，则称 $f$ 为 $E$ 上可测函数"．

类似地可以验明，在定义 1.1 中把条件"$E(f>\alpha)$ 恒可测"用下列三条件中任一个来代替，所得定义是彼此等价的：

(i) $E(f\geqslant\alpha)$ 恒可测；  (ii) $E(f<\alpha)$ 恒可测；  (iii) $E(f\leqslant\alpha)$ 恒可测．

今后将根据需要采用可测函数的适当一种定义．在讨论可测函数的性质之前，再对它的定义方式作一点说明．由于 $\mathbb{R}$ 中开集 $G$ 可以表成互不相交区间的并，$G=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(\alpha_k,\beta_k)$，而

$$f^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(\alpha_k,\beta_k)\right)=\bigcup_{k=1}^{\infty}f^{-1}((\alpha_k,\beta_k)),$$

我们看出，$\mathbb{R}$ 上可测函数的定义可改述为：对于任何开集 $G\subset\mathbb{R}$，原象 $f^{-1}(G)$ 是可测集（记住，当然要求 $f^{-1}(\infty)$ 的可测性）．读者在第一章 §3 例 2 中已经看到，函数 $f(x)$ 为连续的一个充要条件是：对于任何一维开集 $G$，$f^{-1}(G)$ 是开集．由于开集总是可测的，可见可测函数是连续函数的一种推广．还要指出，集的可测性本来只依赖于 $\sigma$ 环的结构而毋需引进测度．函数 $f$ 的可测性就表现为逆映射 $f^{-1}$ 是 $\mathbb{R}$ 中波雷尔集类到勒贝格可测集类之间的一种对

应(在两个不同的 $\sigma$ 环之间的对应). 这种方式的定义可使可测函数概念有更多的推广. 例如,设给出一般的基本集 $X$ 以及由它的子集构成的 $\sigma$ 代数 $\mathscr{A}$, 设 $f$ 是定义在 $X$ 上的实函数,允许取值无穷大.如果对任意实数 $a$, 集 $E(f>a)\in\mathscr{A}$, 则称 $f$ 为 $\mathscr{A}$ 可测.当 $\mathscr{A}$ 是勒贝格可测集类时,得到的是勒贝格可测函数; 当 $\mathscr{A}$ 是波雷尔集类时,得到的是波雷尔可测函数,等等. 本章限于讨论勒贝格可测函数或简称可测函数.

从定义 1.1 看, 对于可测函数 $f(x)$, 逐点定义并不显得特别重要. 例如, 任意改变函数在 $E$ 中一个确定的零测度集上的值, 对函数的可测性不发生影响. 今后当有需要时, 我们就这样做.

**例 1** 设 $E=[0,1]$, $E$ 上狄里希勒(G.Dirichlet)函数的定义如下:

$$\psi(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为 } E \text{ 中有理点},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为 } E \text{ 中无理点}.\end{cases}$$

由于对任意实数 $a$, 集 $E(\psi>a)$ 总是下述三个集之一: $E$ (当 $a<0$), $E$ 中有理点集(当 $0\leqslant a<1$) 与空集(当 $a\geqslant 1$). 它们都是可测集. 因而, $\psi$ 是 $E$ 上可测函数.

**例 2** 简单函数.

设 $E$ 是可测集, $f(x)$ 在 $E$ 上只取有限多个实数值 $c_1, c_2, \cdots, c_n$, 且 $E(f=c_1)$, $E(f=c_2)$, $\cdots$, $E(f=c_n)$ 均可测. 这样的函数 $f$ 称为 $E$ 上的简单函数. 据此定义,例 1 中的 $\psi$ 是 $[0,1]$ 上的简单函数. 容易证明,简单函数是可测的.

其实,不妨假定 $c_1<c_2<\cdots<c_n$ 来证明结论. 这时, 对任一实数 $a$ 有

$$E(f>a)=\begin{cases}\varnothing, & 若 a\geqslant c_n,\\ E(f=c_n), & 若 c_{n-1}\leqslant a<c_n,\\ \cdots\cdots & \\ E(f=c_n)\cup E(f=c_{n-1})\cup\cdots\cup E(f=c_1), & \\ 若 c_1\leqslant a<c_2, & \\ E, & 若 a<c_1.\end{cases}$$

因此，不论实数 $a$ 如何，$E(f>a)$ 均为可测集，因而 $f$ 是可测函数.

简单函数在本书中用得相当多，占有特殊地位．他们可以用来逼近一般可测函数，构造积分以及逼近某些函数空间中的元等．如果利用集 $E$ 的特征函数 $\chi_E(x)$（参看第一章 §2），则易见所述简单函数可写成下列形式：

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}c_k\chi_{e_k}(x),$$

其中假定了 $E=\bigcup_{k=1}^{n}e_k$ 而 $e_k=E(f=c_k)$ 等互不相交。

**定义 1.2** 设 $f(x)$ 为定义在集 $E$ 上的可测函数，$x\in E$．如果对任何 $x_n\to x(x_n\in E)$ 有 $f(x_n)\to f(x)$，则称 $f(x)$ 在点 $x$ 连续．这里，对于 $E$ 的孤立点，总约定 $f(x)$ 在该点连续。如果 $f(x)$ 在 $E$ 的每一点连续，则称 $f(x)$ 在 $E$ 上连续.

**例 3** 定义在闭集 $E$ 上的连续函数是可测的.

由于闭集是可测的，因而如能证明，对任一实数 $a$，集 $A=E(f\geqslant a)$ 是闭集，那么，$f$ 的可测性就得到证明．设 $A$ 的导集 $A'$ 非空，$x_0\in A'$，由于 $A'\subset E'\subset E$，故 $x_0\in E$．据聚点定义，有点列 $\{x_n\}\subset A$，且 $x_n\to x_0$，$x_n\neq x_0$．注意到 $f$ 的连续性，由 $x_n$ 所满足的关系式 $f(x_n)\geqslant a$ 取极限，即得 $f(x_0)\geqslant a$．这表明 $x_0\in A$．故 $A'\subset A$，即 $A$ 是闭集.

在测度论中宜于引进"几乎处处"概念．

**定义 1.3** 设 $S$ 是某个命题或某个性质．如果 $S$ 在集 $E$ 上除了某个零测度子集外处处成立，则说 $S$ 在 $E$ 上几乎处处成立，记为 $S$, a.e. 例如，两函数 $f$ 与 $g$ 在 $E$ 上几乎处处相等指的是：$f(x)$ 与 $g(x)$ 不相等的点集 $E_0=E(f\neq g)$ 的测度为零，而在 $E-E_0$ 上处处有 $f(x)=g(x)$．这时简称 $f$ 与 $g$ 对等，记成 $f\sim g$．

例 1 中的狄里希勒函数 $\psi(x)$ 是对等于 0 的，$\psi\sim 0$．这是因为，$\psi$ 在无理点集上为 0，而有理点集的测度为 0．

"几乎处处"是测度论中极其重要的概念．我们要经常用到几乎处处有限，几乎处处为正，几乎处处收敛等概念．很清楚，可测函数列 $\{f_n\}$ 在 $E$ 上几乎处处收敛于函数 $f$，简记为 $f_n\to f$, a.e.，它的意义就是指在 $E$ 上等式 $\lim\limits_{n} f_n(x)=f(x)$ 几乎处处成立．

**例 4** 在开正方形 $E=\{(x,y):0<x,y<1\}$ 上定义函数列：

$$f_n(x,y)=\begin{cases}(x-y)^{-2n}, & \text{若 } x\neq y,\\ 0, & \text{若 } x=y,\end{cases}$$

$n\in\mathbb{N}$．不难看出，除了 $E$ 的对角线 $x=y(0<x<1)$ 之外，在 $E$ 的其它点，总有 $0<|x-y|<1$，因此对于后面这种点，当 $n\to\infty$ 时 $(x-y)^{-2n}\to\infty$．由于对角线上一切点所成之集的二维测度为 0，故在 $E$ 上几乎处处成立 $\lim\limits_{n} f_n(x,y)=\infty$．

**定理 1.1** **设 $\{f_n(x)\}$, $n\in\mathbb{N}$ 是可测集 $E$ 上定义的可测函数列，则 $\sup\limits_{n} f_n(x)$ 与 $\inf\limits_{n} f_n(x)$ 都是可测的．**

**证** 任取实数 $\alpha$，我们要证明 $E(\sup f_n>\alpha)$，$E(\inf f_n<\alpha)$ 是可测集，从而知 $\sup\limits_{n} f_n$ 与 $\inf\limits_{n} f_n$ 都可测．先证明等式

$$E(\sup f_n>\alpha)=\bigcup_{n} E(f_n>\alpha) \tag{1}$$

成立。如果 $x_0\in E(\sup f_n>\alpha)$，则 $\sup f_n(x_0)>\alpha$．于是有 $n_0$ 使

$f_{n0}(x_0)>a$, 这表明 $x_0\in\bigcup_n E(f_n>a)$. 故得

$$E(\sup f_n>a)\subset\bigcup_n E(f_n>a).$$

反之，如果 $x_1\in\bigcup_n E(f_n>a)$，则有 $n_1$ 使 $x_1\in E(f_{n1}>a)$，即 $f_{n1}(x_1)>a$，从而 $\sup f_n(x_1)>a$，这表明 $x_1\in E(\sup f_n>a)$，故得 $\bigcup_n E(f_n>a)\subset E(\sup f_n>a)$. 于是上面等式(1)得证。因每个集 $E(f_n>a)$, $n\in\mathbb{N}$ 可测，它们的并也是可测的，从而 $E(\sup f_n>a)$ 可测.

同样，由等式

$$E(\inf f_n<a)=\bigcup_n E(f_n<a) \tag{2}$$

推知 $E(\inf f_n<a)$ 的可测性．定理得证.

显然，定理中的序列为有限函数组时，结论仍然成立．我们给出定理的两个推论.

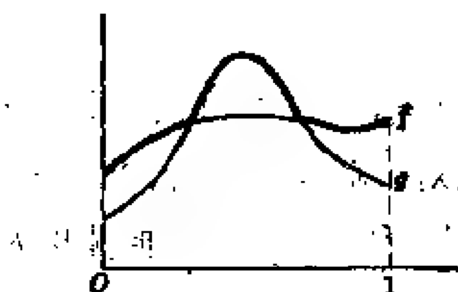



图 10 $\sup(f,g)$




图 11 $\inf(f,g)$

设用 $f_+$, $f_-$ 表示 $f(x)$ 的正部与负部，即

$$f_+(x)=\begin{cases}f(x), & 若 f(x)\geqslant 0,\\ 0, & 若 f(x)<0;\end{cases}$$

而 $f_-$ 为 $-f$ 的正部．则有

**推论 1** **设 $f(x)$ 是可测集 $E$ 上的可测函数，则 $f_+(x)$, $f_-(x)$ 与 $|f(x)|$ 均可测.**

**证** 首先，由 $f(x)$ 的可测性知 $-f(x)$ 可测．这是因为，对任意实数 $a$, $E(-f>a)=E(f<-a)$，因而恒为可测集．其次，

应用定理 1.1，由

$$f_+(x)=\sup\{f(x),0\},\quad f_-(x)=\sup\{-f(x),0\},$$
$$|f(x)|=\sup\{f(x),-f(x)\}$$

以及注意到 $-f$ 的可测性，可知推论成立。

**推论 2** 设 $\{f_n(x)\}$，$n\in\mathbb{N}$ 是可测集 $E$ 上可测函数列，则 $\overline{\lim\limits_n} f_n(x)$ 与 $\underline{\lim\limits_n} f_n(x)$ 都是可测的。

其实，据上、下极限的定义：

$$\overline{\lim_n} f_n(x)=\inf_k \sup_{n\geq k} f_n(x),\ \underline{\lim_n} f_n(x)=\sup_k \inf_{n\geq k} f_n(x);$$

两次应用定理 1.1 即明．例如，对于上极限情形，首先每一个 $g_k(x)=\sup\limits_{n\geq k} f_n(x)$，$k\in\mathbb{N}$ 为可测，其次 $\inf\limits_k g_k(x)$ 可测；下极限情形类似。

当所述上、下极限一致，即极限函数存在时，由推论立知序列的极限函数 $\lim\limits_n f_n(x)$ 可测，由于函数的可测性不受一个零测度集上的值的影响，即使 $\lim\limits_n f_n(x)$ 几乎处处存在，它也可测，这样便得

**定理 1.2** 设 $\{f_n(x)\}$，$n\in N$ 是可测集 $E$ 上可测函数列，则当 $\lim\limits_n f_n(x)$ 几乎处处存在时，它是 $E$ 上的可测函数。

因为定理中只假定极限几乎处处存在，为确定起见，通常把序列 $\{f_n\}$ 的极限函数看成

$$f(x)=\begin{cases}\lim\limits_n f_n(x), & \text{若极限存在(包括}\pm\infty\text{)},\\ 0, & \text{若极限不存在}.\end{cases}$$

**注** 我们指出定理 1.2 的一个重要特例，当每个 $f_n(x)$ 是 $E$ 上的简单函数而 $\lim\limits_n f_n(x)$ 几乎处处存在时，此极限函数是 $E$ 上可测函数。

可测函数可以用简单函数来逼近。

**定理 1.3** 设 $f(x)$ 是可测集 $E$ 上非负可测函数，则存在一个非负递增的简单函数列 $\varphi_n(x)$：

$$0\leqslant\varphi_1(x)\leqslant\varphi_2(x)\leqslant\cdots,$$

使等式 $\lim\limits_n \varphi_n(x)=f(x)$ 在 $E$ 上处处成立.

**注** 由于一般可测函数可表成它的正部与负部之差：

$$f(x)=f_+(x)-f_-(x),$$

故对 $f_+$、$f_-$ 分别应用定理 1.3，即得：**可测函数可表成简单函数列的极限.**

**证** 所述函数列 $\{\varphi_n(x)\}, n\in\mathbb{N}$ 可以构造如下．对每个 $n\in\mathbb{N}$，令

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}\dfrac{r-1}{2^n}, & \text{当}\dfrac{r-1}{2^n}\leqslant f(x)<\dfrac{r}{2^n}, r=1,2,\cdots,n2^n,\\ n, & \text{当} f(x)\geqslant n.\end{cases}$$

则对每个 $n\in\mathbb{N}$，$\varphi_n(x)\geqslant 0$ 且 $\varphi_n(x)\leqslant\varphi_{n+1}(x)$．我们来证明

$$\lim_n \varphi_n(x)=f(x).$$

如果 $f(x_0)<\infty$，则有自然数 $n_0$ 存在，使 $f(x_0)<n_0$，故此时

$$0\leqslant f(x_0)-\varphi_n(x_0)\leqslant 1/2^n, \quad \text{当} n\geqslant n_0,$$

因而 $\lim\limits_n \varphi_n(x_0)=f(x_0)$．如果 $f(x_1)=\infty$，则对每个 $n$，$\varphi_n(x_1)=n$，因而 $\varphi_n(x)=\infty$.

着重指出，据定理 1.3 可得可测函数的另一定义：$f(x)$ 是可测集 $E$ 上可测函数的充要条件是它可表为一个简单函数列的极限。

定理 1.3 的作用还在于，它给出了可测函数的一种逼近，即对一般可测函数，可通过简单函数列的极限来理解它．这是用已知探求未知，用简单了解复杂的一个很好说明．在研究函数的可测性时，不一定每次都从原定义出发，而要充分利用可测函数的重要

性质。以可测函数的代数运算为例，利用定理 1.3 来讨论就显得方便一些。

**引理 1.1** **设 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 为可测集 $E$ 上简单函数，则它们的和，差，积与商**(自然假定分母几乎处处不为零)**仍是简单函数.**

**证** 我们以和 $f_1(x)+f_2(x)$ 为例来证明引理，其余情形类似。于是设

$$f_1(x)=\sum_{k=1}^{p} c_k^{(1)}\chi_{e_k^{(1)}}(x),$$

$$f_2(x)=\sum_{j=1}^{q} c_j^{(2)}\chi_{e_j^{(2)}}(x),$$

其中 $E=\bigcup_l e_l^{(i)}$, $e_l^{(i)}$ 等互不相交且均可测, $i=1,2$, 则

$$f_1(x)+f_2(x)=\sum_{k,j}\left(c_k^{(1)}+c_j^{(2)}\right)\chi_{e_k^{(1)}\cap e_j^{(2)}}(x),$$

其中求和号是对一切 $k=1,\cdots,p$; $j=1,\cdots,q$ 而取的。就是说，和 $f_1+f_2$ 是一个在可测集 $e_k^{(1)}\cap e_j^{(2)}$ 上取常数值 $c_k^{(1)}+c_j^{(2)}$ (共 $pq$ 个)的简单函数。

**定理 1.4** **在可测集 $E$ 上定义的两个可测函数的和，差，积与商**(假定运算几乎处处有定义)**都是可测的。**

**证** 设 $f(x)$, $g(x)$ 是 $E$ 上可测函数。据定理 1.3 的注，存在两个简单函数列 $\{f_n(x)\}$, $\{g_n(x)\}$, $n\in\mathbb{N}$, 适合

$$\lim_n f_n(x)=f(x), \quad \lim_n g_n(x)=g(x),$$

因而在定理的条件下，几乎处处有

$$\lim_n[f_n(x)\pm g_n(x)]=f(x)\pm g(x),$$

$$\lim_n f_n(x)g_n(x)=f(x)g(x).$$

在考虑商的可测性时，须设 $g(x)$ 几乎处处不等于 0，这时可以假定收敛于 $g(x)$ 的函数列 $g_n(x)\neq 0$. 事实上，只要把 $g_n(x)$ 换

或

$$g_n(x)+\frac{1}{n}\left(\operatorname{sgn} g_n(x)+\frac{1}{2}\right)$$

而记号不变，那么这种 $g_n(x)$ 仍是简单函数。于是有

$$\lim_n f_n(x)/g_n(x)=f(x)/g(x).$$

据引理 1.1，$f_n(x)$ 与 $g_n(x)$的代数运算均是简单函数，$n\in\mathbb{N}$。从而应用定理 1.3 便知两可测函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的和、差、积与商均是可测的。

## §2 可测函数列的收敛性

设 $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为可测集 $E$ 上的可测函数列，每个 $f_n(x)$ 均在 $E$ 上几乎处处有限。在 §1 中已经讲到序列的几乎处处收敛概念，本节将进一步讨论这种收敛的等价性等深入性质，为了下面的需要，先引进上限集与下限集的概念。

**定义 2.1** 设给定一个集列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，它的上限集、下限集分别定义为

$$\overline{\lim} A_n=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n,\quad \underline{\lim} A_n=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}A_n.$$

不难证明，一点 $x$ 属于 $\overline{\lim}A_n$ 等价于 $x$ 属于无限多个集 $A_n$ 之中，而 $x\in\underline{\lim}A_n$ 等价于 $x$ 属于从某个 $n$ 开始($n$ 可随 $x$ 而异)以后的一切 $A_k$ 之中。事实上，设 $x\in\overline{\lim}A_n$，令 $B_k=\bigcup\limits_{n=k}^{\infty}A_n$，则 $x$ 属于一切集 $B_k$ 之中，$k\in\mathbb{N}$。由 $x\in B_1$ 可知有集 $A_{k_1}$ 含有 $x$，由 $x\in B_{k_1+1}$ 可知有集 $A_{k_2}(k_2>k_1)$ 含有 $x$，如此继续下去，可知存在一列 $A_{k_i}(i\in\mathbb{N})$，它们均含有 $x$。反之，若存在集列 $\{A_{k_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$，其中每个 $A_{k_i}$ 均含有 $x$，则对一切 $k$，有 $x\in\bigcup\limits_{n=k}^{\infty}A_n$，从而 $x\in\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=k}^{\infty}A_n$.

同理可考虑下限集的情形。由上述等价性立即推知，

$\underline{\lim} A_n \subset \overline{\lim} A_n$。当 $\underline{\lim} A_n = \overline{\lim} A_n$ 时，我们称集列 $\{A_n\}$ 收敛，它的极限定义为 $\overline{\lim} A_n$. 读者要注意，不可把它同数列的极限混淆起来，但它同函数的极限确实有密切关系，参看本章习题 6.

不难证明，对于渐张序列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，极限存在且等于 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$；而对于渐缩序列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，极限也存在且等于 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. 以前者为例加以证明，这时由于 $A_1\subset A_2\subset A_3\subset\cdots$，有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=\bigcup_{n=2}^{\infty} A_n=\cdots=\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n=\cdots,$$

$$\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n=A_k.$$

从而

$$\overline{\lim} A_n=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\cap\left(\bigcup_{n=2}^{\infty} A_n\right)\cap\cdots=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$\underline{\lim} A_n=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n=\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

这样，

$$\overline{\lim} A_n=\underline{\lim} A_n=\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

同理可考虑渐缩序列的情形.

当点集 $A_n(n\in\mathbb{N})$ 是可测集时，据第二章定理 3.4 知 $\overline{\lim} A_n$ 与 $\underline{\lim} A_n$ 均可测. 特别当 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是有限区间 $(a,b)$ 中渐张列或渐缩列的可测集列时，$\lim A_n$ 也可测，且它的测度 $m(\lim A_n)=\lim mA_n$，参看第二章定理 3.6.

上限集、下限集与函数列的收敛性有密切关系，我们用下例来

说明。

**例 1** 设 $f(x)$, $f_n(x)(n\in\mathbb{N})$是定义在可测集 $E$ 上的有限可测函数，对任意的 $\varepsilon>0$, 令

$$E_n=E_n(\varepsilon)=E(|f_n-f|\geqslant\varepsilon).$$

则可证明，$\overline{\lim}E_n$ 中的每一点 $x_0$, 必使 $f_n(x_0)$ 不收敛于 $f(x_0)$. 其实，据上面所述，$x_0$ 含于无穷多个 $E_n$ 之中，即有自然数子列 $\{n_k\}$, 使$x_0\in E_{n_k}$, $k\in\mathbb{N}$. 因此

$$|f_{n_k}(x_0)-f(x_0)|\geqslant\varepsilon,\quad k\in\mathbb{N}.$$

这说明 $f_n(x)$ 在 $x_0$ 处不收敛于 $f(x_0)$.

取趋于零的正数列 $\varepsilon_k$, $k\in\mathbb{N}$, 则不难看出，集$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(\overline{\lim}E_n(\varepsilon_k))$ 表示 $f_n(x)$ 在 $E$ 上不收敛于 $f(x)$ 的点的全体.

现在叙述并证明重要的叶果洛夫(Д.Ф.Егоров)定理.

**定理 2.1** **设 $E$ 是可测集，$mE<\infty$, $f_n(x)(n\in\mathbb{N})$ 与$f(x)$是 $E$ 上几乎处处有限的可测函数，且 $\{f_n(x)\}$ 在 $E$ 上几乎处处收敛于$f(x)$. 那么，对任意 $\delta>0$, 存在集 $E_\delta\subset E$, 使序列 $\{f_n(x)\}$ 在 $E_\delta$ 上一致收敛于 $f(x)$ 而 $m(E-E_\delta)<\delta$.**

**证** 首先令 $E^*=E(|f|=\infty)\cup\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E(|f_n|=\infty)$, 则 $E^*$ 是零测度集. 当有必要时可用 $E-E^*$ 代替 $E$, 故在证明中不妨假定每个 $f_n(x)(n\in\mathbb{N})$ 与 $f(x)$ 均在 $E$ 上处处有限. 以下分两步进行.

第一步. 设 $\varepsilon>0$, 令 $E_n=E_n(\varepsilon)=E(|f_n-f|\geqslant\varepsilon)$, 考虑$E_n$的上限集$\overline{\lim}E_n=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=k}^{\infty}E_n$. 上面例 1 指出，$f_n(x)$ 在$\overline{\lim}E_n$ 的点上不收敛于 $f(x)$. 但因假设 $f_n(x)\xrightarrow{\text{a.e.}}f(x)$, 故$m(\overline{\lim}E_n)=0$. 同时，由于$\left\{\bigcup\limits_{n=k}^{\infty}E_n\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ 为渐缩列，且 $m\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\right)\leqslant mE<\infty$, 故据第二

章定理 3.6 的(ii)，有

$$\lim_{k\to\infty} m\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n\right)=m(\overline{\lim} E_n)=0.$$

令 $R_k(\varepsilon)=\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n(\varepsilon)$. 那么，对任意正数 $\eta$, 有 $k\in\mathbb{N}$ 使 $mR_k(\varepsilon)<\eta$. 特别，对任意 $\delta>0$ 以及自然数 $r$ (取 $\varepsilon=1/2^r$, $\eta=\delta/2^r$), 必有 $k_r$ 使

$$mR_{k_r}(1/2^r)<\delta/2^r, r\in\mathbb{N}.$$

从而

$$m\left(\bigcup_{r=1}^{\infty} R_{k_r}(1/2^r)\right)\leqslant\sum_{r=1}^{\infty} mR_{k_r}(1/2^r)<\sum_{r=1}^{\infty} \delta/2^r=\delta.$$

第二步. 令 $S=\bigcup_{r=1}^{\infty} R_{k_r}(1/2^r)$, $E_\delta=E-S$, 则 $m(E-E_\delta)=mS<\delta$. 而在点集 $E_\delta$ 上，可以证明 $f_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$. 其实，当 $x\in E_\delta$ 时，$x\overline{\in} S$, 因此 $x\overline{\in} R_{k_r}(1/2^r)$, $r\in\mathbb{N}$. 于是当 $n\geqslant k_r$ 时，$x\overline{\in} E(|f_n-f|\geqslant 1/2^r)$ 或

$$|f_n(x)-f(x)|<1/2^r, n\geqslant k_r, x\in E_\delta.$$

由于显然，当 $r\to\infty$ 时 $1/2^r\to 0$ 且 $k_r$ 仅与 $r$、$\delta$ 有关，上面不等式表明，在 $E_\delta$ 上 $f_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$. 定理证完.

**注** 定理中条件 $mE<\infty$ 是不可少的。例如考虑 $\mathbb{R}$ 上的函数列

$$f_n(x)=\chi_{(n-1,n)}(x), n\in\mathbb{N},$$

每个 $f_n$ 是 $\mathbb{R}$ 上可测函数，且易见 $f_n(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处收敛于零($n\to\infty$). 但是对 $\delta=1/2$, 有

$$m\mathbb{R}\left(|f_n-0|>\frac{1}{2}\right)=m\mathbb{R}\left(f_n>\frac{1}{2}\right)=1, n\in\mathbb{N},$$

因此定理中所述的 $E_\delta$ 对于 $\delta=1/2$ 不存在.

由所证定理可以引进下述概念.

**定义 2.2** 设 $f$, $f_n(n\in\mathbb{N})$ 是可测集 $E$ 上几乎处处有限的可测函数。如果对任意的 $\delta>0$, 恒存在 $E$ 的可测子集 $E_\delta$, 使 $m(E-E_\delta)<\delta$, 而在 $E_\delta$ 上 $f_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$, 则称序列 $f_n(x)$ 在 $E$ 上近一致收敛于 $f(x)$.

不难证明, 叶果洛夫定理的逆也成立:

**定理 2.2** **设可测集 $E$ 上可测函数列 $f_n(x)$ 近一致收敛于 $f(x)$, 则 $f_n(x)$ 几乎处处收敛于 $f(x)$.**

**证** 据定理假设, 对每个 $k\in\mathbb{N}$, 有可测集 $E_k\subset E$, 使 $m(E-E_k)<1/k$ 而 $\{f_n(x)\}$ 在 $E_k$ 上一致收敛于 $f(x)$. 令 $E^*=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$, 则 $f_n(x)$ 在 $E^*$ 上处处收敛于 $f(x)$. 其实, 当 $x\in E^*$ 时, $x$ 属于某个 $E_k$. 既然 $f_n(t)$ 在 $E_k$ 上一致收敛于 $f(t)$, 自然在 $t=x$ 处收敛于 $f(x)$. 同时, 我们断定, $m(E-E^*)=0$. 这是因为, 对每个自然数 $k$,

$$m(E-E^*)=m\bigcap_{k=1}^{\infty}(E-E_k)\leqslant m(E-E_k)<1/k,$$

因而 $m(E-E^*)=0$ 得证.

定理证完.

定理 2.1 与 2.2 一起表明, 当 $mE<\infty$ 时, 序列的几乎处处收敛实质上与近一致收敛等价. 但两者与一致收敛却有质的差别, 参看下例.

**例 2** 试考察函数列 $f_n(x)=x^n(0\leqslant x\leqslant 1)$, $n\in\mathbb{N}$, 它处处收敛于函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

易见 $f_n(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上不一致收敛于 $f(x)$, 这只要注意到

每个 $f_n(x)$ 连续而极限函数不连续这个事实就知道了. 然而无论 $\delta>0$ 如何小, 只要一经确定, 在区间 $[0, 1-\delta]$ 上, 恒有 $f_n(x)$ 一致趋于零. 这是因为, 在 $[0, 1-\delta]$ 上,

$$|f_n(x)-f(x)|=x^n\leqslant(1-\delta)^n,$$

而上式右边为与 $x$ 无关的无穷小.

下面再引进一种较几乎处处收敛为弱的收敛概念.

**定义 2.3** 设 $f_n(x)$ 是可测集 $E$ 上的可测函数列, $f(x)$ 是 $E$ 上可测函数. 如果对每个 $\varepsilon>0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} mE(|f_n-f|\geqslant\varepsilon)=0,$$

则称 $f_n$ 测度收敛于 $f$.

根据叶果洛夫定理知道, 假定 $mE<\infty$, 则由 $f_n\xrightarrow{\text{a.e.}}f$ 推出 $f_n$ 近一致收敛于 $f$. 因此, 当 $mE<\infty$ 时, 由 $f_n\xrightarrow{\text{a.e.}}f$ 可得, 对于任意 $\varepsilon>0$, $\delta>0$, 存在可测集 $E_\delta$ 与自然数 $N$, 使 $m(E-E_\delta)<\delta$, 而在 $E_\delta$ 上有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,\ \text{当}\ n>N.$$

从而当 $x\in E(|f_n-f|\geqslant\varepsilon)$ 时, $x\bar{\in}E_\delta$. 这表明 $E(|f_n-f|\geqslant\varepsilon)\subset E-E_\delta$. 因此

$$mE(|f_n-f|\geqslant\varepsilon)\leqslant m(E-E_\delta)<\delta,\ \text{当}\ n>N.$$

即 $f_n$ 测度收敛于 $f$. 然而, 测度收敛不蕴含几乎处处收敛, 可看下例.

**例 3** 设基本集为 $E=[0, 1)$. 令 $I_r^{(n)}=[r2^{-n}, (r+1)2^{-n})$, $r=0, 1, \cdots, 2^n-1$, $n=0, 1, 2, \cdots$, $\chi_r^{(n)}$ 为 $I_r^{(n)}$ 的特征函数. 将这些特征函数依次排列为

$$\chi_0^{(0)},\ \chi_0^{(1)},\ \chi_1^{(1)},\ \cdots,\ \chi_0^{(n)},\ \chi_1^{(n)},\ \cdots,\ \chi_{2^n-1}^{(n)},\ \cdots.$$

那么, 此函数列测度收敛于 0, 但处处不收敛于 0. 其实, 易见

$$mE(\chi_{(r)}^{(n)}>0)=2^{-n},\ r=0,1,\cdots,2^n-1,$$

它当 $n\to\infty$ 时趋于 0，故所述序列测度收敛于 0．但对任意的 $x_0\in[0,1)$，恒有无穷个形如 $I_{(r)}^{(n)}$ 的区间，每个都含有 $x_0$，从而序列 $\{\chi_{(r)}^{(n)}(x_0)\}$ 中有子列 $\{1,1,\cdots,1,\cdots\}$，显然不收敛于 0．

下列定理称为黎斯(F．Riesz)定理，它表明测度收敛与几乎处处收敛的联系．

**定理 2.3　设 $mE<\infty$，则可测函数列 $f_n(x)$ 在 $E$ 上测度收敛于 $f(x)$ 的充要条件是：对序列 $\{f_n(x)\}$ 的任何子列 $\{f_{n_k}(x)\}$，都存在子列 $\{f_{n_{k_i}}(x)\}$，几乎处处收敛于 $f(x)$．**

**证**　必要性．设 $f_n(x)$ 测度收敛于 $f(x)$，则它的任何子列也测度收敛于 $f(x)$．因此只须证明序列 $\{f_n(x)\}$ 本身有几乎处处收敛的子列即可．对任意的 $\varepsilon>0$，据假设 $\lim\limits_{n\to\infty} E(|f_n-f|\geqslant\varepsilon)=0$．从而对每个 $k\in\mathbb{N}$，存在自然数 $n_k$ 使

$$mE(|f_{n_k}-f|\geqslant 1/2^k)<1/2^k,$$

并且可以假定 $n_1<n_2<\cdots$．

令 $E_k=E(|f_{n_k}-f|\geqslant 1/2^k)$，$R_n=\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}E_k$，则

$$mR_n<\sum_{k=n}^{\infty}1/2^k=1/2^{n-1},$$

因此

$$m(\overline{\lim}\,E_n)=\lim mR_n=0．$$

但在 $E-\overline{\lim}E_n$ 上，我们有 $f_n(x)$ 处处收敛于 $f(x)$。其实，$x\in E-\overline{\lim}E_n$ 表明存在某个 $n_0$ 使 $x\,\overline{\in}\,R_{n_0}$．因而当 $k\geqslant n_0$ 时，$x\,\overline{\in}\,E(|f_{n_k}-f|\geqslant 1/2^k)$，即当 $k\geqslant n_0$ 时，$|f_{n_k}(x)-f(x)|<1/2^k$．这就表明 $f_{n_k}(x)$ 在 $E-\overline{\lim}E_n$ 上收敛于 $f(x)$．

充分性。假定条件成立，而 $f_n$ 不测度收敛于 $f$．那么存在某个 $\varepsilon>0$，使 $mE(|f_n-f|\geqslant\varepsilon)$ 不收敛于 0（当 $n\to\infty$）．因此有自

然数集的子列 $\{n_k\}_{k\in\mathbf{N}}$, 使极限 $\lim\limits_{k\to\infty} mE(|f_{n_k}-f|\geqslant\varepsilon)$ 存在且不等于 0. 此式表明, 子列 $\{f_{n_k}\}$ 的任何子列 $\{f_{n_{k_i}}\}$ 均不可能几乎处处收敛于 $f$. 因为, 如果不然, 据叶果洛夫定理, $\{f_{n_{k_i}}\}$ 将要近一致收敛于 $f$, 而此与所得推断矛盾.

**定理 2-3 设 $f_n(x)$ 在可测集 $E$ 上测度收敛于 $f(x)$, $g_n(x)$ 在 $E$ 上测度收敛于 $g(x)$, 则有**

(i) $af_n+bg_n$ **测度收敛于** $af+bg$, 这里 $a,b$ 为实数.

(ii) $|f_n|$ **测度收敛于** $|f|$.

(iii) $\sup(f_n,g_n)$ **测度收敛于** $\sup(f,g)$, $\inf(f_n,g_n)$ **测度收敛于** $\inf(f,g)$.

**证** (i)对任意的 $\varepsilon>0$, 我们有

$$E(|af_n+bg_n-af-bg|\geqslant\varepsilon)$$
$$\subset E(|a||f_n-f|\geqslant\varepsilon/2)\cup E(|b||g_n-g|\geqslant\varepsilon/2),$$

且 $a,b$ 中有一个为 0 时, 右边相应的集可以略去. 不妨设 $ab\neq0$. 那么有

$$mE(|af_n+bg_n-af-bg|\geqslant\varepsilon)$$
$$\leqslant mE\left(|f_n-f|\geqslant\frac{\varepsilon}{2|a|}\right)+mE\left(|g_n-g|\geqslant\frac{\varepsilon}{2|b|}\right),$$

由于 $f_n,g_n$ 分列测度收敛于 $f,g$, 上式右边两项当 $n\to\infty$ 时均趋于 0, 因而左边亦然, (i)得证.

(ii)可由包括式

$$E(||f_n|-|f||\geqslant\varepsilon)\subset E(|f_n-f|\geqslant\varepsilon)$$

得到.

(iii)应用公式

$$\sup(f,g)=\frac{1}{2}(f+g+|f-g|);$$

$$\inf(f,g)=\frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$$

并据(i)与(ii)得出.

容易看出，设 $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$，则略去一个零测度集不计以外，极限 $f$ 是唯一的. 关于测度收敛情形是否有同样结论？答案是肯定的. 就是说，如果 $f_n$ 在 $E$ 上测度收敛于 $f$，又测度收敛于 $g$，则必有 $f\sim g$. 这可以从定理 2.3 推出，或直接根据包括式

$$E(|f-g|\geqslant\varepsilon)\subset E(|f_n-f|\geqslant\varepsilon/2)\cup E(|f_n-g|\geqslant\varepsilon/2)$$

看出来. 实际上，由此式可知，对任何 $\varepsilon>0$，$mE(|f-g|\geqslant\varepsilon)=0$. 但

$$E(f\neq g)=\bigcup_{n=1}^{\infty}E(|f-g|\geqslant 1/n),$$

故

$$mE(f\neq g)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}mE(|f-g|\geqslant 1/n)=0.$$

## §3. 可测函数的构造

对于某些复杂的函数，常常希望用较简单的函数来了解它，由此获得足够的认识. 例如用多项式来逼近连续函数或用幂级数表示解析函数等等. 本节我们研究如何由连续函数来了解可测函数，并得到关于可测函数的构造定理.

已经知道，利用特征函数可以将 $E$ 上简单函数表成

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{n}c_k\chi_{e_k}(x),$$

其中 $e_k\,(k=1,2,\cdots,n)$ 互不相交，$E=\bigcup_{k=1}^{n}e_k$，而 $\chi_{e_k}(x)$ 是 $e_k$ 的特征函数. 显然，当 $x\in e_k$ 时，$\varphi(x)=c_k$，$k=1,2,\cdots,n$.

在 §2 中已经提到可测函数可用简单函数来逼近，由于可测集

可用闭集来接近. 因此我们期望,可测函数能用连续函数来逼近这里我们只讨论可测函数的构造定理, 并给出两种形式. 回顾一下定义 1.2, 我们已有了函数 $f(x)$ 在一个集 $E$ 上连续的概念。有时,函数 $f(x)$ 在 $E$ 上不一定连续,但看成只定义在 $E$ 的子集 $E_0$ 上时是连续的,就说 $f(x)$ 限制在 $E_0$ 上是连续的.

例如,定义在区间[0, 1] 的狄里希莱函数 $\psi(x)$, 当限制在[0, 1]中无理数集 $I$ 上是连续的. 因为此时在 $I$ 上 $\psi(x)$ 恒等于零.

**定理 3.1 设 $f(x)$ 是有界可测集 $E$ 上几乎处处有限的可测函数, 则对任意的 $\varepsilon>0$, 存在闭集 $F\subset E$, $m(E-F)<\varepsilon$, 而 $f(x)$ 限制在 $F$ 上是连续的.**

**证** 第一步. 先对简单函数证明定理. 设 $f(x)$ 为 $E$ 上简单函数:

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n} c_k\chi_{e_k}(x);$$

其中 $e_k$ 等互不相交, 且 $E=\bigcup_{k=1}^{n} e_k$, $c_k$ 为常数。那么对任意 $\varepsilon>0$ 与每个 $k=1,2,\cdots,n$, 存在闭集 $A_k\subset e_k$ 使

$$m(e_k-A_k)<\varepsilon/n,\quad k=1,2,\cdots,n.$$

令 $A=\bigcup_{k=1}^{n} A_k$, 则 $A$ 为闭集, 且 $m(E-A)=\sum_{k=1}^{n}(e_k-A_k)<\varepsilon$. 显然, $f(x)$ 限制在 $A$ 上是连续的,这是因为 $e_k$ 等互不相交, 从而闭集 $A_k$ 等亦然; 并且在每个 $A_k$ 上 $f(x)$ 为常数, 故我们的论断成立.

第二步. 讨论一般可测函数情形. 由于 $f(x)$ 有分解: $f(x)=f_+(x)-f_-(x)$, 只须对非负函数证明即可. 于是设 $f(x)\geqslant 0$. 据定理 1.3, 存在简单函数列 $f_n(x)$, 使

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x),\quad x\in E.$$

任取 $\varepsilon>0$. 对每个 $f_n(x)$ 应用第一步所得结果，知存在闭集$F_n\subset E$, $m(E-F_n)<\varepsilon/2^{n+1}$, 而 $f_n(x)$ 限制在 $F_n$ 上是连续的. 令 $F_0=\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, 则 $F_0$ 为闭集, 且

$$m(E-F_0)=m\bigcup_{n=1}^{\infty}(E-F_n)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}m(E-F_n)$$

$$<\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon/2^{n+1}=\varepsilon/2.$$

另一方面，既然 $f_n$ 在 $F_0$ 上处处收敛于 $f$, 据定理 2.1 与第二章定理 3.1, 存在闭集 $F\subset F_0$ 使 $m(F_0-F)<\varepsilon/2$, 而在 $F$ 上 $f_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$. 这样, $f(x)$ 限制在 $F$ 上是连续的（证明方法与数学分析中一样，只是把区间换成闭集而已），同时，由于

$$E-F\subset(E-F_0)\cup(F_0-F),$$

有

$$m(E-F)\leqslant m(E-F_0)+m(F_0-F)<\varepsilon.$$

定理证完。

**注** 定理 3.1 中的条件 $E$ 为有界可以去掉. 这时对每个 $k\in\mathbb{Z}$, 令 $E_k=E\cap(k,k+1)$, 则 $E_k$ 为有界可测集. 对每个 $E_k$ 应用已证明结果，便得闭集 $F_k\subset E_k$, $m(E_k-F_k)<\varepsilon/2^{|k|+2}$, 而$f(x)$限制在 $F_k$ 上是连续的. 令 $F=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}F_k$, 则容易证实, $F$ 是 $E$ 的闭子集, $m(E-F)<\varepsilon$ 且 $f(x)$ 限制在 $F$ 上是连续的.

所证定理称为鲁津(Н.Н.Лузин) 定理, 它给出可测函数的一种构造。由于闭集上连续函数是可测的，不难证明，定理中所述结论还是使函数为可测的一个充分条件. 这样，这个条件可作为可测函数的定义，建立了可测函数的另一种观点.

**例** 试以定理 3.1 中条件作为可测函数的定义，证明在可测

集 $E$ 上的两个可测函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的和是可测的.

设 $\varepsilon>0$. 因 $f$ 与 $g$ 可测,存在闭子集 $F_1$ 与 $F_2$, $m(E-F_1)<\varepsilon/2$, $m(E-F_2)<\varepsilon/2$, 而 $f(x)$, $g(x)$ 分别限制在 $F_1,F_2$ 上是连续的. 显然,和函数 $f(x)+g(x)$ 限制在闭集 $F_1\cap F_2$ 上是连续的,而

$$m(E-(F_1\cap F_2))=m((E-F_1)\cup(E-F_2))<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

据所述可测函数的新定义, $f+g$ 是 $E$ 上的可测函数.

我们指出,在鲁津定理中,函数限制在闭集上连续有时应用起来不方便,须要改成在整个实直线上连续. 为此我们给出鲁津定理的另一形式:

**定理 3.2 设 $f(x)$ 是有界可测集 $E$ 上几乎处处有限的可测函数,则对任意的 $\varepsilon>0$,存在实直线上连续函数 $g(x)$,满足** $mE(f\neq g)<\varepsilon$.

**证** 据定理 3.1, 对 $\varepsilon>0$,存在 $E$ 的闭子集 $F$,使 $m(E-F)<\varepsilon$ 而 $f$ 限制在 $F$ 上是连续的.

令 $G=\mathscr{C}F$, 则 $G$ 为开集,假定它有结构表示$G=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(\alpha_k,\beta_k)$,这里$(\alpha_k,\beta_k)$等是互不相交的开区间,可能是有限区间或无限区间. 现在定义 $g(x)$ 如下. 当 $x\in F$ 时令 $g(x)=f(x)$, 当 $x\overline{\in}F$ 时,我们定义 $g(x)$ 在 $G$ 的每个构成区间上为线性函数并保持端点处的连续性. 详细地说,当 $x\in(\alpha_k,\beta_k)$ 并且这种区间是有限区间时,令

$$g(x)=f(\alpha_k)(\beta_k-x)(\beta_k-\alpha_k)^{-1}+f(\beta_k)(x-\alpha_k)(\beta_k-\alpha_k)^{-1};$$

当 $x$ 所属的构成区间是无限区

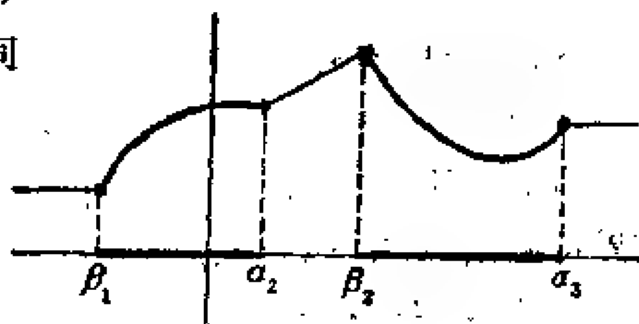



图 12 $F=[\beta_1,\alpha_2]\cup[\beta_2,\alpha_3]$

间，例如 $x\in(\alpha,\infty)$ 时，则令 $g(x)=f(\alpha)$；而对 $x\in(-\infty,\beta)$，则令 $g(x)=f(\beta)$（参看图 12）.

这样，$g(x)$ 在实直线上有定义，并且容易看出

$$mE(f\neq g)\leqslant m(E-F)<\varepsilon.$$

因此如能证明 $g(x)$ 在实直线上处处连续，则定理得证.

当 $x\in G$ 时，由上述作法易见 $g(x)$ 连续. 设 $x_0\in F$. 则对任意的 $\varepsilon>0$，有 $\delta>0$，使当 $x\in F\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 分别考虑 $g(x)$ 在 $x_0$ 的左与右连续性。如果 $(x_0-\delta,x_0)\cap F=\varnothing$，由于 $x_0\in F$，它是 $G$ 的某个构成区间的右端点. 注意 $g(x)$ 在 $G$ 的每个构成区间上为线性的，有 $\alpha'<x_0$ 使当 $x\in(\alpha',x_0)$ 时 $|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon$；如果 $(x_0-\delta,x_0)\cap F\neq\varnothing$，设 $\alpha''\in(x_0-\delta,x_0)\cap F$，则当 $x\in[\alpha'',x_0)\cap F$ 时，有 $g(x)=f(x)$，$g(x_0)=f(x_0)$，故 $|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon$，而当 $x\in(\alpha'',x_0)\cap G$，例如 $x\in(\alpha_k,\beta_k)$（$G$ 的某个适当的构成区间）时，则由

$$|g(\alpha_k)-g(x_0)|<\varepsilon \text{ 与 } |g(\beta_k)-g(x_0)|<\varepsilon$$

以及 $g$ 在 $(\alpha_k,\beta_k)$ 上的线性可得

$$|g(x)-g(x_0)|\leqslant\max\{|g(\beta_k)-g(x_0)|,|g(\alpha_k)-g(x_0)|\}<\varepsilon.$$

总之，不论那一种情况，都可求出 $x_0$ 的左邻域 $(\alpha,x_0]$（$\alpha$ 为上面的 $\alpha'$ 或 $\alpha''$）使当 $x\in(\alpha,x_0]$ 时有 $|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon$。这表明 $g$ 在 $x_0$ 左连续. 同理可证 $g$ 在 $x_0$ 右连续. 于是 $g$ 在 $x_0$ 的连续性得证.

这样，定理得到了证明.

在第五章讨论函数空间的可分性时，我们将要应用当 $E$ 为有限区间情形的定理 3.2. 并且由定理的证明看出，如果 $f(x)$ 是有界可测函数，$|f(x)|\leqslant M$ 时，定理中的函数 $g(x)$ 可以要求满足同样的界，$|g(x)|\leqslant M$.

# 第三章　习　　题

1．设 $f(x),g(x)$ 为 $E$ 上可测函数，试证 $E(f>g)$ 是可测集.

2．证明 $f(x)$ 是 $E$ 上可测函数的充要条件是：对任一有理数 $r$，集 $E(f>r)$ 恒可测．如果这种集 $E(f=r)$ 恒可测，问 $f(x)$ 是否可测？

3．设 $f(x)$ 是 $E$ 上可测函数，$G$、$F$ 分别为 $\mathbb{R}$ 中的开集与闭集．试问 $E(f\in G)$，$E(f\in F)$ 是否可测，这里记号 $E(f\in A)=E(x:f(x)\in A)$.

4．(i) 证明 $S-\overline{\lim}A_n=\underline{\lim}(S-A_n)$.

(ii)设 $A_n$ 是下述点集：当 $n$ 为奇数时，$A_n=\left(0,1-\frac{1}{n}\right)$；$n$ 为偶数时，$A_n=\left(\frac{1}{n},1\right)$．证明 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有极限，并求之.

5．设 $f(x)$、$f_n(x)(n\in\mathbb{N})$ 是定义在区间 $E=[a,b]$ 上的实函数，$r$ 为自然数，用记号 $E(|f_n-f|<1/r)$ 表示 $E$ 中满足 $|f_n(x)-f(x)|<1/r$ 的点所成的集．试证集 $\bigcap\limits_{r=1}^{\infty}\underline{\lim}_{n}E(|f_n-f|<1/r)$ 是 $E$ 中使 $f_n(x)$ 收敛于 $f(x)$（当 $n\to\infty$）的点集.

6．用 $\chi_E(x)$ 表示集 $E$ 的特征函数，试证对于任一集列 $\{E_n\}$，有

$$\chi_{\overline{\lim}E_n}(x)=\overline{\lim}\chi_{E_n}(x),\ \chi_{\underline{\lim}E_n}(x)=\underline{\lim}\chi_{E_n}(x).$$

从而集列 $E_n$ 的极限存在等价于函数列 $\chi_{E_n}(x)$ 的极限存在.

7．设 $\{f_n\}$ 是 $E$ 上可测函数列．试证它的收敛点集与发散点集都是可测的.

提示：可以利用第 5 题.

8．设 $E$ 是 $[0,1]$ 中的一个不可测集，令

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\in E,\\ -x, & x\notin E.\end{cases}$$

问 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是否可测？$|f(x)|$ 是否可测？

9．设 $f_n(x)$ 是 $E$ 上几乎处处有限的可测函数列，而 $f_n(x)$ 在 $E$ 上几乎处处收敛，则存在常数 $c$ 与正测度集 $E_0\subset E$，使在 $E_0$ 上，对一切 $n$ 有 $|f_n(x)|<c$.

10. 试作 $E=[0,1]$ 上的可测函数 $f(x)$，使对任何连续函数 $g(x)$ 有 $mE(f\neq g)\neq 0$。此结果与定理 3.1 有无矛盾？

11. 设 $f(x)$ 是 $-\infty<x<\infty$ 上的连续函数，$g(x)$ 是 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的可测函数，则 $f(g(x))$ 是可测函数.

12. 设 $f(x)$ 是 $E$ 上可测函数，$\varphi(y)$ 是 $f(E)$ 上的单调增函数，则 $\varphi(f(x))$ 在 $E$ 上可测.

13. 设 $f(x)$ 是 $E$ 上可测函数，$B$ 是 $\mathbb{R}$ 中的波雷尔集. 试证 $f^{-1}(B)$ 是可测集. 又当 $B$ 是任意可测集时，$f^{-1}(B)$ 是否仍可测？

14. 试在 $\mathbb{R}$ 上定义一个实函数，使它在每个区间上的限制均不可测.

15. 设函数列 $f_n(x)$ 在有界集 $E$ 上近一致收敛于 $f(x)$，试证 $f_n(x)$ 几乎处处收敛于 $f(x)$.

16. 设函数列 $f_n(x)$ 在 $E$ 上测度收敛于 $f(x)$，且在 $E$ 上几乎处处有 $f_n(x)\leqslant g(x)$，$n\in\mathbb{N}$. 试证，在 $E$ 上几乎处处有 $f(x)\leqslant g(x)$.

17. 设函数列 $f_n(x)$ 在 $E$ 上测度收敛于 $f(x)$，且几乎处处有 $f_n(x)\leqslant f_{n+1}(x)$，$n\in\mathbb{N}$，则 $f_n(x)$ 几乎处处收敛于 $f(x)$.

18. 设函数列 $f_n(x)$ 在 $E$ 上测度收敛于 $f(x)$，而 $f_n(x)\sim g_n(x)$，$n\in\mathbb{N}$，则 $g_n(x)$ 在 $E$ 上也测度收敛于 $f(x)$.

19. 设 $mE<\infty$，在 $E$ 上几乎处处有限的可测函数列 $f_n(x)$ 与 $g_n(x)$ 分别测度收敛于 $f(x)$ 与 $g(x)$. 试证 $f_n(x)g_n(x)$ 测度收敛于 $f(x)g(x)$.

提示：利用公式 $ab=\frac{1}{4}\{(a+b)^2-(a-b)^2\}$.

20. 试构造 $[0,1]$ 上的连续函数列 $f_n(x)$，$n\in\mathbb{N}$，使满足 (i) $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上处处收敛于 0，但 (ii) $f_n(x)$ 在任何子区间上不一致收敛于 0.

21. 设函数列 $\{f_n\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处收敛于有限函数 $f$. 试证，存在可测集列 $\{E_k\}$，$k\in\mathbb{N}$，使在每个 $E_k$ 上 $f_n$ 一致收敛于 $f$ 而 $\complement(\bigcup_k E_k)$ 为零测度集.

22. 试作 $[0,1]$ 上的可测函数序列 $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$，使它处处收敛于某个几乎处处非零的函数 $f(x)$，但序列 $\{1/f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 不测度收敛于 $1/f(x)$.

# 第四章　勒贝格积分

本章在前面所讲的测度论基础上讨论勒贝格积分，它是本书的重点内容．我们由简单函数的积分讲起，然后讲一般可测函数的积分，并讨论积分的性质，特别是勒维（B.Levi）定理．法杜(P.Fatou)定理与勒贝格定理，即平常所谓积分中的三大定理．所有的讨论基本上适用于多维情形．本章还讲了重积分交换次序的傅比尼（G.Fubini）定理，就一维情形比较黎曼积分与勒贝格积分，以及微分与积分的联系，*LS* 积分大意等．

## §1　勒贝格积分的引入

勒贝格积分是20世纪初(1902年)法国数学家勒贝格提出来的，它的发展比数学分析中所讲的黎曼积分(1854年)要迟半个世纪。我们知道，黎曼积分在求积、物体重心、矩量等问题中起着重要作用，但这些都限于古典范围．近代物理与概率论的发展，要求更为精密的数学工具．而且可以说，黎曼可积函数主要是连续函数或者不连续点不太多的函数，这对量子力学中的物理量与一般随机量的数学期望值来说显然是不够用的．就从数学分析中的一些重要结果如积分与极限交换次序，重积分交换次序，牛顿–莱布尼兹公式等来看，在黎曼积分情形所加条件，没有勒贝格积分情形那样方便．用勒贝格积分处理这一类问题是相当灵活与自然的．在数学史上，正是由于这一类问题的提出，才促使勒贝格积分的产生．事实上，如果不用勒贝格测度概念，数学分析中的一些道理很难讲清楚(还可以举出单调函数可微性，傅立叶(J.B.Fourier)级

数中巴塞弗(M.A.Parseval)公式，黎曼可积函数的充要条件等问题)。但同时应指出，平常遇到的一些问题，要求象数学分析那样处理也就够了.

勒贝格积分在下面将简称为积分，它的处理方法很多. 这里采用的方法，是以测度为基础，先讲简单函数的积分，再讲一般可测函数的积分. 对于正值函数情形，积分实际上相当于某一特殊类型集(较函数的定义集的维数多一)的测度. 这里所用的方法与第二章处理测度的方法相近.

现在先引进简单函数的积分. 以下总假定 $E$ 为有界可测集，但不限定是一维的.

**定义 1.1** 设 $E$ 上简单函数有表示，

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{n} y_k \chi_{e_k}(x),$$

其中 $e_k=E(\varphi=y_k)$ 等为互不相交的可测集，$y_k$ 等互异而 $\chi_{e_k}$ 表示 $e_k$ 的特征函数. 称和 $\sum_{k=1}^{n} y_k me_k$ (注意，这是有限项和)为简单函数 $\varphi(x)$ 在 $E$ 上的积分，并记为，

$$\int_E \varphi(x)dm=\sum_{k=1}^{n} y_k m e_k. \tag{1}$$

这里积分记号下的 $dm$，我们不采用 $dx$. 以示积分运算依赖于所考虑的测度 $m$. (1)中积分有时也简写成 $\int_E \varphi\, dm$.

容易验明，在定义中可以不要求 $y_k$ 等两两互异. 其实，设 $\varphi$ 又可表示为 $\varphi(x)=\sum_j c_j \chi_{E_j}(x)$，其中 $E=\bigcup_j E_j$，$E_j$ 等互不相交而 $c_j$ 等可以有相同的，则据测度的有限可加性，有

$$\begin{aligned}\sum_j c_j m E_j &= \sum_k \Big(\sum_{c_j=y_k} c_j m E_j\Big) = \sum_k y_k \sum_{c_j=y_k} mE_j \\ &= \sum_k y_k m\Big(\bigcup_{c_j=y_k} E_j\Big) = \sum_k y_k m e_k,\end{aligned}$$

因此

$$\int_E \varphi(x)dm=\sum_k y_k m e_k=\sum_i c_i m E_i.$$

这就说明，简单函数的积分同函数的表示式无关，积分值是唯一确定的(只是右边的和另外分组而已).

从而易知，如果简单函数 $\varphi(x)$ 的正部与负部分别为 $\varphi_+(x)$ 与 $\varphi_-(x)$，则有

$$\int_E \varphi(x)\,dm=\int_E \varphi_+(x)dm-\int_E \varphi_-(x)dm. \qquad (2)$$

**引理 1.1 简单函数的积分具有线性与可加性：**(i)**设** $\varphi_1,\varphi_2$ **是** $E$ **上简单函数，** $a_1,a_2$ **是常数，则有**

$$\int_E (a_1\varphi_1(x)+a_2\varphi_2(x))dm=a_1\int_E \varphi_1(x)dm+a_2\int_E \varphi_2(x)dm.$$

(ii) **设** $\varphi$ **是** $E$ **上简单函数，** $E=E_1\cup E_2$, $E_1,E_2$ **为互不相交的可测集，则**

$$\int_E \varphi(x)\,dm=\int_{E_1} \varphi(x)dm+\int_{E_2} \varphi(x)dm.$$

**证** 先证可加性(ii). 当 $\varphi$ 限制在可测子集 $E_1$ 或 $E_2$ 上时，它仍是简单函数，因而 $\int_{E_1}\varphi\,dm$, $\int_{E_2}\varphi dm$ 均有定义. 设 $\varphi$ 有表示

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^n y_k\chi_{e_k}(x) \qquad (x\in E),$$

那么

$$\begin{aligned}\int_E \varphi dm&=\sum_k y_k m e_k=\sum_k y_k m((E_1\cap e_k)\cup(E_2\cap e_k))\\&=\sum_k y_k m(E_1\cap e_k)+\sum_k y_k m(E_2\cap e_k)\\&=\int_{E_1}\varphi dm+\int_{E_2}\varphi dm.\end{aligned}$$

再证线性(i). 设

$$\varphi_1(x)=\sum_{k=1}^{n_1} y^{(1)}_k \chi_{e^{(1)}_k}(x),\ \varphi_2(x)=\sum_{j=1}^{n_2} y^{(2)}_j \chi_{e^{(2)}_j}(x),$$

则 $a_1\varphi_1+a_2\varphi_2$ 也是简单函数，因而它有积分，容易看出，对每一对 $k,j$ 有

$$\int_{e^{(1)}_k \cap e^{(2)}_j}(a_1\varphi_1(x)+a_2\varphi_2(x))dm$$
$$=(a_1 y^{(1)}_k+a_2 y^{(2)}_j)m(e^{(1)}_k\cap e^{(2)}_j)$$
$$=a_1\int_{e^{(1)}_k \cap e^{(2)}_j}\varphi_1(x)dm+a_2\int_{e^{(1)}_k \cap e^{(2)}_j}\varphi_2(x)dm.$$

将上式对 $k,j$ 求和，注意到 $E=\bigcup_{k,j}(e_k^{(1)}\cap e_j^{(2)})$ 并利用已证的可加性，即得

$$\int_E(a_1\varphi_1(x)+a_2\varphi_2(x))dm=a_1\int_E\varphi_1(x)dm+a_2\int_E\varphi_2(x)dm.$$

对一般可测函数的积分，定义如下。

**定义 1.2** 设 $f(x)$ 是有界可测集 $E$ 上的可测函数. 对于 $f(x)\geqslant 0$ 的情形，取简单函数 $\varphi(x)$ 满足 $0\leqslant\varphi(x)\leqslant f(x)$ $(x\in E)$，令 $\varphi$ 变动，定义 *$f(x)$ 在 $E$ 上的积分*为

$$\int_E f(x)dm=\sup_{0\leqslant\varphi\leqslant f}\int_E\varphi(x)dm. \tag{3}$$

此式右边为非负数或 $\infty$. 如果此量为有限，则称 *$f(x)$ 在 $E$ 上可积*，否则只说 *$f(x)$ 在 $E$ 上的积分为 $\infty$*（这时 $f$ 在 $E$ 上有积分但不可积）.

对于一般可测函数 $f(x)$，当 $\int_E f_+dm$ 与 $\int_E f_-dm$ 不同时为 $\infty$ 时，定义 *$f(x)$ 在 $E$ 上的积分*为

$$\int_E f(x)dm=\int_E f_+(x)dm-\int_E f_-(x)dm. \tag{4}$$

当此式右边两项均有限时，也只有在这时，$f(x)$ 的积分是有限的，我们称 *$f$ 在 $E$ 上可积*. 记为 $f\in L_E$ 或简记为 $f\in L$. 在其余情形，只说 $f(x)$ 在 $E$ 上有积分（$\infty$ 或 $-\infty$；分别对应于 $\infty-c$ 或 $c-$

$\infty$, $c$ 为实数). 当然, 出现 $\infty-\infty$ 时, 积分是没有意义的.

注意, 当 $f(x)$ 是 $E$ 上简单函数时, $f(x)$的积分定义(3), (4)分别与上面定义(1), (2)相一致.

由积分定义可以推出几点简单结论. 如果可测函数 $f(x)$, $g(x)$在$E$上几乎处处满足 $0\leqslant g(x)\leqslant f(x)$, 则当 $f$ 可积时, $g$ 也可积且 $g$ 的积分不超过 $f$ 的积分. 这是因为,

$$\int_E g(x)dm\leqslant \sup_{0\leqslant\varphi\leqslant g}\int_E \varphi(x)dm\leqslant \sup_{0\leqslant\psi\leqslant f}\int_E\psi(x)dm$$

$$=\int_E f(x)dm<\infty,$$

这里利用了简单函数类$\{\varphi:0\leqslant\varphi\leqslant g\}$含在类$\{\psi:0\leqslant\psi\leqslant f\}$中, 因而相应于前者的上确界不可能比后者大。此外, 还可以看出, 第一, 有界可测函数必可积。第二, 可积函数必几乎处处有限。

其实, 假定有常数$M$使$|f(x)|\leqslant M(x\in E)$, 那么对于$f$的正部、负部也有 $f_+(x)\leqslant M$, $f_-(x)\leqslant M$. 故据积分的定义知

$$\int_E f_+(x)dm=\sup_{0\leqslant\varphi\leqslant f_+}\int_E\varphi(x)dm\leqslant\sup_{0\leqslant\varphi\leqslant M}\int_E\varphi(x)dm$$

$$\leqslant M\cdot mE<\infty.$$

同理

$$\int_E f_-(x)dm<\infty.$$

因而(4)右边的差为有限数, 即 $f$ 于$E$上可积. 并且由证明容易看出, $f(x)$的积分的绝对值不超过 $MmE$.

为了证明可积函数是几乎处处有限的, 我们用反证法. 令

$$E_1=E(f=\infty), E_2=E(f=-\infty),$$

并假定两集 $E_1$ 与 $E_2$ 中至少有一个集的测度为正数, 不妨设 $mE_1>0$. 那么对任何 $n\in\mathbb{N}$, 有$f_+(x)\geqslant n\chi_{E_1}(x)$, $x\in E$. 据积分定义可得

$$\int_E f_+(x)dm \geqslant n \cdot mE_1,\ n \in \mathbf{N},$$

因此$\int_E f_+ dm=\infty$，而(4)右边不可能为有限数，这同 $f$ 的可积性假设相矛盾.

勒贝格积分还有一个重要特性：对于给定的可测函数 $f$，$f$ 与 $|f|$ 的可积性相同. 事实上，当 $|f|$ 可积时，据 $f_+(x) \leqslant |f(x)|$，$f_-(x) \leqslant |f(x)|$ 即知 $f_+$ 与 $f_-$ 均可积，因而 $f$ 也可积. 反之，当 $f$ 可积时，$f_+$ 与 $f_-$ 均可积．令 $E_+=E(f\geqslant 0)$，$E_-=E(f<0)$．设 $\varphi_+$，$\varphi_-$ 为 $E$ 上分别满足 $0\leqslant\varphi_+\leqslant f_+$，$0\leqslant\varphi_-\leqslant f_-$ 的简单函数，则由 $\varphi_+$，$\varphi_-$ 合成的简单函数

$$\varphi=\varphi_+ + \varphi_-$$

满足 $0\leqslant\varphi\leqslant|f|$；且反之亦然. 由此据简单函数积分的可加性，有

$$\begin{aligned}
\sup_{0\leqslant\varphi\leqslant|f|}\int_E \varphi(x)dm &= \sup_{0\leqslant\varphi\leqslant|f|}\left\{\int_{E_+}\varphi(x)dm+\int_{E_-}\varphi(x)dm\right\} \\
&= \sup_{0\leqslant\varphi\leqslant|f|}\int_{E_+}\varphi(x)dm+\sup_{0\leqslant\varphi\leqslant|f|}\int_{E_-}\varphi(x)dm \\
&= \sup_{0\leqslant\varphi_+\leqslant f_+}\int_E \varphi_+(x)dm+\sup_{0\leqslant\varphi_-\leqslant f_-}\int_E \varphi_-(x)dm \\
&= \int_E f_+(x)dm+\int_E f_-(x)dm,
\end{aligned}$$

即 $|f|$ 可积且

$$\int_E |f(x)|dm=\int_E f_+(x)dm+\int_E f_-(x)dm.$$

由上面初步讨论，我们已看到了积分的一些特点，它较黎曼积分有不少便利之处.

如果要考虑无界集上的积分，可以采用处理无界集测度的方

法。设 $f(x)$ 是定义在整个空间 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数. 取一渐张的方体列(当空间维数 $n>1$ 时，考虑半闭方体列) $\Delta_k$: $\Delta_1\subset\Delta_2\subset\cdots$, 且 $\mathbb{R}^n=\bigcup_k \Delta_k$. 若极限

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\Delta_k}|f(x)|dm$$

存在且有限(此极限必不依赖于$\{\Delta_k\}$的选择), 就称 $f(x)$ 在空间 $\mathbb{R}^n$ 上可积. 积分记为

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx=\lim_{k\to\infty}\int_{\Delta_k} f(x)dx,$$

这时极限显然存在，并且绝对收敛性蕴含条件收敛性. 如果所考虑的函数 $f(x)$ 只在 $\mathbb{R}^n$ 的一个子集 $E$ 上有定义. 那么 $f(x)$ 在 $E$ 上的积分可在形式改写成在整个空间 $\mathbb{R}^n$ 上的积分来讨论. 这是因为，引进集 $E$ 的特征函数 $\chi_E(x)$ 时，可以认为函数$f(x)\chi_E(x)$在整个空间有定义(在 $\mathscr{C}E$ 上它等于 0)，
而且有

$$\int_E f(x)dm=\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\ \chi_E(x)dm,$$

于是 $f(x)$在 $E$ 上的可积性就化为 $f(x)\chi_E(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上的可积性。

最后，我们简单地指出积分的几何意义(参看图 13). 考察一维点集 $E$ 上的可积函数 $f(x)$，用 $E(f_+)$, $E(f_-)$ 分别表示二维点集

$$E(f_+)=\{(x,y):x\in E,\ 0\leqslant y\leqslant f_+(x)\},$$
$$E(f_-)=\{(x,y):x\in E,\ 0\leqslant y\leqslant f_-(x)\},$$

则积分$\int_E f(x)dm$ 的几何意义是二维点集 $E(f_+)$ 的"面积"(测度)减去二维点集 $E(f_-)$的"面积"之差，即

$$\int_E f(x)dm=mE(f_+)-mE(f_-).$$

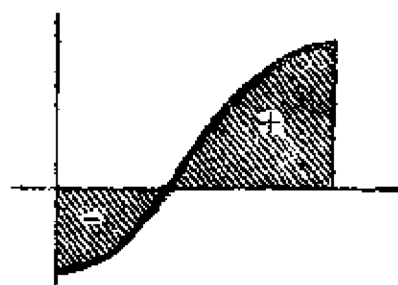



图 13 积分的几何意义

这与黎曼积分情形很相似，我们不准备详细论述了.

## §2 积分的性质

本节讨论积分的基本性质.

**定理 2.1（有限可加性） 设 $f(x)$ 是有界可测集 $E$ 上的可积函数，$E=\bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$，$E_k$ 等均可测且两两不相交，则有**

$$\int_E f(x)\,dm=\int_{E_1} f(x)\,dm+\int_{E_2} f(x)dm+\cdots\cdots+\int_{E_n} f(x)dm.$$

**证** 据积分的定义，不妨假定 $f\geqslant 0$. 下面就 $n=2$ 情形证明，一般情形可用归纳法完成. 设 $E=E_1\cup E_2$, $E_1\cap E_2=\varnothing$, $E_1$, $E_2$ 均可测. 于是有

$$\int_E f dm=\sup_{0\leqslant\varphi\leqslant f}\int_E \varphi dm=\sup_{0\leqslant\varphi\leqslant f}\left\{\int_{E_1}\varphi\, dm+\int_{E_2}\varphi dm\right\}.$$

因为满足 $0\leqslant\varphi(x)\leqslant f(x)$ $(x\in E)$ 的简单函数 $\varphi(x)$ 可以一分为二，$\varphi_1$ 与 $\varphi_2$，它们分别是限制在 $E_1$, $E_2$ 上满足 $0\leqslant\varphi_1(x)\leqslant f(x)$ $(x\in E_1)$, $0\leqslant\varphi_2(x)\leqslant f(x)(x\in E_2)$的两个简单函数。反之，这样两个简单函数可以合成一个简单函数 $\varphi$，满足 $0\leqslant\varphi(x)\leqslant f(x)$ $(x\in E)$. 因此

$$\sup_{0\leqslant\varphi\leqslant f}\left\{\int_{E_1}\varphi\, dm+\int_{E_2}\varphi dm\right\}$$

$$=\sup_{\substack{0\leqslant\varphi_1\leqslant f\\ 0\leqslant\varphi_2\leqslant f}}\left\{\int_{E_1}\varphi_1\, dm+\int_{E_2}\varphi_2\, dm\right\}$$

$$=\sup_{0\leqslant\varphi_1\leqslant f}\int_{E_1}\varphi_1 dm+\sup_{0\leqslant\varphi_2\leqslant f}\int_{E_2}\varphi_2 dm$$

$$=\int_{E_1} f\,dm+\int_{E_2} f\,dm.$$

故有限可加性成立。

**定理 2.2 (绝对连续性)　设 $f(x)$ 在有界可测集 $E$ 上可积，则对任一正数 $\varepsilon$，有正数 $\delta$，使当 $me<\delta(e\subset E)$ 时就有**

$$\left|\int_e f(x)dm\right|<\varepsilon.$$

**证**　不妨就 $f\geqslant 0$ 来证。据积分定义，有简单函数 $\varphi_0(x)$，$0\leqslant\varphi_0(x)\leqslant f(x)(x\in E)$ 使

$$\int_E\varphi_0(x)\,dm>\int_E f(x)dm-\varepsilon/2,$$

取 $E$ 的子集 $e$，只要满足 $me\cdot\max\ \varphi_0(x)<\varepsilon/2$，就有

$$\int_e\varphi_0(x)dm\leqslant\max\varphi_0(x)\cdot me<\varepsilon/2.$$

又由 $\varphi_0(x)\leqslant f(x)(x\in E)$ 得到 $\int_{E-e} f\,dm\geqslant\int_{E-e}\varphi_0 dm$，故据定理 2.1 得到

$$\int_e f\,dm=\int_E f dm-\int_{E-e} f\,dm<\int_E\varphi_0\,dm+\frac{\varepsilon}{2}-\int_{E-e}\varphi_0 dm$$

$$=\int_e\varphi_0\,dm+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

对一般的可积函数 $f(x)$，可分别考虑它的正部与负部，借用不等式

$$\left|\int_e f dm\right|\leqslant\int_e f_+dm+\int_e f_-dm$$

并利用已证结果来讨论。

定理 2.2 描述的性质称为积分的绝对连续性，它在应用上是很重要的．不难证明，在无界集情形定理仍然成立．

积分的基本特征性质是 $\sigma$ 可加性与线性，我们将分别来讨论．

**定理 2·3**（$\sigma$ 可加性）**设 $f(x)$ 是有界可测集 $E$ 上的可测函数，$E=\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$，$E_k$ 等均可测且两两不相交，则**

$$\int_E f\,dm=\int_{E_1} f\,dm+\int_{E_2} f\,dm+\cdots+\int_{E_k} f\,dm+\cdots.$$

**证** 令 $R_n=E-\bigcup_{k=1}^{n} E_k$．则由假设知 $mR_n\to 0\ (n\to\infty)$．据积分的有限可加性，有

$$\int_E f\,dm-\left\{\int_{E_1} f\,dm+\int_{E_2} f\,dm+\cdots+\int_{E_n} f\,dm\right\}=\int_{R_n} f\,dm.$$

由于 $mRn\to 0(n\to\infty)$，故据积分的绝对连续性，可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{R_n} f\,dm=0.$$

这就证明了积分的 $\sigma$ 可加性．

我们指出，当 $f(x)\geqslant 0$ 时，积分的 $\sigma$ 可加性与测度的 $\sigma$ 可加性很类似。如果把积分看成高一维的测度，前者是后者的特例；如果把测度看成集的特征函数的积分时，则明显地前者又蕴含后者．

为了讨论积分的线性，我们引进一个基本引理．

**基本引理 设 $f(x)$ 是有界可测集 $E$ 上非负可积函数，$\{f_n(x)\}_{n\in N}$ 是满足条件**

$$0\leqslant f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots,\ \lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\ \ (x\in E)$$

**的简单函数列，则**

$$\int_E f(x)dm=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dm.$$

**证** 第一步. 在分析中已经知道, 单调数列恒有极限(指实数或无穷大). 因而对每个 $x\in E$, 极限 $\lim\limits_n f_n(x)$ 存在. 对于任意的自然数 $n$ 与 $p$, 有 $f_n(x)\leqslant f_{n+p}(x)$. 令 $p\to\infty$ 得 $f_n(x)\leqslant f(x)$. 故

$$\int_E f(x)dm\geqslant\int_E f_n(x)dm,$$

从而

$$\int_E f(x)dm\geqslant\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dm;$$

右边极限存在是由于数列 $\left\{\int_E f_n dm\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的单调性. 下面建立相反的不等式.

第二步. 任取 $\varepsilon>0$, 令 $E_n(\varepsilon)=E(f-f_n\geqslant\varepsilon)$, 则

$$\lim_{n\to\infty} mE_n(\varepsilon)=0.$$

其实, 由于 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n(\varepsilon)$ 对每个 $\varepsilon>0$ 都是零测度集 $E(f_n\nrightarrow f)\cup E(f=\infty)$ 的子集, 它的测度为 0. 又因 $\{f_n\}$ 是单调增加序列, $E_n(\varepsilon)$ 是渐缩序列, 据第二章定理 3.6 有

$$\lim_{n\to\infty} mE_n(\varepsilon)=m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n(\varepsilon)\right)=0.$$

于是据定理 2.2 得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n(\varepsilon)} f(x)dm=0.$$

又因为

$$\int_{E(f-f_n<\varepsilon)} f(x)dm\leqslant\int_{E(f-f_n<\varepsilon)}(f_n(x)+\varepsilon)dm$$

$$\leqslant\int_E f_n(x)dm+\varepsilon mE,$$

从而据积分的可加性得

$$\int_E f(x)dm=\int_{E_n(\varepsilon)} f(x)dm+\int_{E(f-f_n<\varepsilon)} f(x)dm$$

$$\leqslant\int_{E_n(\varepsilon)} f(x)dm+\int_E f_n(x)dm+\varepsilon mE.$$

令 $n\to\infty$ 得到

$$\int_E f(x)\,dm\leqslant\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dm+\varepsilon mE.$$

由 $\varepsilon$ 的任意性，有

$$\int_E f(x)dm\leqslant\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dm.$$

合并所得两步结果，便证明了基本引理.

**注** 在基本引理中，若不要求函数 $f(x)$ 可积而只要求它有积分，结论仍然正确. 设简单函数列 $\{f_n(x)\}$ 与非负可测函数 $f(x)$ 满足条件

$$0\leqslant f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots,\quad \lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)\,(x\in E),$$

则

$$\int_E f(x)\,dm=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dm.$$

这个结论当 $f(x)$ 不可积时，成为

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dm=\infty.$$

证明如下。因 $f(x)$ 的积分为 $\infty$，对任何正数 $N$，有一个简单函数 $\varphi(x)$ 适合 $0\leqslant\varphi(x)\leqslant f(x)$ 而

$$\int_E \varphi(x)dm>N.$$

由于 $f_n(x)\to f(x)(n\to\infty)$，令 $g_n(x)=\inf(f_n(x),\ \varphi(x))$，$n\in\mathbf{N}$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)=\varphi(x)$，且显然有

$$0\leqslant g_1(x)\leqslant g_2(x)\leqslant\cdots,$$

序列$\{g_n\}$与它的极限 $\varphi$ 均为简单函数，符合基本引理中的条件，因此对它们应用此引理，即得

$$\int_E\varphi(x)dm=\lim_{n\to\infty}\int_E g_n(x)dm,$$

但 $g_n(x)\leqslant f_n(x)$，故$\int_E g_n(x)dm\leqslant\int_E f_n(x)dm$. 从而

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dm\geqslant\lim_{n\to\infty}\int_E g_n(x)dm=\int_E\varphi(x)dm>N,$$

这就证明了

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dm=\infty.$$

注意，基本引理的结论可以写成

$$\int_E\lim_{n\to\infty}f_n(x)dm=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dm,$$

即所述的是关于函数列的极限与积分交换次序问题. 引理表明，勒贝格积分的极限与积分换序条件较为简单.

回忆第三章定理 1.3，知非负可测函数 $f(x)$ 给定时，满足基本引理中条件的简单函数列 $\{f_n(x)\}$ 可以具体构造出来. 假如先定义了简单函数的积分，借用这个引理就可引进积分的定义. 当研究积分的性质时，不一定非拘泥于原始定义不可，我们应根据具体情况灵活选择方法. 例如下面的定理 2.4 与 2.5，用基本引理来讨论就显得方便些. 它的主要想法是将有关确界的运算化为极限的运算. 当然，这些定理也可以用积分的原始定义来论证. 以

下我们将突出基本引理的作用，并经常使用它。

**定理 2.4 设 $f(x)$ 在 $E$ 上可积，则对任何实数 $c$，$cf(x)$ 也可积，且 $c\int_E f(x)\,dm=\int_E cf(x)dm$.**

**证** 设 $c\geqslant 0$，这时可对 $f$ 的正部、负部分别应用基本引理。取非负递增的简单函数列 $\varphi_n(x)$（根据第三章定理 1.3），

$$0\leqslant\varphi_1(x)\leqslant\varphi_2(x)\leqslant\cdots;\quad \lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f_+(x),$$

并用记号 $(cf)_+$ 表示函数 $cf$ 的正部，则有

$$\int_E(cf)_+\,dm=\lim_{n\to\infty}\int_E(c\varphi_n)dm=c\lim_{n\to\infty}\int_E\varphi_n\,dm$$

$$=c\int_E f_+dm.$$

同理

$$\int_E(cf)_-dm=c\int_E f_-dm.$$

故

$$\int_E(cf)\,dm=\int_E(cf)_+\,dm-\int_E(cf)_-dm$$

$$=c\int_E f_+dm-c\int_E f_-dm=c\int_E fdm.$$

再设 $c<0$，则由 $-f=f_--f_+$，据积分的定义有

$$\int_E(-f)dm=\int_E f_-dm-\int_E f_+\,dm=-\left\{\int_E f_+\,dm-\int_E f_-dm\right\}$$

$$=-\int_E fdm,$$

从而

$$\int_E (cf)dm = -\int_E (-cf)dm = -(-c)\int_E f dm = c\int_E f dm.$$

定理全部得证.

上面叙述中,$(cf)$表示函数:$(cf)(x)=cf(x)$。类似的,记号 $f+g$ 表示函数 $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$,等等,这些都与平常习惯一致.

**定理 2.5　设 $f, g$ 在 $E$ 上均可积,则 $f+g$ 也可积,且**

$$\int_E f dm + \int_E g dm = \int_E (f+g) dm.$$

**证**　设 $f \geqslant 0, g \geqslant 0$ 取两个非负递增的简单函数列 $\{f_n\}$ 与 $\{g_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$, $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)=g(x)$. 据基本引理,

$$\int_E (f+g)dm = \lim_{n\to\infty}\int_E (f_n+g_n)dm$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{\int_E f_n \, dm + \int_E g_n \, dm\right\}$$

$$= \int_E f \, dm + \int_E g \, dm,$$

于是对 $f \geqslant 0, g \geqslant 0$ 的情形定理成立.

对于一般情形,由于

$$(f+g)_+ \leqslant f_+ + g_+,$$

因此,$f_+ + g_+ = (f+g)_+ + h$, $f_- + g_- = (f+g)_- + h$. 其中 $h$ 是非负可测函数,且满足

$$0 \leqslant h \leqslant f_+ + g_+.$$

注意到当 $f, g$ 可积时,$f_+, g_+$ 均可积,因而 $h$ 也可积. 于是根据上面的讨论,有

$$\int_E f_+ \, dm + \int_E g_+ dm = \int_E (f_+ + g_+) dm$$

$$=\int_E[(f+g)_+ + h]dm$$

$$=\int_E(f+g)_+ dm+\int_E hdm;$$

同理有

$$\int_E f_- dm+\int_E g_- dm=\int_E(f+g)_- dm+\int_E hdm.$$

将所得两等式相减，便得

$$\int_E f dm+\int_E gdm=\int_E(f+g)dm.$$

定理 2.4 与 2.5 一起表明积分的线性.

**定理 2.6** **设 $f, g$ 在 $E$ 上均可积，且 $f(x)\leqslant g(x)$，则**

$$\int_E fdm\leqslant\int_E gdm.$$

**证** 由定理 2.4 与 2.5，知 $g(x)-f(x)$ 为非负可积函数，

$$\int_E(g-f)dm=\int_E g dm-\int_E f dm.$$

据积分定义立刻知道上式左边 $\geqslant 0$，故得所需不等式.

我们指出，作为定理的推论，有：设 $A\leqslant f(x)\leqslant B$，其中 $A$，$B$ 是实数，则

$$A\cdot mE\leqslant\int_E fdm\leqslant B\cdot mE.$$

**定理 2.7（唯一性定理）** **设 $f$ 在 $E$ 上可积，则 $\int_E|f|dm=0$ 的充要条件是 $f\sim 0$.**

**证** 充分性．设 $f$ 对等于 0，则据积分的有限可加性，

$$\int_E|f(x)|dm=\int_{E(f=0)}|f(x)|dm+\int_{E(f\neq 0)}|f(x)|dm$$

$$= \sup_{0 \le \varphi \le |f|} \int_{E(f \neq 0)} \varphi(x) dm.$$

由于 $mE(f \neq 0)=0$，易见任意的简单函数在 $E(f \neq 0)$ 上的积分为 0，故 $\int_E |f(x)| dm = 0$.

必要性. 设 $n$ 为自然数. 我们有

$$\int_E |f(x)| dm \geq \int_{E(|f| \geq \frac{1}{n})} |f(x)| dm \geq \frac{1}{n} mE(|f| \geq \frac{1}{n}).$$

从而据 $\int_E |f(x)| dm = 0$ 得知 $mE(|f| \geq \frac{1}{n}) = 0$. 由于集 $E(f \neq 0)$ 可以表成

$$E(f \neq 0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(|f| \geq \frac{1}{n}),$$

故得

$$mE(f \neq 0) \leq \sum_{n=1}^{\infty} mE\left(|f| \geq \frac{1}{n}\right) = 0,$$

这便证明了 $f \sim 0$.

**推论　若可测函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 对等，则由 $f(x)$ 的可积性可推出 $g(x)$ 的可积性，且积分值相同.**

**注 1**　以上的一些定理，例如定理 2.3—2.6，在适当的改述下，对不可积函数但有积分，也可得到相应的命题，读者试参考基本引理后的注加以考虑.

**注 2**　由定理 2.7 的推论可知，某些定理例如定理 2.6 与基本引理等，有关条件并不要求处处成立而只须几乎处处成立，结论仍然正确。这个注对后面的讨论也适用.

**注 3**　上面定理 2.1—2.7，均可以转到无界集情形. 方法是，据无界集上函数积分的定义，先用有界集上积分来逼近，然后再对

有界集情形利用已证结果．由于这种方法是例行的，为避免叙述上的重复，我们都从略，只在下面给出一个代表性的例子．

**例** 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上可积．试证 $f(x)$ 的积分具有绝对连续性．

**证** 取 $\Delta_n=(-n,n)$，$n\in\mathbb{N}$。当 $f$ 可积时，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\Delta_n}|f|\,dm$ 存在为有限．故对任意的 $\varepsilon>0$，存在自然数 $N$，使

$$\int_{(-\infty,-N)}|f|\,dm<\varepsilon/3,\quad \int_{(N,\infty)}|f|\,dm<\varepsilon/3.$$

因为 $f$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上可积，$f$ 在有限区间 $(-N,N)$ 上也可积．据已证明的定理 2.2，存在 $\delta>0$，使当 $e'\subset(-N,N)$，$me'<\delta$ 时有

$$\left|\int_{e'}f\,dm\right|<\varepsilon/3.$$

现设 $e$ 是 $(-\infty,\infty)$ 中满足 $me<\delta$ 的任一集．那么，由等式

$$\int_e f\,dm=\int_{e\cap(-N,N)}f\,dm+\int_{e\cap(-\infty,-N)}f\,dm+\int_{e\cap(N,\infty)}f\,dm$$

可以看出，右边每一项的绝对值都小于 $\varepsilon/3$，因而 $\left|\int_e f\,dm\right|<\varepsilon$．命题得证．

读者试考虑一下，上面证明中用到无界集上积分的那些性质，为使逻辑上不发生矛盾，应怎样安排它们的次序？

在本节最后，我们来考虑可积函数用连续函数的一种平均逼近．

**引理 2.1** **设 $f(x)$ 是可测集 $E$ 上的可积函数．那么对任意的正数 $\varepsilon$，存在 $E$ 上的简单函数 $\varphi(x)$，使**

$$\int_E|f(x)-\varphi(x)|\,dm<\varepsilon.$$

**证** 据积分定义，对 $f$ 的正部 $f_+$，有简单函数 $\varphi_1$，$0\leqslant\varphi_1\leqslant f_+$，

使

$$\int_E f_+ \, dm < \int_E \varphi_1 \, dm + \varepsilon/2.$$

同样，有简单函数 $\varphi_2$, $0 \leqslant \varphi_2 \leqslant f_-$，使

$$\int_E f_- \, dm < \int_E \varphi_2 dm + \varepsilon/2.$$

令 $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$，则 $\varphi$ 是 $E$ 上的简单函数，并且

$$\int_E |f-\varphi| dm \leqslant \int_E |f_+ - \varphi_1| \, dm + \int_E |f_- - \varphi_2| dm$$

$$= \int_E [f_+ - \varphi_1] \, dm + \int_E [f_- - \varphi_2] dm < \varepsilon.$$

**注** 由引理的证明可见，如果 $f$ 有界，$|f(x)| \leqslant M \ (x \in E)$，则引理中所取的 $\varphi$ 也满足 $|\varphi(x)| \leqslant M \ (x \in E)$.

**引理 2.2** **设 $E$ 是闭区间 $[a, b]$ 中的可测集，则对任何 $\varepsilon > 0$，有 $[a, b]$ 上的连续函数 $g(x)$，使**

$$\int_{[a, b]} |\chi_E(x) - g(x)| dm < \varepsilon.$$

**证** 由于 $\chi_E(x)$ 是闭区间 $I = [a, b]$ 上的有界可测函数，$|\chi_E(x)| \leqslant 1$. 据第三章定理 3.2，存在实直线上的连续函数 $g(x)$，使 $mI(\chi_E \neq g) < \varepsilon/2$ 且可满足 $|g(x)| \leqslant 1$. 显然，$g$ 在 $[a, b]$ 上连续，并满足引理要求：

$$\int_{[a, b]} |\chi_E(x) - g(x)| dm = \int_{I(\chi_E \neq g)} |\chi_E(x) - g(x)| dm$$

$$< 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

**定理 2.8** **设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的可积函数，则对任何正数 $\varepsilon$，有 $[a, b]$ 上的连续函数 $g(x)$，使**

$$\int_{[a,b]} |f(x)-g(x)|dm<\varepsilon.$$

**证** 据引理2.1，取简单函数 $\varphi(x)=\sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}(x)$，

$$\int_{[a,b]} |f(x)-\varphi(x)|dm<\varepsilon/2.$$

再据引理 2.2，对每个 $k=1, 2, \cdots, n$，取$[a, b]$上连续函数 $g_k(x)$，使

$$\int_{[a,b]} |\chi_{E_k}(x)-g_k(x)|dm<\varepsilon/2M.$$

其中 $M=1+|c_1|+\cdots+|c_n|$．令 $g(x)=\sum_{k=1}^{n} c_k g_k(x)$，那么，$g$ 是连续的且

$$\int_{[a,b]} |f(x)-g(x)|dm\leqslant\int_{[a,b]}|f(x)-\varphi(x)|dm$$

$$+\int_{[a,b]} |\varphi(x)-g(x)|dm$$

$$<\varepsilon/2+\sum_{k=1}^{n} |c_k|\int_{[a,b]} |\chi_{E_k}(x)-g_k(x)|dm<$$

$$<\varepsilon/2+\sum_{k=1}^{n} |c_k|\cdot\varepsilon/2M<\varepsilon.$$

定理得证．

着重指出，由定理的证明不难看出，当 $\sup_{x\in E}|f(x)|=M<\infty$ 时，定理结论中的 $g(x)$也可这样的选择，使 $\sup_{x\in E}|g(x)|\leqslant M$ 满足。

所证定理表明，可积函数可用连续函数来平均逼近．

## §3 积分序列的极限

本节叙述的几个定理在应用上是很广泛的，我们先由一条基本命题出发.

**定理 3.1** 设 $f(x)$, $u_n(x)(n\in\mathbb{N})$ 均为 $E$ 上非负可测函数，且 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$，则

$$\int_E f(x)\,dm=\sum_{n=1}^{\infty}\int_E u_n(x)dm.$$

**证** 对每个自然数 $n$，取简单函数列 $\{\varphi_{n,k}\}$, $k\in\mathbb{N}$，满足

$$0\leqslant\varphi_{n,1}(x)\leqslant\varphi_{n,2}(x)\leqslant\cdots,\quad \lim_{k\to\infty}\varphi_{n,k}(x)=u_n(x).$$

令 $\varphi_k(x)=\sum_{n=1}^{k}\varphi_{n,k}(x)$，则对每个 $k\in\mathbb{N}$，$\varphi_k(x)$ 是非负递增的简单函数列，且

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=f(x).$$

其实，函数列 $\varphi_k(x)$ 的非负递增性是明显的. 由它的递增性推知极限 $\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)$ 存在. 对每个 $n\in\mathbb{N}$，$\varphi_{n,k}(x)\leqslant u_n(x)$，故对 $n=1,2,\cdots,k$ 求和得

$$\varphi_k(x)\leqslant u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_k(x)\leqslant f(x),$$

从而 $\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)\leqslant f(x)$；另一方面，对每个自然数 $r$，当 $k\geqslant r$ 时，有 $\varphi_k(x)\geqslant\sum_{n=1}^{r}\varphi_{n,k}(x)$. 先固定 $r$，令 $k\to\infty$ 得 $\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)\geqslant\sum_{n=1}^{r}u_n(x)$. 再令 $r\to\infty$ 得 $\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)\geqslant f(x)$. 因而等式 $\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=f(x)$ 成立.

于是，据 §2 基本引理(并参看它的注)得

$$\int_E f(x)dm=\lim_{k\to\infty}\int_E \varphi_k(x)dm=\lim_{k\to\infty}\left\{\sum_{n=1}^{k}\int_E \varphi_{n,k}(x)dm\right\}$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_E u_n(x)dm.$$

另一方面，由定理 2.5 与 2.6，对每个 $k\in\mathbb{N}$，

$$\sum_{n=1}^{k}\int_E u_n(x)\,dm=\int_E (u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_k(x))dm$$

$$\leqslant\int_E f(x)dm.$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_E u_n(x)dm\leqslant\int_E f(x)dm.$$

联合所得两不等式便证明了定理的结论.

我们着重指出，定理中并没有假定 $f(x)$ 的可积性. 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_E u_n dm$ 收敛，就可以断定 $f(x)$ 可积，因而和函数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 几乎处处有限.

作为练习，读者可以验证，由定理 3.1 可以得出积分的 $\sigma$ 可加性.

基本引理的一般化是下列勒维定理，它是定理 3.1 的变形.

**定理 3.2** **设可测函数列满足下面的性质：**

$$0\leqslant f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots;\ \lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x),$$

**则 $f_n(x)$ 的积分列收敛于 $f(x)$ 的积分：**

$$\int_E f(x)dm=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dm.$$

**证** 证明的想法是把序列化为级数的情形. 令

$$u_n(x)=f_n(x)-f_{n-1}(x),\ n\in\mathbb{N},\ f_0(x)=0,$$

则据定理 3.1 有

$$\int_E f(x)\,dm=\sum_{n=1}^{\infty}\int_E (f_n(x)-f_{n-1}(x))dm$$

$$=\lim_{r\to\infty}\sum_{n=1}^{r}\int_E (f_n(x)-f_{n-1}(x))dm$$

$$=\lim_{r\to\infty}\int_E \sum_{n=1}^{r} (f_n(x)-f_{n-1}(x))dm$$

$$=\lim_{r\to\infty}\int_E f_r(x)dm.$$

在这里我们利用了积分的线性，并需要假设一切 $f_r(x)$ 均可积。但当出现了某个 $f_r$ 不可积时，可以直接看出，所要证的等式两边都成为$\infty$。定理得证.

**注 1** 在上面定理 3.2 中并未假定 $f(x)$ 的可积性．但当极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n\,dm$ 存在为有限时，可以断定 $f$ 可积(因若 $f$ 不可积，据定理3.2 将有 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n dm=\infty$).

**注 2** 如果把积分看成高一维的测度，读者试将勒维定理同第二章定理 3.6 的(i)相比较.

利用勒维定理易证下列法杜定理.

**定理 3.3** 设 $f_n(x)$ 是非负可测函数列，则

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)\,dm\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dm.$$

**证** 令 $u_n(x)=\inf\{f_n(x),\ f_{n+1}(x),\ \cdots\}$，则对任何 $n\in\mathbb{N}$，$u_n(x)\leqslant f_n(x)$，且

$$0\leqslant u_1(x)\leqslant u_2(x)\leqslant\cdots;\ \lim_{n\to\infty} u_n(x)=\varliminf_{n\to\infty} f_n(x).$$

于是对积分列$\left\{\int_E u_n dm\right\}_{n\in\mathbf{N}}$ 可以应用定理 3.2，我们得到

$$\int_E \lim_{n\to\infty} u_n(x)dm=\lim_{n\to\infty}\int_E u_n(x)dm,$$

或

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)\,dm=\lim_{n\to\infty}\int_E u_n(x)dm$$

但因 $u_n(x)\leqslant f_n(x)$, $n\in\mathbf{N}$, 故$\int_E u_n dm\leqslant\int_E f_n dm$,

从而

$$\lim_{n\to\infty}\int_E u_n(x)dm\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dm.$$

故得

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)\,dm\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dm.$$

定理得证.

我们看到，法杜定理中对函数列所加的条件比较简单，主要的就是非负列这一条件．当然，这时函数列的极限与积分列的极限都不一定存在．假如两个极限都存在，定理中的下极限自然应改为极限。此外，定理结论中严格不等式可能成立．试看下例．

**例** 考虑区间$[0, 1]$上的函数列$f_n(x)$:

$$f_n(x)=\begin{cases} n, & x\in(0, 1/n), \\ 0, & x\overline{\in}(0, 1/n), \end{cases}$$

$n\in\mathbf{N}$. 则有 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$, 因而 $f$ 的积分等于0. 但 $f_n$ 的积分恒为 1, 故

$$\int_{[0,1]} f dm<\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]} f_n dm.$$

利用法杜定理不难证明下列勒贝格控制收敛定理，它在函数论、微分方程与概率论中是极为常用的工具.

**定理 3.4** **设可测函数列$\{f_n(x)\}$满足下述条件：$f_n(x)$的极限存在，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$，且有可积函数 $g(x)$ 使**

$$|f_n(x)|\leqslant g(x) \quad (x\in E;\ n\in\mathbb{N}) \tag{1}$$

**那么，$f$ 可积且有**

$$\int_E f(x)dm=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dm. \tag{2}$$

**证** 由定理条件(1)易知，$|f(x)|\leqslant g(x)(x\in E)$，而据假设 $g$ 可积，故 $f$ 可积. 仍由条件(1)得出 $g(x)+f_n(x)\geqslant 0$，对序列$\{g(x)+f_n(x)\}$应用定理 3.3

$$\varliminf_{n\to\infty}\int_E(g(x)+f_n(x))\,dm\geqslant\int_E\varliminf_{n\to\infty}(g(x)+f_n(x))dm$$

$$=\int_E(g(x)+f(x))dm,$$

从而据积分的线性，即有

$$\varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dm\geqslant\int_E f(x)dm. \tag{3}$$

同理，由条件(1)得出 $g(x)-f_n(x)\geqslant 0$，应用定理 3.3 可得

$$\varlimsup_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,dm\leqslant\int_E f(x)dm. \tag{4}$$

于是由(3)，(4)看出，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n dm$ 存在且(2)成立.

定理得证.

**推论** 设 $mE<\infty$，$E$**上可测函数列**$\{f_n(x)\}$**满足**$|f_n(x)|\leqslant M$ $(x\in E,n\in\mathbb{N})$，$M$**为常数**，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$，**则** $f(x)$ **可积；且有**

(2)成立.

这是定理 3.4 的一个重要特例，称为有界收敛定理.

**注 1** 定理 3.4 的条件可以作明显的减弱，如只须不等式

$$|f_n(x)|\leqslant g(x)\quad (n\in\mathbb{N})$$

在 $E$ 上几乎处处成立，$g$ 可积这一条件不变，极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 也只须几乎处处存在，则定理的所有结论都保持成立. 此注对定理3.2—3.3 也适用.

**注 2** 定理 3.4 还可以推广到含有连续参数 $\alpha\in I$ 的情形，即设 $I\subset\mathbb{R}$ 为具有势 $\aleph$ 的指标集，$\alpha_0$ 是它的一个聚点，可测函数族 $\{f_\alpha(x)\}_{\alpha\in I}$ 满足 $|f_\alpha(x)|\leqslant g(x)$ $(x\in E,\ \alpha\in I)$而 $g$ 可积，$\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0} f_\alpha(x)=f(x)$，则 $f$ 可积且有(2)成立. 证明只须借用子序列的方法.

同时，定理 3.4 中的 $E$ 也不限定为有界集，但对有界收敛定理例外. 定理的这种推广在积分号下求导数，积分变换中是很有用的.

应当注意，定理中序列受可积函数控制这一条件不可少. 否则结论未必成立. 反例见定理 3.3 后的例.

**例** 设 $f(x,t)$ 对每个 $t\in[\alpha,\ \beta]$是$[a,\ b]$上关于 $x$ 的可积函数；对每个 $x\in[a,b]$关于 $t$ 处处可微，且有常数 $C$ 使 $\left|\dfrac{\partial}{\partial t}f(x,t)\right|\leqslant C$, $a\leqslant x\leqslant b$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$，则有公式

$$\frac{d}{dt}\int_{[a,b]} f(x,t)dx=\int_{[a,b]}\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)dx,\ \alpha<t<\beta.$$

其中我们用 $dx$ 代替 $dm$，以明确对那个变量积分. 其实，据微分学中值定理，

$$\frac{d}{dt}\int_{[a,b]} f(x,t)dx=\lim_{h\to 0}\int_{[a,b]} h^{-1}[f(x,t+h)-f(x,t)]dx$$

$$=\lim_{h\to 0}\int_{[a,b]}\frac{\partial}{\partial t}f(x,t+\theta h)dx,$$

$$0\leqslant\theta\leqslant 1.$$

据条件$\left|\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)\right|\leqslant C$,应用有界收敛定理得

$$\frac{d}{dt}\int_{[a,b]} f(x,t)\,dt=\int_{[a,b]}\lim_{h\to 0} h^{-1}[f(x,t+h)-f(x,t)]dx$$

$$=\int_{[a,b]}\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)dx.$$

本节最后我们来建立关于积分列的更为深刻的收敛定理.

**定理 3.5** 设 $mE<\infty$, $E$ 上可测函数列$\{f_n(x)\}$满足条件:

$$|f_n(x)|\leqslant g(x)\quad (x\in E, n\in \mathbb{N})$$

而 $g$ 可积, 又设 $f_n$ 测度收敛于 $f$. 那么, $f$ 可积, 且

$$\int_E f(x)\,dm=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx.$$

**证** 第一步. 证明 $f(x)$ 的可积性.

因$\{f_n\}$测度收敛于 $f$, 据第三章定理 2.2, 存在子序列 $\{f_{n_k}\}$, 几乎处处收敛于 $f$. 由定理条件$|f_{n_k}(x)|\leqslant g(x)$在 $E$ 上几乎处处成立, 令 $k\to\infty$ 得 $|f(x)|\leqslant g(x)$在$E$ 上几乎处处成立. 因 $g$ 可积, $f$ 在 $E$ 上亦可积.

第二步. 对任意的 $\varepsilon>0$, 据 $g$ 的可积性并据 §2 定理 2.2, 存在 $\delta>0$, 使当 $me<\delta(e\subset E)$时有

$$\int_e g\,dm<\varepsilon/4.$$

当 $\delta$ 确定后, 取正数 $\eta$ 使 $\eta\cdot mE<\varepsilon/2$, 然后将 $E$ 分解为下列

两个互不相交的集的并：

$$A_n(\eta)=E(|f_n-f|\geqslant\eta),$$
$$B_n(\eta)=E-A_n(\eta).$$

由于 $f_n$ 测度收敛于 $f$，$mA_n(\eta)\to 0(n\to\infty)$. 因而存在自然数 $N$，使当 $n>N$ 时，$mA_n(\eta)<\delta$. 从而

$$\int_{A_n(\eta)} g\,dm<\varepsilon/4,\ n>N.$$

注意，这里 $N$ 依赖于 $\delta,\eta$ 从而依赖于 $\varepsilon$. 我们有

$$\left|\int_E f_n\,dm-\int_E f\,dm\right|\leqslant\int_E|f_n-f|\,dm$$

$$=\int_{A_n(\eta)}|f_n-f|\,dm+\int_{B_n(\eta)}|f_n-f|\,dm.$$

对右边第二个积分，有

$$\int_{B_n(\eta)}|f_n-f|\,dm\leqslant\eta\cdot mB_n(\eta)\leqslant\eta\cdot mE;$$

而对第一个积分，注意到 $|f_n(x)-f(x)|\leqslant 2g(x)$在 $E$ 上几乎处处成立，有

$$\int_{A_n(\eta)}|f_n-f|\,dm\leqslant\int_{A_n(\eta)}2g(x)\,dm,$$

当 $n<N$ 时，它小于 $2\varepsilon/4=\varepsilon/2$. 因此当 $n>N$ 时，

$$\left|\int_E f_n\,dm-\int_E f\,dm\right|<\varepsilon/2+\eta mE<\varepsilon.$$

定理得证。

当 $mE<\infty$ 时，此定理是定理 3.4 的推广，因为几乎处处收敛蕴含测度收敛. 从定理的证明中可以看到，实际上我们证明了

$$\lim_{n\to\infty}\int_E|f_n-f|\,dm=0,$$

它较定理的结论为强，这是所谓在可积函数类中的一种平均收敛性。

## §4 $R$积分与$L$积分的比较

为了对数学分析中某些结果加深理解，这里就一维情形考虑有限区间$[a, b]$上函数$f(x)$的积分，对$f$的黎曼积分（简称$R$积分）与勒贝格积分（简称$L$积分）进行若干比较，并限于下列三个方面。

第一，就可积函数的范围来看，$L$积分比$R$积分广泛。

首先回忆一下$R$积分的概念。设$f(x)$是定义在$[a, b]$上的有界函数，用分点

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

将区间$[a, b]$分成$n$部分，在每个小区间$[x_i, x_{i+1}]$上任取一点$\xi_i$，$i = 0, 1, \cdots, n-1$，作和

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i).$$

令 $\lambda = \max_i (x_{i+1} - x_i)$。如果对任意的分法与$\xi_i$的任意取法，当$\lambda \to 0$时，$\sigma$趋于有限的极限$I$，则称它为$f$在$[a, b]$上的$R$积分，记为

$$I = (R) \int_a^b f(x) dx.$$

为对$R$积分作进一步讨论，考察所谓积分大和$S$与小和$s$。用$M_i$与$m_i$分别表示$f(x)$在区间$[x_i, x_{i+1}]$上的上确界与下确界。令

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i (x_{i+1} - x_i),$$

$$s=\sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1}-x_i),$$

并分别称为 $f$ 的积分大和与小和. 我们有

**定理 4.1 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 $R$ 可积的充要条件是, 当 $\lambda\to 0$ 时, 大和 $S$ 与小和 $s$ 都趋于同一极限 $I$.**

**证** 充分性. 由积分大和与小和的定义, 显然可见

$$s\leqslant\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)\leqslant S,$$

因此当定理的条件满足时, 对 $[a, b]$ 的任意分划与 $\xi_i$ 的任意取法有

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)-I\right| \leqslant S-s\to 0(\lambda\to 0),$$

故 $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)\to I(\lambda\to 0)$, 即 $f$ 在 $[a, b]$ 上 $R$ 可积.

必要性. 设 $f$ 在 $[a, b]$ 上 $R$ 可积, 则对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使当 $\lambda<\delta$ 时

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)-I\right| <\varepsilon/2.$$

注意到上述不等式对 $\xi_i$ 的任意取法都成立, 我们可以在小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 中取这样的 $\xi_i$, 使

$$|M_i-f(\xi_i)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}, i=0, 1, \cdots, n-1.$$

这可以做到, 由于 $M_i$ 是 $f$ 在所述小区间上的上确界.
于是

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1}-x_i)-\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)\right|$$

$$\leqslant\sum_{i=0}^{n-1} |M_i-f(\xi_i)|(x_{i+1}-x_i)$$

$$<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)=\varepsilon/2.$$

因而得到，当 $\lambda<\delta$ 时 $|S-I|<\varepsilon$. 这表明，当 $\lambda\to 0$ 时 $S\to I$. 同理可证，当 $\lambda\to 0$ 时 $s\to I$.

利用定理 4.1，立即可证，$[a,b]$上（有界）单调函数是 $R$ 可积的. $[a,b]$上的连续函数必然 $R$ 可积. 当然也有不连续的 $R$ 可积函数存在. 此外，非 $R$ 可积的函数的例是容易举出的. 例如，在$[0,1]$上定义的狄里希莱函数 $\psi(x)$：

$$\psi(x)=\begin{cases}0, & 若\ x\ 为无理数,\\ 1, & 若\ x\ 为有理数,\end{cases}$$

就不是 $R$ 可积的. 事实上，对区间$[0,1]$的任意分法，一切积分大和等于 1，一切小和等于 0. 但是注意到 $\psi(x)\sim 0$，就知道 $\psi$ 的 $L$ 积分存在且等于 0.

实际上，我们有更一般的结论. 即

**定理 4.2　定义在有限区间上的函数若为 $R$ 可积，则必 $L$ 可积，且积分值相等.**

**证**　设 $f(x)$ 在$[a,b]$上 $R$ 可积，它必有界，$|f(x)|\leqslant M$。作区间$[a,b]$的一个分划序列

$$D_i: a=x_0^{(i)}<x_1^{(i)}<\cdots<x_{n_i}^{(i)}=b,$$

使 $D_{i+1}$ 的分点包含 $D_i$ 的分点，$i\in\mathbb{N}$（这样，序列$\{D_i\}$是全序集），并使

$$\lambda_i=\max_k\left(x_{k+1}^{(i)}-x_k^{(i)}\right)\to 0\quad(i\to\infty).$$

考察简单函数列

$$\underline{f}_i(x)=\begin{cases}m_k^{(i)}, & x_k^{(i)}\leqslant x<x_{k+1}^{(i)}\ (k=0,1,\cdots,n_i+1),\\ f(b), & x=b,\end{cases}$$

其中 $m_k^{(i)}$ 表示 $f$ 在小区间 $[x_k^{(i)}, x_{k+1}^{(i)}]$ 上的下确界. 显然 $\underline{f}_i$ 的 $L$ 积分为

$$\int_{[a,b]} \underline{f}_i(x)dm = \sum_{k=0}^{n_i-1} m_k^{(i)}\ m(x_k^{(i)}, x_{k+1}^{(i)})$$

$$= \sum_{k=0}^{n_i-1} m_k^{(i)}(x_{k+1}^{(i)} - x_k^{(i)}),$$

此式右边正是积分小和 $s$. 因假设 $f$ 是 $R$ 可积的, 当 $i\to\infty(\lambda_i\to 0)$ 时, $s$ 趋于 $f$ 的 $R$ 积分. 至于上式左边的积分, 由于

$$-M \leqslant \underline{f}_1(x) \leqslant \underline{f}_2(x) \leqslant \cdots \leqslant M,$$

据勒维定理(参看定理 3.2; 对序列 $M+\underline{f}_i(x)$ 应用), 即有

$$\lim_{i\to\infty}\int_{[a,b]} \underline{f}_i(x)dm = \int_{[a,b]} \lim_{i\to\infty}\underline{f}_i(x)dm = (R)\int_a^b f(x)dx.$$

而且不难明了, $\lim\limits_{i\to\infty} \underline{f}_i(x) \leqslant f(x)$. 同理, 考虑函数序列 $\overline{f}_i(x)$ 时(以上确界 $M_k^{(i)}$ 代替上述 $m_k^{(i)}$, 这里的记号是不言而喻的)可得

$$\lim_{i\to\infty}\int_{[a,b]} \overline{f}_i(x)\,dm = \int_{[a,b]} \lim_{i\to\infty}\overline{f}_i(x)\,dm = (R)\int_a^b f(x)dx,$$

而且有 $\lim\limits_{i\to\infty}\overline{f}_i(x) \geqslant f(x)$. 由所得两个结果知

$$\int_{[a,b]} \left\{\lim_{i\to\infty}\overline{f}_i(x) - \lim_{i\to\infty}\underline{f}_i(x)\right\} dm = 0.$$

从而, 注意到被积函数是非负的, 据唯一性定理得

$$\lim_{i\to\infty}\overline{f}_i(x) \sim \lim_{i\to\infty}\underline{f}_i(x), \tag{1}$$

并且它们也与 $f(x)$ 对等. 这样, $f(x)$ 是 $L$ 可积的, 且

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dm = \int_{[a,b]} \lim_{i\to\infty}\underline{f}_i(x)dm$$

$$=\int_{[a,b]} \lim_{i\to\infty} \overline{f}_i(x)dm$$

$$=(R)\int_a^b f(x)dx.$$

定理证完.

如果令

$$m(x)=\sup_{\delta>0} \inf_{t\in(x-\delta,x+\delta)} \{f(t)\},$$

$$M(x)=\inf_{\delta>0} \sup_{t\in(x-\delta,x+\delta)} \{f(t)\},$$

用极限论的知识就可以证明

(i) $f(x)$在点$x$连续的充要条件是$m(x)=M(x)$;

(ii) $\lim\limits_{i\to\infty} \overline{f}_i(x)=M(x), \lim\limits_{i\to\infty} \underline{f}_i(x)=m(x)$ $(\lambda_i\to 0)$.

因此由上面已证的,(1)式可写成$M(x)\sim m(x)$, 而据(i),在区间$[a,b]$上的有界函数$f(x)$为$R$可积的充要条件是$f(x)$的不连续点集为零测度集. 这样,$R$可积函数的基本特征单从$R$积分理论本身是看不清的,而必须借助于测度论.

注意,对无界函数的$R$积分(广义$R$积分)定理4.2不再成立. 例如在$(0,1)$上定义的函数$f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$是依广义积分意义$R$可积的,但不是$L$可积的,这是因为$f(x)$非绝对可积. 如果函数保持常号, 则这时定理4.2仍然成立. 对于无界区间上的广义积分,情况与此类似.

下面再举几个例子,以备思考.

例 1 设$f(x)$在$[a,b]$上$R$可积且处处有$f(x)>0$, 那么有

$$(R)\int_a^b f(x)dx\geqslant 0.$$

问等号能否成立?

答案是否定的. 因为据定理 4.2 知

$$\int_{[a,b]} f(x)dm=(R)\int_a^b f(x)dx\geqslant 0,$$

如果等号成立, 则由定理 2.7 知 $f\sim 0$, 与假设矛盾.

**例 2** 试证当 $0<\alpha<1$ 时, 积分 $\int_{(0,1)} x^{-\alpha}dm$ 存在, 且值为 $(1-\alpha)^{-1}$; 而当 $\alpha\geqslant 1$ 时积分为 $\infty$.

令

$$f_n(x)=\begin{cases} x^{-\alpha}, & x\geqslant n^{-1/\alpha}, \\ 0, & x<n^{-1/\alpha}, \end{cases}$$

则每个 $f_n(x)$, $n\in\mathbb{N}$ 都是非负的与有界可测的 (参看图 14), 它的积分存在为有限. 容易证明

$$0\leqslant f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots;$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x). \ (x\in(0,1))$$

图 14

故据定理 4.2, 当 $\alpha\neq 1$ 时,

$$\int_{(0,1)} f_n(x)dm=\int_{(n^{-1/\alpha},1)} x^{-\alpha}dm$$

$$=(R)\int_{n^{-1/\alpha}}^{1} x^{-\alpha}dx$$

$$=\frac{1}{1-\alpha}(1-n^{-(1-\alpha)/\alpha})$$

$$\to\begin{cases} (1-\alpha)^{-1}, & 0<\alpha<1, \\ \infty, & \alpha>1, \ (n\to\infty) \end{cases}$$

而当 $\alpha=1$ 时,

$$\int_{(0,1)} f_n(x)dm=(R)\int_{n^{-1}}^{1} x^{-1}dx=\log n\to\infty \ (n\to\infty).$$

第二，从某些极限过程来看，$L$ 积分较 $R$ 积分优越些．读者当记得，对 $R$ 积分来说，关于积分列求极限的问题，经常要求函数序列一致收敛（当然，这是充分条件），极限才可以通过积分号，这从运算的角度看不仅不方便，限制也过强．然而关于$L$积分，对函数列的要求就宽得多，例如参看勒贝格控制收敛定理所揭示的条件．我们还是用狄里希莱函数 $\psi(x)$为例作说明．把$[0,1]$中的有理点依次排列为

$$r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots,$$

作函数 $\psi_n(x)$：

$$\psi_n(x)=\begin{cases}1, \text{若} x\in\{r_1, r_2, \cdots, r_n\},\\ 0, \text{其余情形}.\end{cases}$$

则$\{\psi_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 处处收敛于 $\psi(x)$，$\psi_n(x)\leqslant\psi(x)$且 $\psi_n(x)\geqslant 0$，$n\in\mathbb{N}$．因此在 $L$ 积分意义下，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]}\psi_n(x)dm=\int_{[0,1]}\psi(x)dm=0.$$

但 $\psi(x)$ 不是 $R$ 可积的，就谈不上上述极限等式成立的可能性，尽管在 $R$ 积分意义下，

$$(R)\int_0^1\psi_n(x)dx=0, \quad n\in\mathbb{N}.$$

再举傅立叶级数的逐项积分问题来作进一步说明．我们知道，在数学分析中这个问题是不易讲得透彻的．现在用 $L$ 积分观点来讨论．假定 $f(x)$是以 $2\pi$ 为周期的 $L$ 可积函数，那么它有傅立叶展式

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \tag{2}$$

其中

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad n=0,1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n=1,2,\cdots.$$

所写展式(2)并不表示级数收敛．但是，可积函数 $f(x)$ 的傅立叶展式却可以逐项积分．就是说，有等式

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\, dt=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{a_0}{2}dt+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\alpha}^{\beta}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)dt \tag{3}$$

成立，其中$[\alpha,\beta]$是$[-\pi,\pi]$的任意子区间，所有积分均指勒贝格积分．

其实，引进区间的特征函数 $\varphi(x)=\chi_{[\alpha,\beta]}(x)$来讨论，它仅在$[-\pi,\pi]$上定义，我们将它延拓到$(-\infty,\infty)$上使有周期$2\pi$，并约定保持函数记号不变．那么 $\varphi(x)$ 有傅立叶展式

$$\varphi(x)\sim\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nx+B_n\sin nx), \tag{4}$$

并且除了点 $\pm\pi,\alpha,\beta$ 以外在$[-\pi,\pi]$上处处成立等号．容易求得系数的表示为

$$A_0=(\beta-\alpha)/\pi,\ A_n=(\sin n\beta-\sin n\alpha)/n\pi,$$
$$B_n=(\cos n\alpha-\cos n\beta)/n\pi, \quad n\in\mathbb{N}.$$

令级数(4)的部分和为 $\varphi_n(x)$，则几乎处处有

$$\varphi(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x);$$

不难验明，要证的等式(3)化为等式

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\varphi(x)dm=\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\varphi_n(x)dm. \tag{5}$$

现在已经知函数列 $\{f(x)\varphi_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的极限几乎处处为 $f(x)\varphi(x)$，而且可以用初等方法证明 $\varphi_n(x)$ 是一致有界的，$|\varphi_n(x)|\leqslant C(n\in\mathbb{N})$．

其实，我们有

$$\varphi_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{\sin\frac{t-x}{2}}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{\sin\frac{t-x}{2}}dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\alpha-x}{2}}^{\frac{\beta-x}{2}}\frac{\sin(2n+1)v}{\sin v}\,dv,$$

由于 $\frac{\sin(2n+1)v}{\sin v}=1+2\cos 2v+\cdots+2\cos 2nv$，不难得到

$$\varphi_n(x)=O(1)+\frac{1}{\pi}\int_0^{z}\frac{\sin(2n+1)v}{\sin v}dv+\frac{1}{\pi}\int_0^{z'}\frac{\sin(2n+1)v}{\sin v}dv,$$

其中 $z$，$z'$ 均为与 $x,\alpha,\beta$ 有关的变量但介于 0 与 $\pi/2$ 之间，而 $O(1)$为与 $x,n$ 无关的有界量．令

$$I(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{z}\frac{\sin(2n+1)v}{\sin v}dv.$$

如果 $z\in[0,\pi/2(2n+1)]$，则易见 $I(z)$ 有界，

$$|I(z)|\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{z}\frac{\pi}{2}(2n+1)dv\leqslant\frac{\pi}{4},$$

这里我们利用了不等式 $2/\pi\leqslant x^{-1}\sin x\leqslant 1(0\leqslant x\leqslant\pi/2)$．如果 $z\in(\pi/2(2n+1),\pi/2)$，则将 $I(z)$ 写成 $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/(4n+2)}+\frac{1}{\pi}\int_{\pi/(4n+2)}^{z}$ 时并对第二个积分应用分部积分公式，便可以证明它也是与 $x,n$ 无关的有界量．于是得到 $\varphi_n(x)=O(1)$，即 $\varphi_n(x)$ 关于 $x$ 与 $n$ 一致

有界。

这样，函数序列$\{f(x)\varphi_n(x)\}_{n\in N}$有可积的控制函数$C|f(x)|$. 据定理3.4，有(5)成立. 由此可见，用勒贝格积分解决傅立叶级数逐项积分问题是相当有效的.

第三，我们来看看数学分析中的牛顿-莱布尼兹公式:

$$f(b)-f(a)=\int_a^b f'(t)dt.$$

在数学分析中通常在$f(x)$有连续导数的假定下去证明上述公式，或者将条件减弱些，但总要求$f'(x)$为$R$可积才行. 可是对$L$积分情形，可以在$f'(x)$为$L$可积的条件下进行讨论，并且由可积函数可引进一种绝对连续函数概念，后者几乎处处存在有限导数并与囿变函数相关连. 正是对于绝对连续函数，我们将证明，除相差一个常数不计外，它与它的导函数的不定积分相等. 在§6我们将详细地介绍这些内容.

根据以上初步比较，可知$L$积分比$R$积分要广泛些，使用起来比较灵活，利用它研究问题时，可以观察得深刻些. 由此可见，比起$R$积分来，$L$积分是向前迈进了一大步.

## §5 乘积测度与傅比尼定理

本节内容需要第二章§5的基础，初学时可以暂时略去；在主要内容理解清楚以后，才来阅读它们. 我们的目的是建立关于重积分易序的傅比尼定理. 鉴于乘积空间与乘积测度具有基本意义，我们稍许讲得详细一点. 先从积集概念讲起.

设$\{X_\alpha:\alpha\in A\}$为非空集的类. 考虑映射$f:A\to\bigcup_{\alpha\in A}X_\alpha$，满足$f(\alpha)\in X_\alpha(\alpha\in A)$者. 一切这样的$f$所成的集称为类$\{X_\alpha\}$中

集 $X_\alpha(\alpha\in A)$ 的积集，记为 $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$，积集也称为乘积空间，每个 $X_\alpha$ 称为分支空间．集积中的元也可以记为 $x=\{x_\alpha\}$，这里 $x_\alpha=f(\alpha)$．$x_\alpha$ 称为元 $x$ 的第 $\alpha$ 坐标，它是 $x$ 在集 $X_\alpha$ 上的投影．当 $A=\mathbf{N}$ 时，$\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ 可以看成序列 $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ 的集，这里 $x_i\in X_i$，$i\in\mathbf{N}$．当 $X_1=X_2=\cdots=X_n=\mathbf{R}$ 时，$\prod\limits_{i=1}^{n} X_i$ 可以看成 $\mathbf{R}^n$（两者同构）．下面着重考虑两个集 $X$ 与 $Y$ 的积集的情形．这时，它们的积集记为 $X\times Y$，其中的元就是有序点偶 $(x, y)$：$x\in X$，$y\in Y$ 的全体．点 $(x, y)$ 中的 $x$ 称为此点的 $X$ 坐标或第一坐标，$y$ 称为点 $(x, y)$ 的 $Y$ 坐标或第二坐标．

设 $A, B$ 分别是 $X, Y$ 的子集，那么 $A\times B$ 为 $X\times Y$ 的子集，称它为矩形集．容易看出，若两矩形集 $A_1\times B_1$ 与 $A_2\times B_2$ 相等，则必 $A_1=A_2$，$B_1=B_2$．但两个矩形集的差与并都不一定是矩形集．我们有

**定理 5.1　设 $\mathscr{R}, \mathscr{S}$ 分别是 $X, Y$ 的子集所成的环，令 $\mathscr{T}$ 为形如 $A\times B(A\in\mathscr{R}, B\in\mathscr{S})$ 的矩形集的一切不相交有限并组成的类，则 $\mathscr{T}$ 为环．**

**证**　第一步．我们证明，设 $A_i\in\mathscr{R}, B_i\in\mathscr{S}, E_i=A_i\times B_i\in\mathscr{T}$，$i=1, 2$，则 $E_1\cap E_2\in\mathscr{T}$．

其实，不妨设 $E_1\cap E_2\neq\varnothing$ 我们有

$$E_1\cap E_2=(A_1\cap A_2)\times(B_1\cap B_2). \tag{1}$$

这是因为，任取 $(x, y)\in E_1\cap E_2$，则 $(x, y)\in E_1$，$(x, y)\in E_2$，从而 $x\in A_1$，$x\in A_2$，故 $x\in A_1\cap A_2$．同理，$y\in B_1\cap B_2$．因此，

$$E_1\cap E_2\subset(A_1\cap A_2)\times(B_1\cap B_2).$$

另一方面，$A_1\cap A_2\subset A_1$，$B_1\cap B_2\subset B_1$，故 $(A_1\cap A_2)\times(B_1\cap B_2)\subset A_1\times B_1$．同理，$(A_1\cap A_2)\times(B_1\cap B_2)\subset A_2\times B_2$，故 $(A_1\cap A_2)\times(B_1$

$\cap B_2) \subset E_1 \cap E_2$. 合并所得两结果即得(1).

由于 $\mathscr{R}, \mathscr{S}$ 均为环，故 $A_1 \cap A_2 \in \mathscr{R}, B_1 \cap B_2 \in \mathscr{S}$，因而由(1)知 $E_1 \cap E_2 \in \mathscr{T}$. 于是推出，$\mathscr{T}$ 关于有限交也是封闭的.

第二步. 设 $A_i \in \mathscr{R}, B_i \in \mathscr{S}, E_i = A_i \times B_i$, $i=1, 2$, 则显然有等式(参看图 15)

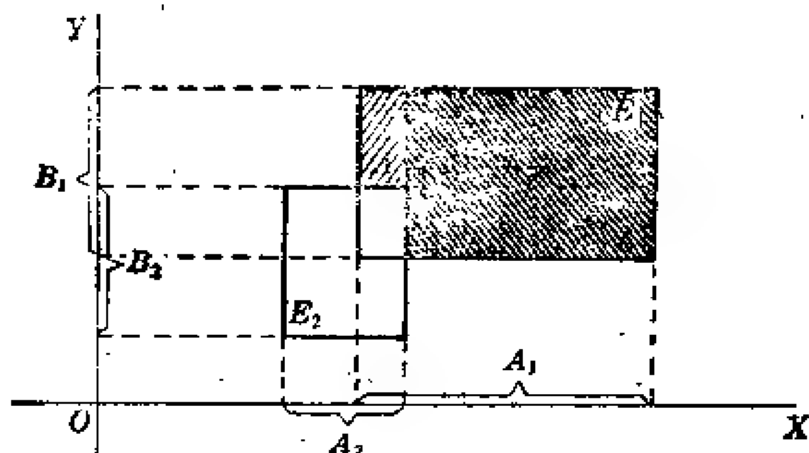



图 15 $E_1 - E_2$ 分解(2)示意

$$E_1 - E_2 = [(A_1 \cap A_2) \times (B_1 - B_2)] \cup [(A_1 - A_2) \times B_1] \quad (2)$$

因为 $\mathscr{R}, \mathscr{S}$ 均为环，故 $A_1 \cap A_2 \in \mathscr{R}, B_1 - B_2 \in \mathscr{S}$，从而 $(A_1 \cap A_2) \times (B_1 - B_2) \in \mathscr{T}$, $(A_1 - A_2) \times B_1 \in \mathscr{T}$ 也是明显的. 故(2)右边的两项均属于 $\mathscr{T}$，且因它们不相交，故它们的并属于 $\mathscr{T}$ (参看 $\mathscr{T}$ 的定义). 考虑 $\mathscr{T}$ 中任意两个元 $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$, $\bigcup_{j=1}^{m} F_j$, $E_i$ 等互不相交, $F_j$ 等也互不相交. 容易验证，等式

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i - \bigcup_{j=1}^{m} F_j = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{m} (E_i - F_j)$$

成立. 由上所证，每个 $E_i - F_j \in \mathscr{T}$，故它们的交 $\bigcap_{j=1}^{m} (E_i - F_j) \in \mathscr{T}$ (据第一步所证). 但这些集互不相交，故它们的并也属于 $\mathscr{T}$.

据第二步所证与 $\mathscr{T}$ 的定义，$\mathscr{T}$ 关于差与有限并是封闭的，因

而它是环．定理得证．

设 $X$ 是基本集，$\mathscr{R}$ 为由 $X$ 的子集所成的 $\sigma$ 环，并且满足 $\bigcup_{A\in\mathscr{R}} A = X$，则称$(X, \mathscr{R})$或 $X$ 为可测空间，这时并未涉及测度问题．如果对于可测空间$(X, \mathscr{R})$，定义了 $\sigma$ 环 $\mathscr{R}$ 上的一个测度 $\mu$，则称$(X, \mathscr{R}, \mu)$或 $X$ 为测度空间．设 $\mathscr{R}$，$\mathscr{S}$ 分别表示基本集 $X$ 与 $Y$ 的子集所成的 $\sigma$ 环，用记号 $\mathscr{R}\times\mathscr{S}$ 表示由一切形如 $A\times B$ $(A\in\mathscr{R}, B\in\mathscr{S})$的集所产生的 $\sigma$ 环．那么，当$(X, \mathscr{R})$与$(Y, \mathscr{S})$均是可测空间时，$(X\times Y, \mathscr{R}\times\mathscr{S})$也是可测空间，我们称它为可测空间$(X, \mathscr{R})$与$(Y, \mathscr{S})$的笛卡儿(R, Descartes)乘积．为了指明$(X\times Y, \mathscr{R}\times\mathscr{S})$是可测空间，鉴于 $\mathscr{R}\times\mathscr{S}$ 是 $\sigma$ 环，只须验证 $\mathscr{R}\times\mathscr{S}$ 中一切元的并等于 $X\times Y$ 即可．任取 $(x, y)\in X\times Y$，则 $x\in X$，$y\in Y$，由于$(X, \mathscr{S})$，$(Y, \mathscr{S})$为可测空间，有 $A\in\mathscr{R}, B\in\mathscr{S}$，满足 $x\in A, y\in B$．从而$(x, y)\in A\times B\in\mathscr{R}\times\mathscr{S}$．这样 $\bigcup_{T\in\mathscr{R}\times\mathscr{S}} T = X\times Y$，即$(X\times Y, \mathscr{R}\times\mathscr{S})$是可测空间．

现在引进可测集与可测函数的截口概念．

设$(X, \mathscr{R})$与$(Y, \mathscr{S})$均为可测空间，$(X\times Y, \mathscr{R}\times\mathscr{S})$为它们的笛卡儿乘积空间．设 $E$ 是 $X\times Y$ 的一个子集，任取一点 $x\in X$，令

$$E_x = \{y: (x, y)\in E\},$$

称它为 $E$ 的 $x$ 截口．同样，称

$$E^y = \{x: (x, y)\in E\}$$

为 $E$ 的 $y$ 截口．应注意，乘积空间的截口，当考虑它的可测性一类问题时，不能看成乘积空间的子集，而要看成相应的分支空间的子集．例如，$E_x$ 要看成 $Y$ 空间中的子集．

对于定义在乘积空间 $X\times Y$ 上的函数 $f(x, y)$，同样可以定义

它的截口．视 $x$ 固定，$y$ 的函数 $f_x(y)=f(x,y)$ 称为 $f$ 的 $x$ 截口，它是分支空间 $Y$ 上的函数，$f$ 的 $y$ 截口 $f^y(x)=f(x,y)$（视 $y$ 固定）的意义与此相似．

截口概念可以不依赖于可测概念而直接定义．读者可以从多元函数的偏导数与重积分概念的预备知识来理解．

**定理 5.2** (i) **乘积空间的可测集的每个截口是可测的．**

(ii) **可测函数的每个截口是可测的．**

**证** (i) 设 $\mathscr{E}$ 表示 $X\times Y$ 中一切这样的集 $E$ 所成的类，$E$ 的每个截口（$x$ 的与 $y$ 的）均可测．为方便起见，称

$$\Delta=A\times B(A\in\mathscr{R},B\in\mathscr{S})$$

为可测矩形．由于这种可测矩形的截口为 $A,B$ 或 $\varnothing$ 中三者之一，故 $\Delta\in\mathscr{E}$．容易验证 $\mathscr{E}$ 为 $\sigma$ 环．事实上，当 $E_1,E_2\in\mathscr{E}$ 时，$(E_1-E_2)_x=(E_1)_x-(E_2)_x\in\mathscr{S}$，$(E_1-E_2)^y=(E_1)^y-(E_2)^y\in\mathscr{R}$，故 $E_1-E_2\in\mathscr{E}$；当 $E_1,E_2,\cdots\in\mathscr{E}$ 时，$(\bigcup E_n)_x=\bigcup(E_n)_x$，$(\bigcup E_n)^y=\bigcup(E_n)^y$，故 $\bigcup E_n\in\mathscr{E}$．这样，$\mathscr{E}$ 是包含一切可测矩形的 $\sigma$ 环．由于 $\mathscr{R}\times\mathscr{S}$ 是具有同一性质的最小 $\sigma$ 环，故 $\mathscr{R}\times\mathscr{S}\subset\mathscr{E}$．这表明 $X\times Y$ 的每一可测集属于 $\mathscr{E}$，从而这种可测集的截口是可测的．

(ii) 设 $f(x,y)$ 是定义在 $X\times Y$ 上的可测函数（即对每一实数 $a$，$\{(x,y):f(x,y)>a\}$ 是 $X\times Y$ 中的可测集）．任取 $x\in X$，则有

$$\{y:f_x(y)>a\}=\{y:f(x,y)>a\}=\{(x,y):f(x,y)>a\}_x.$$

由于(i)，此式最后一个集是可测的，故 $f(x,y)$ 的 $x$ 截口为可测；同理，$f(x,y)$ 的 $y$ 截口为可测．

**引理 5.1** **设 $(X,\mathscr{R},\mu)$ 与 $(Y,\mathscr{S},\nu)$ 均为 $\sigma$ 有限的测度空间（参看第二章定义 6.4），$E$ 是 $X\times Y$ 中的可测子集．令**

$$f(x)=\nu(E_x)(x\in X),\ g(y)=\mu(E^y)(y\in Y),$$

**则 $f,g$ 分别是关于 $\mu,\nu$ 的可测函数，且有**

$$\int_X f(x)d\mu=\int_Y g(y)d\nu$$

或

$$\int_X\left\{\int_Y \chi_E(x,y)d\nu\right\}d\mu=\int_Y\left\{\int_X \chi_E(x,y)d\mu\right\}d\nu. \qquad (1)$$

**证** 第一步. 设 $E=A\times B$ 是可测矩形, $A\in\mathscr{R}$, $B\in\mathscr{S}$, 它的截口具有有限测度, $\mu A<\infty$, $\nu B<\infty$. 我们证明(1)对 $E$ 成立, 从而当 $E$ 是可列个这种可测矩形的互不相交的并时(1)也成立.

当 $E=A\times B$ 时, 据定理 5.2, $E_x$, $E^y$ 均可测, 而且有

$f(x)=\nu(E_x)=\nu B\cdot\chi_A(x)$, $g(y)=\mu(E^y)=\mu A\cdot\chi_B(y)$.

故

$$\int_X f(x)d\mu=\nu B\int_X\chi_A(x)d\mu=\nu B\cdot\mu A=\int_Y g(y)d\nu.$$

设 $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$, 其中 $E_n$ 等互不相交, 每个 $E_n$ 均为具有限测度的可测矩形. 由于 $E_x=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(E_n)_x$, 据测度的 $\sigma$ 可加性, $\nu E_x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\nu(E_n)_x$, 因而据 §3 定理 3.1 (推广形式)与刚才已证明的结果, 若引用记号 $f_n(x)=\nu((E_n)_x)$, $g_n(y)=\mu(E_n)^y$, 则有

$$\int_X f(x)\,d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_X f_n(x)d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_Y g_n(y)d\nu=\int_Y g(y)d\nu,$$

这时我们又得到(1).

第二步. 设 $\mathscr{M}$ 为使(1)成立的一切集 $E$ 组成的类, 我们证明 $\mathscr{M}$ 为单调环. 由第一步证明可见, $\mathscr{M}$ 对于不相交可列并运算是封闭的. 现证 $\mathscr{M}$ 是单调类. 例如, 设 $\{E_n\}$ 是 $\mathscr{M}$ 中渐张序列, $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$, 仍用第一步中记号, 据 $\int_X f_n(x)d\mu=\int_Y g_n(y)d\nu$, $n\in\mathbf{N}$ 并

注意到非负函数列 $f_n(x)$ 递增收敛于 $f(x)=\nu(E_x)$ 与 $g_n(y)$ 递增收敛于 $\mu(E^y)$，应用 §3 定理 3.2 便给出

$$\int_X f(x)\,d\mu=\int_Y g(y)d\nu.$$

对于渐缩序列，情形是类似的．故 $\mathscr{M}$ 为单调类．$\mathscr{M}$ 显然为环．故 $\mathscr{M}$ 是单调环．

第三步．证明每个可测集属于 $\mathscr{M}$，因而引理得证．

据 $E$ 是 $\sigma$ 有限的，存在可列个互不相交的可测矩形（均有有限测度），其并包含 $E$．因而如果能证明，对任意的具有限测度的可测矩形 $\Delta$，它的每个可测子集都属于 $\mathscr{M}$，则任何可测集 $E$ 都属于 $\mathscr{M}$，可是，可测矩形的一切互不相交的有限并组成的类是一个环 $U$，且此环所产生的 $\sigma$ 环即为可测集的全体．第一步已证明，$\mathscr{M}$ 为包含 $U$ 的类，而据第二步所证，$\mathscr{M}$ 为单调环，故 $\mathscr{M}$ 为包含 $U$ 的 $\sigma$ 环（参看第二章 §5 定理 5.2）．这样，全体可测集的类含于 $\mathscr{M}$ 中．

引理证完．

容易验明，如果用 $\lambda E$ 表示引理中(1)的积分值，则集函数 $\lambda$ 是一个 $\sigma$ 有限测度，我们称它为 $\mu$ 与 $\nu$ 的乘积测度，并用 $\lambda=\mu\times\nu$ 表示．测度空间 $(X\times Y, \mathscr{R}\times\mathscr{S}, \mu\times\nu)$ 称为两测度空间 $(X, \mathscr{R}, \mu)$ 与 $(Y, \mathscr{S}, \nu)$ 的笛卡儿乘积空间．下面讨论乘积空间的积分与分支空间上的积分的联系．可以期望这同乘积空间上的测度与分支空间上的测度的联系是一样的．

设 $(X, \mathscr{R}, \mu)$ 与 $(Y, \mathscr{S}, \nu)$ 都是 $\sigma$ 有限测度空间，$\lambda=\mu\times\nu$ 为 $\mathscr{R}\times\mathscr{S}$ 上的乘积测度．设 $h(x, y)$ 在 $X\times Y$ 上定义并且它的积分有意义．我们来考察三种积分

$$\int h(x, y)d\lambda,\quad \int h_x(y)d\nu,\quad \int h^y(x)d\mu,$$

并研究等式

$$\int h(x,\ y)d\lambda=\int\left\{\int h(x,y)d\mu\right\}d\nu=\int\left\{\int h(x,\ y)d\nu\right\}d\mu$$

成立的条件．这个等式的含意在黎曼积分情形是大家熟悉的，它表示二重积分与两个累次积分相等．下面证明关于重积分易序的傅比尼(G.Fubini)定理：

**定理 5.3　设 $h(x,y)$ 是 $X\times Y$ 上的可积函数，则 $h(x,y)$ 的每个截口是可积的，且有**

$$\int_{X\times Y}h(x,\ y)d\lambda=\int_X\left\{\int_Y\{h(x,\ y)d\nu\right\}d\mu=\int_Y\left\{\int_X\{h(x,\ y)d\mu\right\}d\nu.\tag{2}$$

**其中里层积分分别几乎处处对 $x$ 与对 $y$ 有意义．**

**证**　由于对称性，显然只须证明第一个等式．

先设 $h(x,y)=\chi_E(x,y)$，其中 $E$ 是 $X\times Y$ 中的可测子集．则由引理 5.1 与乘积测度的定义，即知等式成立．因简单函数为特征函数的线性组合，故(2)对简单函数成立．

其次，设 $h(x,y)$ 为非负可积函数，据第三章 §1 定理 1.3，存在非负递增的简单函数列 $h_n(x,y)$，$\lim\limits_{n\to\infty}h_n(x,y)=h(x,y)$．由已证结果，有

$$\int h_n(x,\ y)d\lambda=\iint h_n(x,\ y)d\mu\,d\nu=\iint h_n(x,\ y)d\nu\,d\mu,\tag{3}$$

其中为了简便起见，我们略去了积分域记号．据 §3 定理 3.2

$$\lim_{n\to\infty}\int h_n(x,\ y)d\lambda=\int h(x,\ y)d\lambda.\tag{4}$$

令 $f_n(x)=\int h_n(x,y)d\nu$，则 $f_n(x)\geqslant 0$ 且 $f_n(x)$ 为递增序列，有极限 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$，它是非负可测函数．仍据 §3 定理 3.2，得到 $f(x)=\int h_n(x,y)d\nu$．对序列 $f_n(x)$ 的积分再一次应用 §3 定理

3.2，即得

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n(x)d\mu=\int f(x)d\mu.$$

或

$$\lim_{n\to\infty}\iint h_n(x, y)d\nu d\mu=\int\left\{\int h(x, y)\, d\nu\right\}d\mu.$$

注意到关系式(3)(4)，由此得出

$$\int h(x, y)d\lambda=\int\left\{\int h\,(x, y)\, d\nu\right\}d\mu.$$

最后，为了完成定理的证明，对一般的可积函数 $h$，只须令 $h=h_+-h_-$，并分别对 $h_+$，$h_-$ 应用已证结果，然后相减即可．由此还可以知道，$\int h(x, y)d\nu$ 关于 $x$ 是可积的，因而几乎处处有限．对于使它为有限的点 $x$，$h(x, y)$关于 $x$ 的截口自然对$y$是可积的．关于 $y$ 的截口完全与此类似．

定理得证．

这个定理称为傅比尼定理．我们看到，它应用起来特别方便．对于(2)中三个积分，只要重积分是存在为有限的，即可推出其它两个也存在并且三者彼此相等．

**例** 设 $E=(0,1)\times(0,1)$，$\mu=\nu$ 是平常勒贝格测度，在 $E$ 上给定二元函数 $f(x, y)=(x^2-y^2)(x^2+y^2)^{-2}$．可以计算出

$$\int_{(0,1)}\left\{\int_{(0,1)} f d\nu\right\}d\mu=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4},$$

$$\int_{(0,1)}\left\{\int_{(0,1)} f\, d\mu\right\}d\nu=\int_0^1\frac{-1}{1+y^2}dy=-\frac{\pi}{4},$$

两个累次积分不相等．应用傅比尼定理，可以肯定 $f$ 关于乘积测度 $dxdy$ 是不可积的．

作为傅比尼定理的一个有意义的应用，我们举出分部积分公

式的证明。

设 $g(x)$ 是 $I=[a,b]$ 上的 $\mu$ 可积函数，令 $G(x)=\int_{[a,x]} g(t)d\mu$，$a\leqslant x\leqslant b$，而 $g(x)$ 在半闭区间 $[a,x)$ 上的积分应为 $G(x-0)-G(a)=G(x-0)$，在这里约定 $G(a-0)=G(a)=0$。这样，$g(t)$ 在一点上的积分可能不等于 0。我们有下列结果。

设 $\mu$ 是 $\mathbb{R}$ 上 $\sigma$ 有限测度，使一切有限区间有有限测度，区间 $I=[a,b]$ 可以是有限或无限区间。若 $f,g$ 在 $I$ 上可积，则有分部积分公式成立：

$$\int_I F(x)\,g(x)\,d\mu=F(b)G(b)-\int_I f(x)G(x-0)d\mu,$$

其中

$$F(x)=\int_{[a,x]} fd\mu,\quad G(x)=\int_{[a,x]} gd\mu。$$

此公式可证明如下。用 $\lambda$ 表示测度 $\mu\times\mu$，令 $E=\{(x,y):(x,y)\in I\times I,\ y\leqslant x\}$，则 $E$ 显然可测，从而 $\chi_E(x,y)$ 为 $\lambda$ 可测函数并且把 $g(x)$ 与 $f(y)$ 看成 $(x,y)$ 的函数时也都是 $\lambda$ 可测的。因此积函数 $P(x,y)=g(x)f(y)\chi_E(x,y)$ 为 $\lambda$ 可测。易见

$$\int_{I\times I}|P(x,y|d\lambda\leqslant\int_{I\times I}|g(x)f(y)|d\lambda$$
$$=\int_I\left\{\int_I|g(x)f(y)|d\mu\right\}d\mu=\int_I|g(x)|d\mu\int_I|f(y)|d\mu<\infty.$$

故 $P(x,y)$ 是 $\lambda$ 可积的。应用傅比尼定理，

$$\int_I F(x)g(x)d\mu=\int_I g(x)\left\{\int_{[a,x]} f(y)d\mu\right\}d\mu$$
$$=\int_{I\times I}P(x,y)d\lambda=\int_I f(y)\left\{\int_{[y,b]} g(x)d\mu\right\}d\mu$$
$$=\int_I f(y)\{G(b)-G(y-0)\}d\mu$$
$$=F(b)G(b)-\int_I f(x)G(x-0)d\mu.$$

这样，公部积分公式得证.

**作为本节的结尾我们来讨论一下乘积测度的完备化问题.**

**定义 5.1** 设 $X$ 是基本集，$\mathscr{R}$是 $X$ 的一些子集所成的 $\sigma$ 环而 $\mu$ 是$\mathscr{R}$上的测度. 如果对$\mathscr{R}$中每个零测度集，它的一切子集均属于$\mathscr{R}$，则称测度 $\mu$ 是$\mathscr{R}$上的完备测度；这时$(X, \mathscr{R}, \mu)$称为完备测度空间.

容易知道，如果用 $m$ 与$\mathscr{M}$分别表示一维勒贝格测度与勒贝格可测集类，而 $m_2$ 与 $\mathscr{M}_2$——二维勒贝格测度与可测集类，则 $m$ 与 $m_2$ 均是相应 $\sigma$ 环上的完备测度. 可是，由完备测度 $m$ 所产生的乘积测度 $m\times m$ 却不是完备的. 其实，假定取 $\mathbf{R}$ 的一个不可测子集 $E$（参看第一章 §4），并设$N$是非空的零测度集，则有$E\times N\overline{\in}\mathscr{M}_2$：这是因为，假设相反，$E\times N$ 恒有可测的 $y$ 截口（参看定理 5.2），但对 $y\in N$，截口$(E\times N)^y=E$ 是不可测的. 另一方面，由于 $E\times N\subset \mathbf{R}\times N$ 而$\mathbf{R}\times N$显然是$\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 中的零测度集，既然它有子集不属于 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$，说明 $m\times m$ 不是$\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 上的完备测度. 下面的完备化方法可以解决这种不足之处.

设$(X, \mathscr{R}, \mu)$ 是测度空间，令 $\tilde{R}$是由 $X$ 中一切这样的子集 $E$ 所成的类，存在 $A, B\in \mathscr{R}$使

$$A\subset E\subset B, \quad 且 \quad \mu(B-A)=0.$$

这时在 $\tilde{R}$ 上作集函数 $\mu$，由等式 $\tilde{\mu}E=\mu A(E\in\tilde{R})$给定.

我们指出，$\tilde{\mu}$ 是唯一确定的. 其实，若又有 $A_1$，$B_1\in\mathscr{R}$ 使 $A_1\subset E\subset B_1$，且 $\mu(B_1-A_1)=0$，则由

$$\mu A_1\leqslant\mu(A_1-A)+\mu A\leqslant\mu(B-A)+\mu A$$

立得 $\mu A_1\leqslant\mu A$. 据对称性有 $\mu A\leqslant\mu A_1$. 因此 $\mu A_1=\mu A$. 不仅如此，我们还可以证明

**定理 5.4** **设$(X, \mathscr{R}, \mu)$是测度空间，则上面作出的 $\tilde{\mu}$ 是 $\tilde{\mathscr{R}}$ 上的完备测度，这时$(X, \tilde{\mathscr{R}}, \tilde{\mu})$成为完备测度空间.**

**证** 第一步. 先证明$\tilde{\mathscr{R}}$为$\sigma$环.

任取$E_1, E_2 \in \tilde{\mathscr{R}}$, 据我们的作法, 存在$A_i, B_i \in \mathscr{R}$使$A_i \subset E_i \subset B_i$, 且$\mu(B_i - A_i) = 0$, $i = 1, 2$. 我们有

$$A_1 - B_2 \subset E_1 - E_2 \subset B_1 - A_2,$$

$$A_1 - B_2,\ B_1 - A_2 \in \mathscr{R}$$

且

$$\mu((B_1 - A_2) - (A_1 - B_2)) \leqslant \mu(B_1 - A_1) + \mu(B_2 - A_2) = 0,$$

因而$E_1 - E_2 \in \tilde{\mathscr{R}}$. 再取$\tilde{\mathscr{R}}$中集列$\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, 为证并集$\bigcup E_i$属于$\tilde{\mathscr{R}}$, 可以假定$E_i$等互不相交. 于是存在$\mathscr{R}$中集列$\{A_i\}, \{B_i\}$, 满足$A_i \subset E_i \subset B_i$, $\mu(B_i - A_i) = 0$, $i \in \mathbb{N}$. 令$A = \bigcup A_i$, $B = \bigcup B_i$, 则不难看出$A, B \in \mathscr{R}$, $A \subset \bigcup E_i \subset B$, 且

$$\mu(B - A) \leqslant \sum_i \mu(B_i - A_i) = 0.$$

因此$\bigcup E_i \in \tilde{\mathscr{R}}$. 这样$\tilde{\mathscr{R}}$关于差与可列并是封闭的, 这表明$\tilde{\mathscr{R}}$为$\sigma$环.

第二步. $\tilde{\mu}$是$\tilde{\mathscr{R}}$上的测度.

$\tilde{\mu}$的非负性与$\tilde{\mu}\varnothing = 0$是显然的. 引用第一步中的记号, 对$\tilde{\mathscr{R}}$中的集列$\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $E_i$等互不相交, 以及那里的$A_i, B_i, A, B, i \in \mathbb{N}$, 有

$$\tilde{\mu}(\bigcup_i E_i) = \mu A = \sum_i \mu A_i = \sum_i \tilde{\mu} E_i,$$

这里应注意到$A_i$等互不相交($E_i$等互不相交). 这表明$\tilde{\mu}$在$\tilde{\mathscr{R}}$上有$\sigma$可加性.

第三步. $\tilde{\mu}$是$\tilde{\mathscr{R}}$上的完备测度.

设$N$是零测度集, $\tilde{\mu}N = 0$, $N \in \tilde{\mathscr{R}}$而$E \subset N$. 那么存在$A, B \in \mathscr{R}$使$A \subset N \subset B$且$\mu(B - A) = 0$, $\tilde{\mu}N = \mu A = 0$. 显然, $\varnothing \subset E \subset B$且

$$\mu(B - \varnothing) = \mu(B - A) + \mu A = 0,$$

因此$E \in \tilde{\mathscr{R}}$且$\tilde{\mu}E = \mu\varnothing = 0$. 这表明零测度集$N$的一切子集属

于$\tilde{\mathscr{R}}$(且有零测度)，故$\tilde{\mu}$是$\tilde{\mathscr{R}}$上的完备测度。

**注** 定理5.4表明，任何测度空间都可以完备化，所述作法称为测度空间的完备化方法. 这样，两个完备化测度空间$(X, \mathscr{R}, \mu)$与$(Y, \mathscr{S}, \nu)$的乘积测度空间的完备化便是$(X\times Y, (\mathscr{R}\times\mathscr{S})^{\sim}, (\mu\times\nu)^{\sim})$. 一般地，凡是提到乘积测度空间，我们都可以按照它的完备化来理解。

将完备化思想用到勒贝格测度上，可得

**定理5.5** **设用$(\mathbb{R}, \mathscr{M}, m)$与$(\mathbb{R}^2, \mathscr{M}_2, m_2)$分别表示一维与二维勒贝格测度空间，那么$(\mathbb{R}^2, \mathscr{M}_2, m_2)$是乘积测度空间$(\mathbb{R}^2, \mathscr{M}\times\mathscr{M}, m\times m)$的完备化.**

**证** 易见$\mathscr{M}\times\mathscr{M}\subset\mathscr{M}_2$，且$m_2$限制在$\mathscr{M}\times\mathscr{M}$上与$m\times m$相等. 因此，$\mathscr{M}\times\mathscr{M}$的完备化$(\mathscr{M}\times\mathscr{M})^{\sim}\subset\tilde{\mathscr{M}}_2$. 但因$\mathscr{M}_2$是完备的，$\tilde{\mathscr{M}}_2=\mathscr{M}_2$，故$(\mathscr{M}\times\mathscr{M})^{\sim}\subset\mathscr{M}_2$。另一方面，任取$E\in\mathscr{M}_2$，存在波雷尔集$A, B$，满足$A\subset E\subset B$且$m_2(B-A)=0$. 由于$\mathscr{M}\times\mathscr{M}$是含有平面开集的$\sigma$环而波雷尔集类是相应的最小$\sigma$环，故$A, B\in\mathscr{M}\times\mathscr{M}$，且$m\times m(B-A)=0$. 从而$E\in(\mathscr{M}\times\mathscr{M})^{\sim}$. 这表明$\mathscr{M}_2\subset(\mathscr{M}\times\mathscr{M})^{\sim}$.

这样，$(\mathscr{M}\times\mathscr{M})^{\sim}=\mathscr{M}_2$，并且易见$\tilde{\mu}$与$\mu_2$在每个$E\in\mathscr{M}_2$上取同样的值.

读者可以验证，根据定理5.3，能将傅比尼定理推广到关于乘积测度空间完备化的情形.

## §6. 微分与积分

本节主要目的在于，从测度论观点研究一维情形微分与积分的联系，结果是，绝对连续函数是它的导函数的不定积分. 由于绝对连续函数是囿变的，从而可表成两个单调增函数的差，因此先讨论单调函数的分析性质.

**定义 6.1** 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上定义的有限增函数，则它的不连续点集至多为可列集(参看第二章习题 15). 用 $\{\xi_k\}$ 表示 $f$ 在区间 $(a,b)$ 内的不连续点集. 令

$$s(x)=\begin{cases} f(a+0)-f(a)+\sum\limits_{a<\xi_k<x}\{f(\xi_k+0)-f(\xi_k-0)\} \\ \quad +f(x)-f(x-0), \text{对于 } a<x\leqslant b, \\ 0, \quad \text{对于 } x=a. \end{cases} \tag{1}$$

我们称 $s(x)$ 为 $f(x)$ 的跳跃函数. 称 $f(\xi_k+0)-f(\xi_k-0)$ 为 $f(x)$ 在 $\xi_k$ 的跃度 (在 $a,b$ 的跃度应分别定义为 $f(a+0)-f(a)$ 与 $f(b)-f(b-0)$). 显然, $s(x)$ 在 $[a,b]$ 上处处非负. 如果 $f(x)$ 处处连续, 则 $s(x)\equiv 0$. 如果 $f(x)$ 只有有限个不连续点, 则 $s(x)$ 为简单函数. 在一般情形下, $s(x)$ 是一个增函数, 以所有 $\xi_k$ 为它的不连续点且在这些点的跃度与 $f(x)$ 相同. 在区间端点处情况亦类似。令

$$\varphi(x)=f(x)-s(x),$$

则可证明, $\varphi(x)$ 是连续增函数. 我们叙述下列定理.

**定理 6.1 定义于 $[a,b]$ 上的增函数 $f(x)$ 可分解为一个连续增函数与 $f(x)$ 的跳跃函数之和。**

**证** 设 $f(x)=s(x)+\varphi(x)$, 这里 $s(x)$ 是 $f(x)$ 的跳跃函数. 我们证明 $\varphi(x)$ 是连续增函数.

其实, 为证 $\varphi(x)$ 是增函数, 设 $x_1<x_2$, $x_1,x_2\in[a,b]$. 据 $s(x)$ 的定义(1)得

$$s(x_2)-s(x_1)\leqslant f(x_2)-f(x_1), \tag{2}$$

即 $\varphi(x_1)\leqslant\varphi(x_2)$.

再证 $\varphi(x)$ 的连续性. 在(2)中令 $x_1$ 固定, $x_2\to x_1$ 得

$$s(x_1+0)-s(x_1)\leqslant f(x_1+0)-f(x_1),$$

即 $\varphi(x_1)\leqslant\varphi(x_1+0)$. 另一方面, 据(1)立见

$$f(x_1+0)-f(x_1)\leqslant s(x_2)-s(x_1).$$

令 $x_2\to x_1$ 得

$$f(x_1+0)-f(x_1)\leqslant s(x_1+0)-s(x_1),$$

即 $\varphi(x_1+0)\leqslant\varphi(x_1)$. 因此得到 $\varphi(x_1+0)=\varphi(x_1)$. 类似地可证明 $\varphi(x_1-0)=\varphi(x_1)$. 故 $\varphi(x)$ 在 $x_1$ 连续. 由于 $x_1$ 是任意的, $\varphi(x)$ 便在 $[a,b]$ 上处处连续(在证明 $\varphi(x)$ 在区间端点的连续性时, 只须考虑单方连续性, 这已包括在上面证明中).

在讨论单调函数可微性之前, 我们先建立一个基本引理——维它利(G. Vitali)引理. 借用维它利引理来研究单调函数的可微性是具有独特风格的. 可以看到, 这种处理方法比较单纯, 有明确的步骤, 而且可以一直用到底.

**定义 6.2** 设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的有限函数, $x_0\in[a,b]$. 若存在数列 $h_n\to 0(h_n\neq 0)$, 使极限

$$\lim_{n\to\infty}h_n^{-1}[f(x_0+h_n)-f(x_0)]=\lambda \tag{1}$$

存在(有限, $-\infty$ 或 $\infty$), 则称 $\lambda$ 为 $f(x)$ 在 $x_0$ 的一个列导数, 记成 $\lambda=Df(x_0)$. 列导数的值是与数列 $h_n$ 相关的. 如果 $f(x)$ 在 $x_0$ 的一切(可能存在的)列导数相等, 则称 $f(x)$ 在 $x_0$ (广义)可微. (广义)可微将化为平常可微, 如果这些可能的列导数相等且有限. 列导数方法本质上是极限的叙列说法.

**例 1** 考察函数

$$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{\pi}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

我们来看看它在 $x=0$ 处的列导数情况.

取 $h_n=1/n$, 有 $h_n^{-1}[f(h_n)-f(0)]=0$, 取 $h_n=\left(2n+\frac{1}{2}\right)^{-1}$, 有

$$h_n^{-1}[f(h_n)-f(0)]=2n+\frac{1}{2}\to\infty(n\to\infty).$$

因而得知在 $x=0$, $f(x)$ 有两个列导数, 0 与 $\infty$. 借助于几何图形

不难看出，$f(x)$ 在 $x=0$ 可以有取值于$[-\infty,\infty]$之中任何值的列导数.

设 $f(x)$为严增函数，(1)中的一个列导数为正实数 $\lambda$，相应的 $h_n$ 是正数列．令 $x_n=x_0+h_n$，$n\in\mathbf{N}$，则闭区间$[x_0,x_0+h_n]$含有 $x_0$ 且它的长度可以任意小，函数 $f(x)$ 的象区间 $[f(x_0),f(x_0+h_n)]$ 与原象的长度之间有近似关系式．

$$f(x_0+h_n)-f(x_0)\approx\lambda h_n.$$

因此，象区间$[f(x_0),f(x_0+h_n)]$恒含有象点 $f(x_0)$ 且长度也可以随意小(因 $h_n\to 0$)．设 $A$ 是$[a,b]$中使 $f(x)$ 有一列导数 $\lambda$ 的点 $x$ 所成的集，则 $A$ 为闭区间集 $M=\{[x,x+h_n]:x\in A\}$所覆盖，而象集 $f(A)$ 为闭区间集 $\mathscr{M}=\{[f(x),f(x+h_n)]:x\in A\}$所覆盖，集内区间的长度可以随意小，这种覆盖是依维它利意义下的覆盖.

**定义 6.3** 设 $E$ 是数直线上的任一子集，$\mathscr{M}=\{d\}$是长度为正的闭区间所成的集．如果对任一点 $x\in E$，恒有一个区间列 $d_n\in\mathscr{M}$，使

$$x\in d_n(n\in\mathbf{N}),\lim_{n\to\infty}md_n=0, \tag{2}$$

则称 $\mathscr{M}$ 为依维它利意义覆盖 $E$.

**定理 6.2 (维它利引理) 设 $E$ 为有界集，$\mathscr{M}$为依维它利覆盖 $E$．则可由 $\mathscr{M}$ 中选出有限或可列个闭区间 $\{d_k\}$，使**

$$m(E-\bigcup_k d_k)=0,\ d_k\cap d_{k'}=\varnothing(k\neq k'). \tag{3}$$

**证** 取包含 $E$ 的一个开区间 $\Delta=(a,b)$ 作为基本区间．由于 $\mathscr{M}$ 依维它利意义覆盖 $E$，由 $\mathscr{M}$ 中除去一切不含于$(a,b)$ 内的那些 $d$ 所得的集 $\mathscr{M}_0$ 仍然覆盖 $E$．我们利用集 $\mathscr{M}_0$ 将证明分为两步.

第一步．用归纳法确定出所需的闭区间列 $\{d_n\}_{n\in\mathbf{N}}$。

令 $k_0=\sup\limits_{d\in\mathscr{M}_0} md$，则 $k_0$ 为非负实数。据上确界的定义，可由

$\mathscr{M}_0$ 中取 $d_1$ 使 $md_1>\frac{1}{2}k_0$. 令 $G_1=\mathscr{C}d_1=(a,b)-d_1$, $k_1=\sup\limits_{d\subset G_1} md$ ($d\in\mathscr{M}_0$, 下同). 如果 $k_1=0$, (这表示 $\mathscr{M}_0$ 中没有完全含于 $G_1$ 的区间), 则一个区间 $d_1$ 已符合定理要求, 作法便终止. 如果 $k_1>0$, 便由 $\mathscr{M}_0$ 中取 $d_2\subset G_1$, 使 $md_2>\frac{1}{2}k_1$, 显然有 $d_2\cap d_1=\varnothing$. 一般地, 如果 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 已由 $\mathscr{M}_0$ 中选出, 但不符合定理要求(3), 则令

$$F_n=\bigcup_{k=1}^{n} d_k, \quad G_n=\mathscr{C}F_n, \tag{4}$$

$$k_n=\sup_{d\subset G_n} md;$$

那么, 由 $\mathscr{M}_0$ 中取 $d_{n+1}\subset G_n$ 使

$$md_{n+1}>k_n/2 \tag{5}$$

于是得到互不相交的闭区间列 $d_1, d_2, \cdots$ (如果这序列只含有限个区间, 定理的结论已不须证明).

第二步. 我们证实序列 $\{d_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 满足(3).

以 $d_k$ 的中心为心扩大每个 $d_k$ 而得闭区间 $D_k$, 使 $mD_k=5md_k$, $k\in\mathbb{N}$. 由于 $\sum\limits_k md_k\leqslant m\Delta=b-a$, 级数 $\sum\limits_k mD_k$ 收敛. 我们证明, 对于任何 $i$, 有

$$E-\bigcup_{k=1}^{\infty} d_k\subset\bigcup_{k=i}^{\infty} D_k, \tag{6}$$

从而(3)成立.

为此, 任取 $x\in E-\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} d_k$, 对任意的 $i$, 有 $x\in G_i$. 因 $G_i$ 为开集, 故 $\mathscr{M}_0$ 中有一个 $d\subset G_i$, 使 $x\in d$. 对于这个 $d$, 关系式

$$d\subset G_n \tag{7}$$

不可能对一切 $n$ 成立. 这是因为, 不然将有 $md\leqslant k_n<2md_{n+1}$, 注意到 $md_{n+1}\to 0\,(n\to\infty)$, 有 $md=0$, 这样 $d$ 将不是正长度的区间.

与假设相违．于是确有 $n$ 使(7)不成立．即有 $n\in\mathbb{N}$ 使 $d\cap F_n\neq\varnothing$，设满足此式的最小自然数仍记为 $n$．由于 $d\cap F_i=\varnothing$，有 $n>i$，据 $n$ 的定义知

$$d\cap F_{n-1}=\varnothing,\ d\cap F_n\neq\varnothing.$$

于是有下列二事实：

(i) 因 $\varnothing\neq d\cap F_n=(d\cap d_1)\cup\cdots\cup(d\cup d_n)$，有 $d\cap d_n\neq\varnothing$；

(ii) 因 $d\subset G_{n-1}$，有 $md\leqslant k_{n-1}<2md_n$．

由此可见，$d$ 与 $d_n$ 有公共点，且 $d$ 的长度不超过 $d_n$ 长度的两倍．故不论 $d$ 的位置如何，有 $d\subset D_n$．既然 $n>i$，更有 $d\subset\bigcup_{k=i}^{\infty}D_k$，从而 $x\in\bigcup_{k=i}^{\infty}D_k$，于是(6)得证．

定理的意义在于，虽然选出的序列 $d_1,d_2,\cdots$ 不一定覆盖住 $E$，但就测度而言，盖不住的点集为一零测度集。在应用上，有时将定理写成下述方式为便：

**推论** 设 $E$ 为有界集，$\mathscr{M}$ 依维它利意义覆盖 $E$．则对任意的 $\varepsilon>0$，可由 $\mathscr{M}$ 中选出有限个互不相交的闭区间 $d_1,d_2,\cdots,d_n$，使

$$m^*\left(E-\bigcup_{k=1}^{n}d_k\right)<\varepsilon.$$

**证** 设由 $\mathscr{M}$ 中选取的闭区间列 $\{d_k\}$ 满足(3)．取自然数 $n=n(\varepsilon)$ 使 $\sum_{k=n+1}^{\infty}md_k<\varepsilon$．则 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 适合本推论的要求：

$$m^*\left(E-\bigcup_{k=1}^{n}d_k\right)\leqslant m^*\left(E-\bigcup_{k=1}^{\infty}d_k\right)+m\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty}d_k\right)<\varepsilon.$$

如果将定理中维它利意义覆盖改为平常覆盖，那么可得到较弱的结论，选出的闭区间列能依测度盖住集 $E$ 的确定的分数部分。这个结果在调和分析中十分有用，由于它的证明方法与定理6.1很相近，我们把它列在下面。

**定理 6.3** 设 $E$ 为有界集，$\mathscr{M}=\{d\}$ 为闭区间集，它们的并包含 $E$，并且 $\sup\limits_{d\in\mathscr{M}} md<\infty$. 那么由 $\mathscr{M}$ 中可选出有限或可列个闭区间集 $\{d_k\}$，使

$$\sum_k md_k\geqslant\frac{1}{5}m^*E,\quad d_k\cap d_{k'}=\varnothing(k\neq k'). \tag{1}$$

**证** 象定理 6.2 的证明一样，先取 $d_1\in\mathscr{M}$，使 $md_1>\frac{1}{2}\sup\limits_{d\in\mathscr{M}} md$. 当选下一个区间 $d_2$ 时，要求它与 $d_1$ 不相交，且长度足够的大. 就是说，$d_2\in\mathscr{M}$，满足

$$md_2>\frac{1}{2}\sup_{d\in\mathscr{M}-\{d_1\}} md,\quad d_2\cap d_1=\varnothing.$$

一般地，当 $d_1,\cdots,d_n$ 已选出时，$d_{n+1}$ 的选择要满足：

$$md_{n+1}>\frac{1}{2}\sup_{d\in\mathscr{M}-\{d_1,\cdots,d_n\}} md,\quad d_{n+1}\cap(d_1\cup\cdots\cup d_n)=\varnothing,\ n=2,3\cdots.$$

这种选择或者到有限步终止，或者得到无限序列 $\{d_k\}_{k\in\mathbf{N}}$. 我们可以假定 $\sum md_k<\infty$，因为不然的话，(1)便是显然的了.

象定理 6.2 的证明一样，考虑每个 $d_k$ 的同心五倍长的扩大区间 $D_k$. 我们来证明

$$E\subset\bigcup_k D_k \tag{2}$$

任取 $x\in E$，有 $d'\in\mathscr{M}$ 使 $x\in d'$. 为证 $d'\subset\bigcup\limits_k D_k$，可以假定 $d'$ 与任一个 $d_k$ 都不相同. 由 $\{d_k\}$ 的作法，有 $k'\in\mathbf{N}$ 使

$$md_{k'}>\frac{1}{2}md'; \tag{3}$$

同时由于 $md_k\to0(k\to\infty)$，从某个足码开始，一切 $md_k$ 将小于或等于 $\frac{1}{2}md'$. 因此满足(3)的那些 $k'$ 中有最大数，我们就假定 $k'$ 是如此的. 既然选取的第 $k'+1$ 个区间是 $d_{k'+1}$ 而不是 $d'$，而且

$md_{k'+1}\leqslant\frac{1}{2}md'$, 可见 $d'$ 与 $\{d_1, d_2, \cdots, d_{k'}\}$ 中某一个必相交. 设 $r\in\{1, 2, \cdots, k'\}$ 是使 $d'\cap d_r\neq\varnothing$ 的最小号码. 注意到 $md_r>\frac{1}{2}md'$, 便可断定 $d'\subset D_r$. 这样, (2)得证. 从而

$$m^*E\leqslant\sum_k mD_k=5\sum_k md_k,$$

由此立即得到(1).

**注** 在定理 6.2 与 6.3 中, 如果 $E$ 是无界集, $mE<\infty$, 而其余条件不变, 则易证结论仍然正确. 又对于定理 6.3, $\mathscr{M}$ 为闭区间集这个条件中"闭区间"的限制已不重要, 例如换成开区间时定理仍然成立.

下面讨论单调函数的可微性. 由增函数讲起, 先建立两个引理.

**引理 6.1** 设 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的严增函数, 令 $E$ 为 $[a, b]$ 中这样的点 $x$ 所成的集: 存在一个列导数 $Df(x)\leqslant p$, $p$ 为一个非负常数. 则

$$m^*f(E)\leqslant pm^*E, \tag{1}$$

这里 $f(E)$ 表示 $E$ 的象集 $\{f(x): x\in E\}$.

**证** 任取常数 $p_0>p$. 设 $x_0\in E$, 则由列导数定义可知, 有趋于 0 的数列 $h_n$, 适合

$$\lim_{n\to\infty}h_n^{-1}[f(x_0+h_n)-f(x_0)]=Df(x_0)<p_0. \tag{2}$$

另一方面, 对于任意的 $\varepsilon>0$, 取开集 $G$, 满足

$$E\subset G,\ mG<m^*E+\varepsilon. \tag{3}$$

引进记号

$$d_n(x_0)=[x_0, x_0+h_n],\quad \Delta_n(x_0)=[f(x_0), f(x_0+h_n)],$$

它们都是闭区间, 这里假定 $h_n>0$. 当 $h_n<0$ 时, 例如 $d_n(x_0)$, 应写为 $[x_0+h_n, x_0]$. 但由于恒可得一子序列 $\{h_{n_k}\}$, 具同一符号, 使 (2)

成立，故不妨就一切 $h_n>0$ 而论。

由于 $f(x)$ 为增函数，$f[d_n(x_0)]\subset\Delta_n(x_0)$. 既然 $md_n(x_0)\to 0$ $(n\to\infty)$，且 $G$ 为开集，故对一切充分大的 $n$，有

$$d_n(x_0)\subset G,\ h_n^{-1}[f(x_0+h_n)-f(x_0)]<p_0,$$

必要时可以从 $\{h_n\}$ 中去掉有限项不论，因而不妨假定上述两个关系式对一切 $n$ 同时成立。于是有

$$m\Delta_n(x_0)<p_0\, md_n(x_0).$$

由此显见，$m\Delta_n(x_0)\to 0(n\to\infty)$. 这样，闭区间集 $\{\Delta_n(x):x\in E\}$ 依维它利意义覆盖 $f(E)$. 据定理 6.2，可取互不相交的区间列 $\{\Delta_{n_i}(x_i)\}$ 使

$$m[f(E)-\bigcup_i\Delta_{n_i}(x_i)]=0.$$

从而有

$$m^*f(E)\leqslant\sum_i m\Delta_{n_i}(x_i)<p_0\sum_i md_{n_i}(x_i)=p_0m(\bigcup_i d_{n_i}(x_i)).$$

由于 $\bigcup d_{n_i}(x_i)\subset G$，再据(3)得

$$m^*f(E)<p_0mG<p_0(m^*E+\varepsilon).$$

令 $\varepsilon\to 0$，$p_0\to p$ 即得(1)。

**注** 在引理的证明中可以看到，$f(x)$ 的严增性是为了保证 $d_n(x_0)$，$\Delta_n(x_0)$ 等全不为 0. 又 $f(x)$ 不一定要在整个区间上定义，只要在$[a,b]$的一个子集上定义即可讨论，而建立同样定理。

**引理 6.2** **设 $f(x)$ 为$[a,b]$上的严增函数. 令 $E$ 表示这样的点 $x$ 所成的集：存在一个列导数 $Df(x)\geqslant q$，$q\geqslant 0$ 为常数，则**

$$m^*f(E)\geqslant qm^*E.$$

**证** 因 $y=f(x)$ 为$[a,b]$上的严增函数，逆映射 $x=f^{-1}(y)$ 便是$[f(a),f(b)]$的子集 $f([a,b])$ 到 $[a,b]$ 上的严增函数. 不妨假定 $q>0$($q=0$ 时结论显然成立). 那么 $f(x)$在 $x_0\in E$ 有一列导数 $Df(x_0)\geqslant q$ 意味着 $f^{-1}(y)$ 在 $y_0=f(x_0)$ 有一列导数 $Df^{-1}(y_0)\leqslant$

$1/q$。事实上，存在 $h_n \neq 0$，使

$$\lim_{n\to\infty} k_n^{-1}[f^{-1}(y_0+k_n)-f^{-1}(y_0)]=\lim_{n\to\infty}\frac{(x_0+h_n)-x_0}{f(x_0+h_n)-f(x_0)}$$

$$=\frac{1}{Df(x_0)}\leqslant\frac{1}{q},$$

其中 $k_n=f(x_0+h_n)-f(x_0)\to 0(n\to\infty)$. 于是据引理 6.1（并参看引理的注），有

$$m^*f^{-1}(f(E))\leqslant q^{-1}m^*f(E)$$

或

$$m^*f(E)\geqslant qm^*E.$$

引理得证.

现在叙述并证明本节的一个主要结果.

**定理 6.4　设 $f(x)$ 为$[a,b]$上定义的单调函数，则它在这区间上几乎处处有有限导数.**

**证**　只须就增函数来证就够了.

第一步．$f(x)$的有限或无穷大导数几乎处处存在.

可以就 $f(x)$ 为严增函数来讨论．这是因为，如果作 $g(x)=f(x)+x$，则 $g(x)$ 为严增函数，且 $g$ 与 $f$ 的可微性相同．实际上在有列导数的点 $x$，有

$$Dg(x)=Df(x)+1.$$

设 $E$ 为使导数 $f'(x)$ 不存在的点集，则对 $E$ 中任一点 $x_0$，有相异列导数 $D_1f(x_0)$ 与 $D_2f(x_0)$．不妨设 $D_1f(x_0)<D_2f(x_0)$，那么有两个有理数 $p,q$，适合

$$D_1f(x_0)<p<q<D_2f(x_0).$$

令 $E_{pq}$ 表示满足上述关系式的一切点 $x_0$ 所成的集。不难看出，$E=\bigcup_{p,q}E_{pq}$，这里求和记号表示对一切有理数偶$(p,q)$而言，其中 $p<q$。如能证明每个 $E_{pq}$ 为零测度集，则因$\{E_{pq}\}$可列，它的并也

是零测度集，即 $mE=0$。应用引理 6.1 与 6.2，立得

$$qm^*E_{pq}\leqslant m^*f(E_{pq})\leqslant pm^*E_{pq},$$

由于 $q>p$，故有 $m^*E_{pq}=0$，因而 $mE=0$ 得证。

第二步．我们证明 $E_0=E(f'=\infty)$ 的测度为 0．就是说，使 $f$ 有无穷大导数的点集是零测度集．与第一步一样，只须就严增函数 $f(x)$ 来证．对每个自然数 $n$，有 $Df(x)\geqslant n(x\in E_0)$，故据引理 6.2，有 $m^*f(E_0)\geqslant n\cdot m^*E_0$，但 $m^*f(E_0)\leqslant f(b)-f(a)$，因而

$$m^*E_0\leqslant\frac{1}{n}[f(b)-f(a)],$$

令 $n\to\infty$ 得 $mE_0=0$。

这样，由第一步证明，知 $f'(x)$ 几乎处处存在为有限或无穷大。再由第二步证明，知 $f'(x)$ 几乎处处存在为有限。定理证完。

由所证定理可知，就测度论观点看来，当给定一个单调函数时，它的导函数即确定了．这是因为，在讨论函数的积分等问题中，函数在一个零测度集上的值可以完全不管．

下面再证明，单调函数的导函数是可积的．

**定理 6.5　设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上定义的增函数．则 $f'(x)$ 可积，且有**

$$\int_{[a,b]}f'(x)dm\leqslant f(b)-f(a).$$

**证**　不失一般性，可扩大定义区间 $[a,b]$ 为 $[a,b+1]$，并用 $\tilde{f}$ 代替 $f$ 来讨论，这里

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}f(x), & a\leqslant x\leqslant b,\\ f(b), & b<x\leqslant b+1.\end{cases}$$

这是因为，$f$ 与 $\tilde{f}$ 的导函数的可积性相同，且当可积时，积分值也相同．

据定理 6.4，知 $\tilde{f}$ 几乎处处存在有限导数，且单调增函数显然

可测．据第三章定理 1.2，知

$$\tilde{f}'(x)=\lim_{n\to\infty} n\left\{\tilde{f}\left(x+\frac{1}{n}\right)-\tilde{f}(x)\right\}$$

也可测．序列$\left\{n\left[\tilde{f}\left(x+\frac{1}{n}\right)-\tilde{f}(x)\right]\right\}$是非负的，据定理 3.3，有

$$\int_{[a,b]}\tilde{f}'(x)dm\leqslant\varliminf_{n\to\infty} n\int_{[a,b]}\left[\tilde{f}\left(x+\frac{1}{n}\right)-\tilde{f}(x)\right]dm.$$

由于单调函数(有界)为黎曼可积，因而勒贝格可积，上式右边积分化为黎曼积分．简单的平移变换给出

$$\int_a^b\tilde{f}\left(x+\frac{1}{n}\right)dx=\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}}\tilde{f}(x)dx,$$

因而

$$\int_{[a,b]}\left[\tilde{f}\left(x+\frac{1}{n}\right)-\tilde{f}(x)\right]dm=\int_a^b\left[\tilde{f}\left(x+\frac{1}{n}\right)-\tilde{f}(x)\right]dx$$

$$=\int_b^{b+\frac{1}{n}}\tilde{f}(x)dx-\int_a^{a+\frac{1}{n}}\tilde{f}(x)dx=\frac{1}{n}f(b)-\int_a^{a+\frac{1}{n}}\tilde{f}(x)dx$$

$$\leqslant\frac{1}{n}[f(b)-f(a)].$$

回到前面不等式便得

$$\int_{[a,b]}\tilde{f}'(x)dm\leqslant f(b)-f(a).$$

**注** 定理中严格不等式可能成立．下面举一个连续增函数的例子，对于它牛顿-莱布尼兹公式不成立。

**例 2** 设 $P_0$ 是区间[0,1]中的康脱完全集，$G_0$ 是 $P_0$ 关于区间[0, 1]的补集．把 $G_0$ 中构成区间依下法按长度大小进行分类．第一类由长度为 1/3 的一个区间 (1/3, 2/3) 构成．第二类含有两个区间：(1/9, 2/9)，(7/9, 8/9)，长度为 1/9． 第三类有四个区间

$(1/27, 2/27)$, $(7/27, 8/27)$, $(19/27, 20/27)$, $(25/27, 26/27)$, 长度为 $1/27$。一般地，第 $n$ 类 $(n\in \mathbb{N})$ 中有 $2^{n-1}$ 个长度为 $1/3^n$ 的区间

$$\left(\frac{1}{3^n}, \frac{2}{3^n}\right), \left(\frac{7}{3^n}, \frac{8}{3^n}\right), \left(\frac{19}{3^n}, \frac{20}{3^n}\right), \cdots, \left(\frac{3^n-2}{3^n}, \frac{3^n-1}{3^n}\right).$$

作定义在$[0, 1]$上的函数 $\theta(x)$ 如下。

$$\theta(x)=\begin{cases} 1/2, & x\in(1/3, 2/3), \\ 1/4, & x\in(1/9, 2/9), \\ 3/4, & x\in(7/9, 8/9), \\ \cdots\cdots \end{cases}$$

在第三类的四个区间上，令 $\theta(x)$ 依次取值 $1/8$, $3/8$, $5/8$, $7/8$; 一般地，在第 $n$ 类的 $2^{n-1}$ 个区间上，令 $\theta(x)$ 依次取值 $1/2^n$, $3/2^n$, $5/2^n$, $\cdots$, $(2^n-1)/2^n$, 等等. 这样, $\theta(x)$在 $G_0$ 上有定义，它在 $G_0$ 的每个构成区间上为常数，且限制在 $G_0$ 上为增函数。将 $\theta(x)$ 连续扩充定义到整个区间$[0, 1]$上，方式如下：

$$\theta(x)=\sup_{\substack{t<x \\ t\in G_0}}\theta(t), \quad \theta(0)=0, \quad \theta(1)=1$$

由作法看出, $\theta(x)$是$[0, 1]$上的增函数。它的连续性是明显的。因为，如果 $\theta(x)$ 在一点 $x_0$ 不连续，则区间$(\theta(x_0-0), \theta(x_0+0))$中一切数除 $\theta(x_0)$外将不是 $\theta(x)$的函数值，这与 $\theta(x)$的函数值在$[0, 1]$中稠密的事实相矛盾（当 $x_0$ 是端点 0 或 1 时，应当用$[\theta(0), \theta(0^+))$或$(\theta(1^-), \theta(1)]$代替上面的区间$(\theta(x_0-0), \theta(x_0+0))$）。由于$\theta'(x)\sim 0$, 故有

$$\int_{[0, 1]}\theta'(x)\,dm=0<1=\theta(1)-\theta(0).$$

**定义 6.4** 设 $f(x)$ 是区间$[a, b]$上的有限函数，考察区间$[a, b]$的任一组分点：

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b.$$

当分点变动时考察上确界

$$\sup_{(x_0, x_1, \cdots, x_n)} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k)-f(x_{k-1})|.$$

并称它为 $f(x)$ 在$[a, b]$上的总变分，记为 $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)$. 若 $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)<\infty$,称 $f(x)$在$[a, b]$上是囿变的.

显然，若 $f(x)$ 是$[a, b]$上的囿变函数，则它在任一子区间 $[a, t]$ $(a<t\leqslant b)$上也是囿变的. 我们令

$$\pi(x)=\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f),\ \ a<x\leqslant b,\ \ \pi(a)=0.$$

则 $\pi(x)$ 是$[a, b]$上非负有限函数.

**引理 6.3** $\pi(x)$**满足有限可加性**:

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)=\overset{c}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)+\overset{b}{\underset{c}{\mathrm{V}}}(f),\quad a<c<b. \tag{1}$$

**证** 考察区间$[a, c]$与$[c, b]$的任意分点组:

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=c,$$

$$c=y_0<y_1<\cdots<y_m=b.$$

显然有

$$\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|+\sum_{l=1}^{m}|f(y_l)-f(y_{l-1})|\leqslant \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)$$

在上式中先令 $x_k$ 等变动，再令 $y_l$ 等变动，依次取上确界，便得

$$\overset{c}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)+\overset{b}{\underset{c}{\mathrm{V}}}(f)\leqslant \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) \tag{2}$$

另一方面，对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在分点组

$$a=z_0<z_1<\cdots<z_m=b,$$

使

$$\sum_{j=1}^{n}|f(z_j)-f(z_{j-1})|>\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)-\varepsilon.$$

如果分点组$\{z_j\}$中不含有点$c$，我们将$c$添进分点组$\{z_j\}$中去。例如说，$c$介于$z_r$与$z_{r+1}$之间：$z_r<c<z_{r+1}$，$r\leqslant q-1$。那么由

$$\left\{\sum_{j=1}^{r}|f(z_j)-f(z_{j-1})|+|f(c)-f(z_r)|\right\}$$

$$+\left\{|f(z_{r+1})-f(c)|+\sum_{j=r+2}^{q}|f(z_j)-f(z_{j-1})|\right\}$$

$$\geqslant\sum_{j=1}^{q}|f(z_j)-f(z_{j-1})|>\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)-\varepsilon,$$

可知

$$\overset{c}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)+\overset{b}{\underset{c}{\mathrm{V}}}(f)>\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)-\varepsilon,$$

由于$\varepsilon$是任意的，得

$$\overset{c}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)+\overset{b}{\underset{c}{\mathrm{V}}}(f)\geqslant\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f).$$

注意到已证结果(2)，可见(1)式成立.

囿变函数在应用上是十分重要的一类函数．容易证明，囿变函数关于线性运算是封闭的，即对于任何两个囿变函数$f, g$与任何两个数$\alpha, \beta$，$\alpha f+\beta g$仍是囿变函数(在同一区间$[a, b]$上)．此外，一个囿变函数的绝对值函数也是囿变的．单调函数显然是囿变的．囿变函数与单调函数的密切关系可从下列定理看出．

**定理 6.6　$[a, b]$上定义的函数$f(x)$是囿变的充要条件是，它可以表示成两个单调函数的差．**

**证**　充分性是显然的，故只证必要性．设$f(x)$是囿变函数，引进上面定义的$\pi(x)=\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)$。我们证明$\pi(x)$是单调增函数：当$\alpha<\beta$时，$\pi(\alpha)\leqslant\pi(\beta)$．据所证引理 6.3，

$$\overset{\alpha}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)+\overset{\beta}{\underset{\alpha}{\mathrm{V}}}(f)=\overset{\beta}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f),$$

由于显然 $\overset{\beta}{\underset{\alpha}{\mathrm{V}}}(f)\geqslant 0$，故 $\overset{\alpha}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)\leqslant\overset{\beta}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)$，即 $\pi(\alpha)\leqslant\pi(\beta)$。

现在令 $\nu(x)=\pi(x)-f(x)$，则可证 $\nu(x)$ 也是增函数。其实，当 $\alpha<\beta$ 时有

$$\begin{aligned}\nu(\beta)-\nu(\alpha)&=\pi(\beta)-\pi(\alpha)-[f(\beta)-f(\alpha)]\\&=\overset{\beta}{\underset{\alpha}{\mathrm{V}}}(f)-[f(\beta)-f(\alpha)].\end{aligned}$$

右边第一项是 $f$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上的总变分，故

$$|f(\beta)-f(\alpha)|\leqslant\overset{\beta}{\underset{\alpha}{\mathrm{V}}}(f).$$

于是 $\nu(\beta)-\nu(\alpha)\geqslant 0$，即证明了 $\nu(x)$ 是增函数。这样，我们得到了定理中所需的分解：$f(x)=\pi(x)-\nu(x)$，$\pi,\nu$ 均是增函数。

所证的分解定理能使我们借用单调函数来了解囿变函数．例如，囿变函数的不连续点集至多可列（参看第二章习题 13），囿变函数几乎处处存在有限导数（定理 6.4），并且它的导函数是可积的（定理 6.5）．

下面举两个简单例子．

**例 1** 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上处处可微的函数，而且导数一致有界：$|f'(x)|\leqslant M$，$M$ 为常数．试证 $f(x)$ 是囿变的．

**证** 据定义 6.4，对于区间 $[a,b]$ 的任一组分点：

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

我们来考察和

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|.$$

应用微分学中值定理，对每个 $k\in\{1,2,\cdots,n\}$，有 $\xi_k\in(x_{k-1},x_k)$，使

$$f(x_k)-f(x_{k-1})=f'(\xi_k)(x_k-x_{k-1}).$$

从而

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})|f'(\xi_k)|\leqslant M(b-a).$$

右边的量与分点组无关，因而当分点组变动时，$\sigma$ 的上确界不超过 $M(b-a)$. 这表明 $f$ 是$[a,b]$上囿变函数.

**例 2** 在区间$[0,1]$上定义函数

$$f(x)\doteq\begin{cases} x\cos\dfrac{\pi}{x}, & 0<x\leqslant 1, \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

它是连续的，我们证明它不是囿变的. 为此考察$[0,1]$的特殊分点组

$$0<\frac{1}{n-1}<\frac{1}{n-2}<\cdots<\frac{1}{2}<1.$$

我们有

$$f\left(\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{k}\cos k\pi=(-1)^k\frac{1}{k},\quad k=1,2,\cdots,n-1.$$

从而对这一分点组.

$$\begin{aligned}\sigma&=\sum_{k=1}^{n-2}\left|f\left(\frac{1}{k}\right)-f\left(\frac{1}{k+1}\right)\right|+\left|f(0)-f\left(\frac{1}{n-1}\right)\right|\\&=\sum_{k=1}^{n-2}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)+\frac{1}{n-1}=2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}-1,\end{aligned}$$

由于$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\to\infty\ (n\to\infty)$，可见$\mathop{\rm V}\limits_0^1(f)=\infty$. 即 $f$ 在 $[0,1]$ 不是囿变函数.

如果注意到例 2 中函数的导数为

$$f'(x)=\frac{\pi}{x}\sin\frac{\pi}{x}+\cos\frac{\pi}{x},\quad 0<x\leqslant 1,$$

它不是区间$(0,1)$上的可积函数，立即知道 $f$ 本身不是囿变的.

现在我们对囿变函数 $f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$ 进行另一种分解，这种

分解依据定理6.1与6.6. 设$f(x)=\pi(x)-\nu(x)$. 这里$\pi(x)$, $\nu(x)$均为增函数, 它们的不连续点全体至多为一可列集, 用$\{\xi_k\}$表示它. 与以前相仿, 令$s_\pi(x)$为对于$\pi(x)$作出的跳跃函数, 只是要注意, 这里的$\{\xi_k\}$不只是$\pi(x)$的不连续点集, 而是$\pi(x)$与$\nu(x)$两者的不连续点集的并. 这样,

$$s_\pi(x)=\begin{cases}\pi(a+0)-\pi(a)+\sum\limits_{a<\xi_k<x}\{\pi(\xi_k+0)-\pi(\xi_k-0)\}\\ \qquad\qquad +\pi(x)-\pi(x-0), & a<x\leqslant b,\\ 0, & x=a.\end{cases}$$

$s_\nu(x)$也有类似的构造.

令 $s(x)=s_\pi(x)-s_\nu(x)$, 则

$$s(x)=\begin{cases}f(a+0)-f(a)+\sum\limits_{a<\xi_k<x}\{f(\xi_k+0)-f(\xi_k-0)\}+f(x)\\ \qquad\qquad -f(x-0), & a<x\leqslant b,\\ 0, & x=a,\end{cases}$$

并称它为$f(x)$的跳跃函数. 这时, $\{\xi_k\}$可看成仅由$f(x)$的不连续点所组成, 因为在$f(x)$的连续点处, 相应的跃度消失.

由于$\pi(x)-s_\pi(x)$, $\nu(x)-s_\nu(x)$均为连续增函数, 故

$$\varphi(x)=\pi(x)-s_\pi(x)-[\nu(x)-s_\nu(x)]=f(x)-s(x)$$

为一连续囿变函数. 这样, 我们得到囿变函数的连续-跳跃分解: $f(x)=\varphi(x)+s(x)$, 其中$\varphi(x)$为连续囿变函数, 而$s(x)$为$f(x)$的跳跃函数(囿变的). 将所得结果叙述为

**定理6.7 在闭区间上定义的囿变函数恒可表示为它的跳跃函数与一个连续囿变函数的和。**

为了以后的需要, 我们还要引进$f(x)$的一种标准分解. 这种分解是将$f(x)$表示为它的正变分与负变分之差.

**定义6.5** 设$f(x)$是$[a,b]$上的囿变函数. 考察$[a,b]$的任意分点组:

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b.$$

令

$$P=\Sigma'[f(x_i)-f(x_{i-1})],\ N=-\Sigma''[f(x_i)-f(x_{i-1})],$$

其中$'$表示对所有满足 $f(x_i)-f(x_{i-1})\geqslant 0$ 的那些 $i$ 求和，$i\in\{1,2,\cdots,n\}$，而$''$表示对其余的 $i$ 求和. 当代替$[a,b]$而考虑子区间 $[a,x]$时，相应的 $P,N$ 分别记为 $P(x)$, $N(x)$. 当分点组变动时，取上确界便定义出

$$p(a,b)=\sup P,\quad n(a,b)=\sup N.$$

视上限 $b$ 为变元 $x$ 时，即得 $p(a,x)$ 与 $n(a,x)$，简记为 $p(x)$ 与 $n(x)$，并分别称为 $f(x)$ 的正变分与负变分(函数). $p(x)$ 与 $n(x)$ 关于区间的可加性也成立，这同 $f$ 的总变分类似（参看引理 6.3）.

显然，

$$p(x)+n(x)=\pi(x),\quad \pi(x)=\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f). \tag{1}$$

另一方面，可以证明：

$$p(x)-n(x)=f(x)-f(a). \tag{2}$$

其实，对任意的 $\varepsilon>0$，可取$[a,x]$的分点组$\{\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_k\}$，使相应的 $P(x)>p(x)-\varepsilon$. 那么由于 $N(x)\leqslant n(x)$ 有

$$f(x)-f(a)=P(x)-N(x)>p(x)-\varepsilon-n(x),$$

令 $\varepsilon\to 0$ 得

$$f(x)-f(a)\geqslant p(x)-n(x). \tag{3}$$

对函数$-(f(x)-f(a))$应用已得结果(3)，得到

$$-(f(x)-f(a))\geqslant n(x)-p(x),$$

故

$$f(x)-f(a)\leqslant p(x)-n(x).$$

由此不等式与(3)便证明了(2)成立. 这样，我们得到了囿变函数 $f(x)$的标准分解：

$$f(x)=p(x)-n(x)+f(a). \tag{4}$$

下列定理在 §7 将要用到.

**定理 6.8** **设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的囿变函数,则有分解(4)成立,其中 $p(x),n(x)$ 分别是 $f$ 的正变分与负变分函数。假定 $f(a)=0$, $f$ 又有分解**

$$f(x)=p_1(x)-n_1(x),$$

**其中 $p_1$, $n_1$ 均为增函数且 $p_1(a)=n_1(a)=0$, 则 $p_1(x)-p(x)$ 与 $n_1(x)-n(x)$ 也是非负增函数.**

**证** 设 $f(a)=0$, 由假设得

$$f(x)=p(x)-n(x)=p_1(x)-n_1(x).$$

故

$$p_1(x)-p(x)=n_1(x)-n(x).$$

因而只须证明 $r(x)=p_1(x)-p(x)$ 为增函数即可. 设 $\alpha<\beta$, $\alpha$, $\beta\in[a,b]$. 据 $p(x)$ 的定义,对任意的 $\varepsilon>0$, 存在含于 $[\alpha,\beta]$ 的互不相叠(指无公共内点)的区间组 $[x_i,x_i']$, $i=1,2,\cdots,k$, 使

$$p(\beta)-p(\alpha)-\varepsilon<\sum_i[f(x'_i)-f(x_i)].$$

据假设 $f(x)=p_1(x)-n_1(x)$, $p_1$, $n_1$ 为增函数, 有

$$\sum_i[f(x'_i)-f(x_i)]=\sum_i[p_1(x'_i)-p_1(x_i)]-\sum_i[n_1(x_i')-n_1(x_i)]$$

$$\leqslant\sum_i[p_1(x'_i)-p_1(x_i)]\leqslant p_1(\beta)-p_1(\alpha),$$

故

$$p(\beta)-p(\alpha)-\varepsilon<p_1(\beta)-p_1(\alpha).$$

令 $\varepsilon\to0$, 即得

$$p_1(\alpha)-p(\alpha)\leqslant p_1(\beta)-p(\beta),\ \alpha<\beta.$$

这就证明了 $r(x)=p_1(x)-p(x)$ 为增函数.

定理证完.

由所证定理推出, 当 $f(a)=0$ 时, 对于 $f(x)$ 的任何单调(增

加)分解 $f(x)=p_1(x)-n_1(x)$, $p_1(a)=0$, 必存在增函数 $r(x)$, 满足

$$p_1(x)=p(x)+r(x),\ n_1(x)=n(x)+r(x),\ r(a)=0.$$

下面讨论原函数问题, 这是微积分基本问题之一. 设 $f(x)$ 是定义在$[a,b]$上的函数, 它在区间上几乎处处有导数 $f'(x)$ (因而认为导函数被确定了), 问公式

$$\int_{[a,x]} f'(t)dm=f(x)-f(a) \quad (a\leqslant x\leqslant b)$$

是否成立? 这里, 我们把 $f(x)$ 看成 $g(x)=f'(x)$ 的一个原函数. 就是说, 原函数 $f(x)$ 能否由它的导数的不定积分得到?

前面已经讲过, 当 $g$ 为连续的增函数 $f$ 的导函数时, 上式可能不成立, 这可参看定理 6.5 后的例 2. 我们要研究上述等式成立的条件。下面将看到, 应用勒贝格积分概念, 可以完满地解决这个问题。

设给定了可积函数 $g$, 我们令

$$f(x)=C+\int_{[a,x]} g(t)dm,\ a\leqslant x\leqslant b.$$

那么, $f(x)$成为一个可积函数的不定积分. 由于 $C$ 是常数, $f(x)$ 的性质将由第二项决定. $f(x)$显然连续, 且进而还有更好的性质.

**定义 6.6** 设$[a_1,b_1],[a_2,b_2],\cdots,[a_n,b_n]$表示$[a,b]$中任意有限个互不相叠的区间所成的集. 如果当 $m(\bigcup_k[a_k,b_k])\to 0$ 时, 有

$$\sum_k[f(b_k)-f(a_k)]\to 0,$$

则称 $f(x)$ 在$[a,b]$上为绝对连续函数.

不难看出, 在定义中, 条件$\sum_k[f(b_k)-f(a_k)]\to 0$(当 $m(\bigcup_k[a_k,b_k])\to 0$)可用较强的条件

$$\sum_k |f(b_k)-f(a_k)|\to 0 \quad (当\ m(\bigcup_k [a_k,b_k])\to 0)$$

代替．此外，容易证明，绝对连续函数在基本运算和，差，积，商(除函数不取零值)下是封闭的．

**引理 6.4　在$[a,b]$上定义的绝对连续函数$f(x)$是囿变的．**

**证**　据定义，取$\varepsilon=1$，存在$\delta_1>0$，使当互不相叠的区间$[a_1, b_1]$，$[a_2,b_2]$，…，$[a_n,b_n]$的长度总和小于$\delta_1$时有

$$\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|<1.$$

用分点组

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{N_1}=b$$

分划区间$[a,b]$，使$x_k-x_{k-1}<\delta_1$，$k\in\{1,2,\cdots,N_1\}$，那么，容易看出，对于每个$k\in\{1,2,\cdots,N_1\}$有

$$\bigvee_{x_{k-1}}^{x_k}(f)\leqslant 1,\ \ 从而\ \bigvee_a^b(f)\leqslant N_1.$$

引理证完．

**例 1**　连续囿变函数不一定是绝对连续的．

这只要看定理 6.5 下面的例 2 就可知道．$\theta(x)$是定义在$[0,1]$上的连续增函数，因而是连续囿变的．$\theta$映$G_0$为可列集，因而$m\theta(G_0)=0$．显然，$m\theta([0,1])=1$，故$m\theta(P_0)=1$．但$mP_0=0$，因此容易求出$[0,1]$的分点组：

$x_0^{(k)}=0<x_1^{(k)}<x_2^{(k)}<\cdots<x_{2k+1}^{(k)}=1$，$k\in\mathbb{N}$，使每个区间$(x_{2i-1}^{(k)}, x_{2i}^{(k)})$，$i=1,\cdots,k$是$G_0$的构成区间的子集，而$\sum\limits_{i=0}^{k}(x_{2i+1}^{(k)}-x_{2i}^{(k)})$趋于零$(k\to\infty)$．可是，我们恒有$\sum\limits_{i=0}^{k}[f(x_{2i+1}^{(k)})-f(x_{2i}^{(k)})]=1$．因此$\theta(x)$不是绝对连续的．

下列例子表明，引理 6.4 中的区间$[a,b]$改为无限区间时，结论不再成立．

**例 2** 设 $f(x)=\cos x,\quad -\infty<x<\infty$。

这函数是绝对连续的. 这是由于, 对 $(-\infty,\infty)$ 中任意有限个互不相叠的区间 $[a_1,b_1],[a_2,b_2],\cdots,[a_n,b_n]$, 有

$$\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|\leqslant\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k),$$

它随 $\sum\limits_{k=1}^{n}(b_k-a_k)$ 趋于 0 而趋于 0, 但这函数不是囿变的. 取 $x_k=k\pi,\ k=0,1,\cdots,n$, 我们有

$$\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|=2n,$$

因此 $\overset{\infty}{\underset{-\infty}{\mathrm{V}}}(f)=\infty$.

在 $[a,b]$ 上的绝对连续函数既然是囿变的, 它就具有囿变函数的所有性质. 特别, 它的导数几乎处处存在为有限并且导函数是可积的. 在引进关于原函数的定理之前, 先建立两条引理.

**引理 6.5 设在 $[a,b]$ 上的绝对连续函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 几乎处处为零, 则 $f(x)$ 为常数.**

**证** 任取 $\varepsilon>0$. 由于 $f(x)$ 为绝对连续, 存在 $\delta>0$, 使对 $[a,b]$ 中任意有限个互不相叠的区间 $[a_1,b_1],\cdots,[a_r,b_r]$, 只要

$$m\Big(\bigcup_{k=1}^{r}[a_k,b_k]\Big)<\delta,$$

就有

$$\sum_{k=1}^{r}|f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon. \tag{1}$$

令 $E$ 为 $(a,b)$ 中使 $f'(x)=0$ 的点集, 则据假设, $mE=b-a$。对 $E$ 中每一点 $x$, 只须 $h>0$ 充分小, 就有

$$|h^{-1}[f(x+h)-f(x)]|<\varepsilon. \tag{2}$$

闭区间集 $\{[x,x+h]:x\in E\}$ 依维它利意义覆盖 $E$, 据维它利定理

的推论，对上述 $\delta>0$，有有限个互不相交的区间

$$d_1=[x_1,x_1+h_1],\ d_2=[x_2,x_2+h_2],\ \cdots,\ d_n=[x_n,x_n+h_n],$$

使 $m^*(E-\bigcup_{k=1}^{n} d_k)<\delta$，从而得知 $\sum_{k=1}^{n} md_k>b-a-\delta$，由此顺便得到，由 $[a,b]$ 减去 $\bigcup_{k=1}^{n} d_k$ 所得差集（有限个区间的并）的测度小于 $\delta$。为确定起见，不妨假定 $x_1<x_2<\cdots<x_n$（必要时可重新编序而使此不等式成立）。于是由(1)得

$$\sigma_1=|f(x_1)-f(a)|+\sum_{k=1}^{n-1}|\{f(x_{k+1})-f(x_k+h_k)\}|$$
$$+|f(b)-f(x_n+h_n)|<\varepsilon。$$

另一方面，因 $x_k$ 当全含在 $E$ 中，据(2)得

$$|f(x_k+h_k)-f(x_k)|<\varepsilon h_k,\quad k=1,2,\cdots,n。$$

从而

$$\sigma_2=\left|\sum_{k=1}^{n}\{f(x_k+h_k)-f(x_k)\}\right|<\varepsilon\sum_{k=1}^{n}h_k\leqslant\varepsilon(b-a)。$$

于是

$$|f(b)-f(a)|\leqslant\sigma_1+\sigma_2<\varepsilon(1+b-a)。$$

由于 $\varepsilon$ 可随意小，必然有 $f(b)=f(a)$。将所得结果应用于区间 $[a,x]$ 上便得 $f(x)=f(a)$ $(a<x\leqslant b)$。这样，$f(x)$ 为常数。引理得证。

**引理 6.6　设 $g(x)$ 为区间 $[a,b]$ 上的可积函数，则函数**

$$f(x)\equiv C+\int_{[a,x]} g(t)dm,\quad C\ \text{为常数}$$

**的导数几乎处处存在，且有 $f'(x)\sim g(x)$。**

**证**　第一步。先证 $f(x)$ 为绝对连续的。对任意的 $\varepsilon>0$，据积分的绝对连续性，存在 $\delta>0$（假定 $\delta\leqslant\varepsilon$），使当 $me<\delta$ $(e\subset[a,b])$ 时有

$$\int_{e} |g(t)|dm < \varepsilon. \tag{1}$$

设 $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, …是$[a, b]$中任意互不相叠的区间集，据积分的可加性，可得

$$\sum_k |f(b_k)-f(a_k)| \leqslant \int_{\bigcup_k (a_k, b_k)} |g(t)|dm.$$

因而当 $m(\bigcup_k (a_k, b_k)) < \delta$ 时有 $\sum_k |f(b_k)-f(a_k)| < \varepsilon$，即 $f$ 是绝对连续的．由于绝对连续函数是囿变的，知 $f(x)$ 的导数几乎处处存在且有限．

第二步．我们证明 $f'(x) \sim g(x)$，$x \in [a, b]$．首先证明，在$[a, b]$上几乎处处有

$$f'(x) \leqslant g(x).$$

令 $E_{pq}$ 为 $(a, b)$ 中使 $f'(x)$ 存在且满足 $f'(x) > q > p > g(x)$ 的点集，我们证明 $mE_{pq} = 0$.

对上面取定的 $\delta$，取开集 $G$ 使

$$E_{pq} \subset G \subset [a, b], \text{ 而 } mG < mE_{pq} + \delta. \tag{2}$$

据 $E_{pq}$ 的定义，对每个 $x \in E_{pq}$，当 $h > 0$ 充分小时，有

$$h^{-1}[f(x+h)-f(x)] \geqslant q. \tag{3}$$

且因 $G$ 为开集，可设上述 $h$ 全都满足 $[x, x+h] \subset G$．这样，闭区间集

$$\{[x, x+h] : x \in E_{pq}\}$$

依维它利意义覆盖 $E_{pq}$。据维它利引理，存在互不相交的区间的并集 $S = \bigcup_k [x_k, x_k+h_k]$，使 $m(E_{pq} - S) = 0$。这时据(3)，对每个 $k$ 有

$$\frac{1}{h_k}\int_{(x_k, x_k+h_k)} g(t)dm > q,$$

从而

$$\int_s g(t)dm > qmS. \tag{4}$$

分两情况讨论,如果 $q\geqslant 0$,注意到 $mE_{pq}\leqslant mS$,有$\int_s g(t)dm > gmE_{pq}$.
如果 $q<0$,注意到

$$S\subset(S-E_{pq})\cup E_{pq}\subset(G-E_{pq})\cup E_{pq},$$

有

$$mS<\delta+mE_{pq}\leqslant\varepsilon+mE_{pq},$$

从而由(4),

$$\int_s g(t)dm > q(mE_{pq}+\varepsilon).$$

因此,不论 $q$ 的符号如何,有

$$\int_s g(t)dm > qmE_{pq}-|q|\varepsilon, \tag{5}$$

另一方面,由于

$$m(S-E_{pq})\leqslant m(G-E_{pq})<\delta,$$

应用(1)得 $\int_{s-E_{pq}} g(t)dm<\varepsilon$. 从而

$$\int_s g(t)dm<\int_{E_{pq}} g(t)dm+\varepsilon\leqslant pmE_{pq}+\varepsilon. \tag{6}$$

联合(5),(6)即得

$$-|q|\varepsilon+qmE_{pq}<pmE_{pq}+\varepsilon.$$

由于 $\varepsilon$ 可以随意小,必然有 $qmE_{pq}\leqslant pmE_{pq}$。但 $q>p$,故 $mE_{pq}=0$。

设 $E$ 为$(a,b)$中使 $f'(x)$存在且满足 $f'(x)>g(x)$ 的点集,令$(p,q)$表示任意的有理数偶,且 $p<q$. 那么有 $E=\bigcup_{(p,q)} E_{pq}$. 据已证事实,每个 $E_{pq}$ 为零测度集,因而作为可列个零测度集的并,有 $mE=0$。这就证明了在$[a,b]$上几乎处处有 $f'(x)\leqslant g(x)$.

为得到相反的不等式,令 $\varphi(x)=-f(x)$,并应用已证结果于

$\varphi(x)$，得 $\varphi'(x)\leqslant -g(x)$ 或 $f'(x)\geqslant g(x)$ 几乎处处成立．联合所得两结果便推出，$f'(x)=g(x)$ 几乎处处成立．引理得证．

据引理 6.6 与 6.7 立即可建立本节又一重要结果．

**定理 6.9** **在 $[a,b]$ 上定义的函数 $f(x)$ 为绝对连续的充要条件是，存在可积函数 $g(x)$，使等式**

$$f(x)=f(a)+\int_{[a,x]} g(t)dm$$

**成立．**

**证** 充分性已在引理 6.6 的证明中讨论过．下面证明必要性．

设 $f(x)$ 为绝对连续，因而囿变，于是 $f'(x)$ 几乎处处存在且 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积．令

$$\varphi(x)=f(a)+\int_{[a,x]} f'(t)dm.$$

据引理 6.6，$\varphi'(x)\sim f'(x)$，即绝对连续函数 $\varphi(x)-f(x)$ 的导数对等于 0，从而据引理 6.5，$\varphi(x)-f(x)=C$，$C$ 为常数．但 $\varphi(a)=f(a)$，故 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 处处相等．即

$$f(x)=\varphi(x)=f(a)+\int_{[a,x]} f'(t)dm,$$

这样，只须取 $g(x)$ 为 $f'(x)$ 就行了．

由所证定理可以看到积分与微分的联系．我们就原函数为绝对连续情形(注意被积函数只是可积！)建立了牛顿-莱布尼兹公式

$$\int_{[a,b]} f'(x)dm=f(b)-f(a).$$

前面曾提到的函数 $\theta(x)$，是连续囿变的，而且不等于常数，又它的导数对等于零．应用定理 6.9，立即知道 $\theta(x)$ 不是绝对连续函数．这样的函数在囿变函数的分解中起着重要作用．

**定义 6.7** 设 $r(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续囿变函数，不等于常数，

且 $r'(x)\sim 0$，则称 $r(x)$ 为奇异函数.

我们以研究囿变函数的进一步分解作为本节结束。设 $f_0(x)$ 为连续囿变函数，那么利用可积函数 $f'_0(x)$，可以作函数

$$\varphi(x)=f_0(a)+\int_{[a,x]} f'_0(t)dm,$$

$\varphi(x)$ 与 $f_0(x)$ 不一定相等，但它们的差 $r(x)=f_0(x)-\varphi(x)$ 的导数却是对等于零的．这个差显然是连续囿变的，因而是一奇异函数或零．于是我们得到 $f_0(x)$ 的一种分解：

$$f_0(x)=\varphi(x)+r(x),\ r(a)=0,$$

其中 $\varphi(x)$ 为绝对连续，$r(x)$ 为奇异函数或零。这种分解是唯一的．这是因为，若有另一表示，

$$f_0(x)=\varphi_1(x)+r_1(x),\quad r_1(a)=0,$$

$\varphi_1(x)$为绝对连续，$r_1(x)$为奇异函数或零，则得

$$\varphi(x)-\varphi_1(x)=r_1(x)-r(x).$$

由此可知，绝对连续函数 $\varphi(x)-\varphi_1(x)$ 的导数对等于 0，故 $\varphi(x)-\varphi_1(x)$ 为常数．但 $\varphi(a)=\varphi_1(a)$，故 $\varphi(x)\equiv\varphi_1(x)$．从而又推出 $r_1(x)=r(x)$.

根据上述讨论并利用囿变函数的分解定理 6.7，即得

**定理 6.10　定义在区间 $[a,b]$ 上的囿变函数 $f(x)$ 可以分解为**

$$f(x)=\varphi(x)+r(x)+s(x),$$

其中 $\varphi(x)$ 为绝对连续，$r(x)$ 可奇异函数或零，而 $s(x)$ 为 $f(x)$的跳跃函数.

显然，当 $f(x)$ 连续时，$s(x)$ 消失，当 $f(x)$ 绝对连续时，$r(x)$ 与 $s(x)$ 均消失.

**注**　本节所讨论的概念与定理，都是限于有限区间情形．当考虑无限区间时，某些结论仍然正确，而另一些结果要加上补充限

制. 例如,对于定义在$(-\infty,\infty)$上的单调函数 $f(x)$,定理 6.4 的结论成立;定理 6.5 的结论当 $f(\infty)$,$f(-\infty)$均为有限时成立,并且此时,圈变函数也得以定义. 如果 $f(-\infty)$ 有限但 $f(\infty)$ 不作特别要求, 定理 6.9 仍是成立的. 所有这些, 只要应用紧区间去"任意接近"无限区间的方法就容易看出.

## §7. 勒贝格-斯蒂杰积分概念

鉴于勒贝格-斯蒂杰积分(简称 $LS$ 积分)在应用中十分重要,这里将作一个扼要介绍. 我们着重 $LS$ 积分概念的建立, 同时由于基本想法与第四章中勒贝格积分的建立相类似, 这里将着重讨论不同之处,为了便于比较, 我们对黎曼-斯蒂杰积分也作一些初步讨论.

设基本集为闭区间$[a,b]$,$\mu(x)$ 为 $[a,b]$上给定的增函数. 区间$(\alpha,\beta)$的 $\mu$ 测度定义为

$$\mu\{(\alpha,\beta)\}=\mu(\beta-0)-\mu(\beta+0),$$

一点 $\alpha$ 的 $\mu$ 测度定义为

$$\mu\{\alpha\}=\mu(\alpha+0)-\mu(\alpha-0),$$

在这里约定 $\mu(a-0)=\mu(a)$, $\mu(b+0)=\mu(b)$. 于是若开集 $G$ 有表示,$G=\bigcup(\alpha_k,\beta_k)$,$(\alpha_k,\beta_k)$等互不相交,则它的测度定义为

$$\mu G=\sum_k\mu\{(\alpha_k,\beta_k)\}.$$

完全与第二章 §2 相仿,集 $E$ 的外测度定义为

$$\mu^*E=\inf_{G\supset E}\mu G,\ G\text{ 为开集。}$$

闭集的测度、集 $E$ 的内测度 $\mu_*E$ 也与以前一样定义. 若 $\mu^*E=\mu_*E$,则称 $E$ 为 $\mu$ 可测,这时 $E$ 的测度定义为 $\mu E=\mu^*E$.

可以证明,$E$ 为 $\mu$ 可测的充要条件是:对任意的集 $A\subset[a,b]$,

有

$$\mu^*A=\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap \mathscr{C}E).$$

一切 $\mu$ 可测的集用 $\mathscr{M}_\mu$ 记之. 可以证明, $\mathscr{M}_\mu$ 构成一个 $\sigma$ 环. 特别是关于 $\mu$ 完全可加性成立. 由于这些内容几乎是以前所讲的逐句重复, 这里就不讲了. 下面介绍几条为以后所需要的引理.

**引理 7.1** **设 $\mu_1$, $\mu_2$ 均为增函数, 且对任何区间$[\alpha,\beta]$, 有**

$$\mu_1(\beta)-\mu_1(\alpha)\leqslant\mu_2(\beta)-\mu_2(\alpha), \tag{1}$$

**则有 $\mathscr{M}\mu_2\subset\mathscr{M}\mu_1$.**

**证** 首先证明, 对于任何开集 $G$, 有 $\mu_1G\leqslant\mu_2G$.

其实, 据(1), 对任何区间$(\alpha,\beta)$, 有

$$\mu_1(\beta-0)-\mu_1(\alpha+0)\leqslant\mu_2(\beta-0)-\mu_2(\alpha+0),$$

因而据开集测度的定义, 即得 $\mu_1G\leqslant\mu_2G$.

其次, 我们注意到: $E\in\mathscr{M}_\mu$ 的充要条件是, 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在开集 $G\supset E$ 与闭集 $F\subset E$, 使 $\mu(G-F)<\varepsilon$ (参看第二章定理 3.1 及其证明思路). 于是设 $E\in\mathscr{M}_{\mu_2}$, 据所引结果, 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在开集 $G\supset E$ 与闭集 $F\subset E$ 使 $\mu_2(G-F)<\varepsilon$. 但 $G-F=G\cap\mathscr{C}F$ 为开集, 故据已证结果,

$$\mu_1(G-F)\leqslant\mu_2(G-F)<\varepsilon.$$

这样, $E$ 为 $\mu_1$ 可测集. 故得 $\mathscr{M}_{\mu_2}\subset\mathscr{M}_{\mu_1}$.

**引理 7.2** **设 $\mu_1,\mu_2$ 为增函数, 则 $E\in\mathscr{M}_{\mu_1+\mu_2}$ 的充要条件是 $E\in\mathscr{M}_{\mu_1}\cap\mathscr{M}_{\mu_2}$.**

**证** 必要性. 令 $\mu=\mu_1+\mu_2$, 那么对任何区间$[\alpha,\beta]$, 有

$$\mu_i(\beta)-\mu_i(\alpha)\leqslant\mu(\beta)-\mu(\alpha),\ i=1,2.$$

据引理 7.1, 有 $\mathscr{M}_\mu\subset\mathscr{M}_{\mu_i}$, $i=1,2$, 故 $\mathscr{M}_\mu\subset\mathscr{M}_{\mu_1}\cap\mathscr{M}_{\mu_2}$.

充分性. 对任何开集 $G$, 显然有

$$\mu G=\mu_1G+\mu_2G,$$

这里 $\mu=\mu_1+\mu_2$. 设 $E\in\mathscr{M}_{\mu_1}\cap\mathscr{M}_{\mu_2}$, 则对任意的 $\varepsilon>0$, 存在开集

$G_i$ 与闭集 $F_i$, $F_i \subset E \subset G_i$, 使

$$\mu_i(G_i - F_i) < \varepsilon/2, \quad i = 1, 2.$$

令

$$G = G_1 \cap G_2, \quad F = F_1 \cup F_2,$$

那么 $F \subset E \subset G$, 且 $G - F$ 为开集. 故

$$\mu(G-F) = \mu_1(G-F) + \mu_2(G-F)$$
$$\leqslant \mu_1(G_1 - F_1) + \mu_2(G_2 - F_2) < \varepsilon.$$

这样, 我们证明了 $E$ 为 $\mu$ 可测集, 即 $\mathscr{M}_{\mu_1} \cap \mathscr{M}_{\mu_2} \supset \mathscr{M}_\mu$. 引理得证.

下面将引进 $LS$ 积分概念.

设 $\mu$ 为增函数, 那么 $\mu$ 简单函数以及它的 $LS$ 积分与以前一样定义. 非负 $\mu$ 可测函数 $f$, 进而一般 $\mu$ 可测函数 $f$ 的 $LS$ 积分以及 $LS$ 可积概念也与以前一样定义. 并且, 在记号上也毋须作多大的改变. 但要注意, $f$ 的可积性与 $\mu$ 密切相关而不仅同 $f$ 相关. $f$ 关于 $\mu$ 为 $LS$ 可积可记为 $f \in L\mu$. 关于 $LS$ 可积函数的基本性质, 积分序列取极限的一些重要定理在本质上都照样成立. 读者可自行完成它们. 对于一般可测函数 $f$ 关于囿变函数 $\mu$ 的 $LS$ 积分, 情况有所不同. 为了引进它, 还要作一点准备.

**引理 7.3** 设 $\mu_1, \mu_2$ 为有界增函数, 且对任意区间 $(\alpha, \beta)$, 有

$$\mu_1(\beta) - \mu_1(\alpha) \leqslant \mu_2(\beta) - \mu_2(\alpha), \tag{1}$$

**则当 $f$ 关于 $\mu_2$ 为 $LS$ 可积时, $f$ 关于 $\mu_1$ 为 $LS$ 可积.**

**证** 当 $f$ 为 $\mu_2$ 可测时, 对任何实数 $c$, $E(f>c)$ 为 $\mu_2$ 可测. 由 (1) 并据引理 7.1, $E(f>c)$ 为 $\mu_1$ 可测, 故 $f$ 为 $\mu_1$ 可测.

由于可将 $f$ 分为正部、负部考虑, 以下不妨对 $f \geqslant 0$ 情形来证明引理。设 $f \in L_{\mu_2}$. 对任意的 $\varepsilon > 0$ 与任意满足 $0 \leqslant \varphi_1 \leqslant f$ 的 $\mu_1$ 简单函数 $\varphi_1$, 我们断言, 恒存在 $\mu_2$ 简单函数 $\varphi_2$, 满足 $0 \leqslant \varphi_2 \leqslant f$, 使

$$\int_E \varphi_1 d\mu_1 - \varepsilon < \int_E \varphi_2 d\mu_2. \tag{2}$$

其实，设 $\int_E \varphi_1 d\mu_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu_1 E_i$，这里 $\varphi_1(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}(x)$，$E_i$ 等是互不相交的 $\mu_1$ 可测集。取闭集 $F_i \subset E_i$，使 $\mu_1 E_i < \mu_1 F_i + \varepsilon/nM$，$M=\max c_i$。令

$$\varphi_2(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{F_i}(x),$$

则

$$\int_E \varphi_2\, d\mu_2 = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu_2 F_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} c_i \mu_1 F_i > \sum_{i=1}^{n} c_i \left(\mu_1 E_i - \frac{\varepsilon}{nM}\right)$$

$$\geqslant \int_E \varphi_1\, d\mu_1 - \varepsilon.$$

这就证明了(2)。从而

$$\int_E \varphi_1\, d\mu_1 - \varepsilon < \int_E f d\mu_2.$$

令 $\varepsilon \to 0$，得 $\int_E \varphi_1\, d\mu_1 \leqslant \int_E f d\mu_2$。再令 $\varphi_1$ 变动而取上确界，即得 $\int_E f d\mu_1 \leqslant \int_E f d\mu_2$，故 $f \in L_{\mu_1}$。

**引理 7.4** **设 $\mu_1$，$\mu_2$ 均为有界增函数。若 $f \in L_{\mu_1} \cap \mu_2$，则 $f \in L_{\mu_1+\mu_2}$，且有**

$$\int_E f d(\mu_1+\mu_2) = \int_E f d\mu_1 + \int_E f d\mu_2. \tag{1}$$

**证** 不妨设 $f \geqslant 0$。据引理 7.2，$\mathscr{M}_{\mu_1+\mu_2} = \mathscr{M}_{\mu_1} \cap \mathscr{M}_{\mu_2}$，故当 $f \in L_{\mu_1} \cap L^{\mu}_{2}$ 时，$f$ 为 $\mu_1+\mu_2$ 可测函数。取满足 $0 \leqslant \varphi \leqslant f$ 的 $(\mu_1+\mu_2)$ 简单函数 $\varphi$ 时，$\varphi$ 也是 $\mu_1$ 与 $\mu_2$ 简单函数。由关系式

$$\sup_{0\leqslant\varphi\leqslant f} \int_E \varphi d(\mu_1+\mu_2) = \sup_{0\leqslant\varphi\leqslant f} \left\{ \int_E \varphi d\mu_1 + \int_E \varphi d\mu_2 \right\}$$

$$\leqslant \sup_{0\leqslant\varphi\leqslant f} \int_E \varphi d\mu_1 + \sup_{0\leqslant\varphi\leqslant f} \int \varphi d\mu_2$$

得到

$$\int_E fd(\mu_1+\mu_2)\leqslant\int_E fd\mu_1+\int_E fd\mu_2. \tag{2}$$

另一方面，对任意的 $\varepsilon>0$，存在有限个闭集 $A_i$，$B_j$，$i=1,\cdots,m$，$j=1,\cdots,n$，使

$$\int_E fd\mu_1+\int_E fd\mu_2<\sum_{i=1}^m a_i\mu_1 A_i+\sum_{j=1}^n b_j\mu_2 B_j+\varepsilon.$$

但上式右边首两项的和等于

$$\sum_{i=1}^m a_i\sum_{j=1}^n \mu_1(A_i\cap B_j)+\sum_{j=1}^n b_j\sum_{i=1}^m \mu_2(A_i\cap B_j)$$

$$\leqslant\sum_{i,j} a_{ij}(\mu_1+\mu_2)\ (A_i\cap B_j)\leqslant\int_E fd(\mu_1+\mu_2),$$

其中 $a_{ij}=\sup(a_i,b_j)$，故

$$\int_E fd\mu_1+\int_E fd\mu_2<\int_E fd(\mu_1+\mu_2)+\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to0$，得

$$\int_E fd\mu_1+\int_E fd\mu_2\leqslant\int_E fd(\mu_1+\mu_2). \tag{3}$$

合并所得两个不等式(2)，(3)，便得(1)。

**定义 7.1** 设 $\mu$ 为$[a,b]$上的囿变函数．$\mu$ 在$[a,x]$上的总变分，正变分与负变分分别为 $v(x)$，$p(x)$，$n(x)$．再设 $f\in L_v$．那么，称 $f$ 关于 $\mu$ 为 *LS* 可积，并定义它的积分值为

$$\int_E fd\mu=\int_E fdp-\int_E fdn. \tag{1}$$

关于这个定义，有必要作下列几点说明．

第一，(1)式右边两项是否有意义？答案是肯定的．因为对任意区间$(\alpha,\beta)$，有

$$p(\beta)-p(\alpha)\leqslant v(b)-v(a),\quad n(\beta)-n(\alpha)\leqslant v(b)-v(a),$$

故引理 7.3 表明，当 $f\in L_v$ 时，有 $f\in L_p$ 与 $f\in L_n$．

第二，(1)右边的差是否唯一？详细地说，我们已有了表示，

$$\mu(x)=p(x)-\{n(x)-\mu(a)\},$$

即 $\mu(x)$ 表为两个增函数的差. 如果 $\mu(x)$ 又有另外的表示,

$$\mu(x)=p_1(x)-n_1(x)+\mu(a),$$

其中 $p_1(x), n_1(x)$ 为任意增函数且 $p_1(a)=n_1(a)=0$, 那么是否有

$$\int_E f dp-\int_E f dn=\int_E f dp_1-\int_E f dn_1? \tag{2}$$

答案也是肯定的. 因为,据本章定理 6.8, 存在增函数 $r(x)$, 使

$$p_1(x)=p(x)+r(x), \quad n_1(x)=n(x)+r(x),$$

从而据引理 7.3, 又有 $f\in L_r$; 再据引理 7.4, 有

$$\int_E f dp_1=\int_E f dp+\int_E f dr, \quad \int_E f dn_1=\int_E f dn+\int_E f dr.$$

由此立即得到(2). 故(1)的右边唯一确定了积分 $\int_E f d\mu$.

这样, $f$ 关于囿变函数 $\mu$ 的 $LS$ 积分, 我们借助于 $f$ 关于增函数的 $LS$ 积分来定义. 因而关于这种积分的一系列性质的建立都可以借助前面关于增函数的积分的性质得出来. 还可以证明有界波雷尔可测函数关于任何 $LS$ 测度是可积的.

鉴于 $RS$ 积分在应用上的重要性, 并为了将它与 $LS$ 积分作若干比较, 我们在下面对它的定义与性质作一些介绍.

**定义 7.2** 设 $\mu(x)$ 为区间 $[a, b]$ 上的增函数, $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的有界实函数. 对 $[a, b]$ 的任一分点组

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

在每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 中任取点 $\xi_i$, $i=0, 1, \cdots, n-1$, 作和

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)[\mu(x_{i+1})-\mu(x_i)].$$

如果当 $\lambda=\max_i(x_{i+1}-x_i)\to 0$, $\sigma$ 有有限极限 $I$, 则称 $f$ 关于 $\mu$ 为 $RS$ 可积的, 且它的积分值记为

$$I=\int_a^b f(x)d\mu(x)$$

或简记为

$$\int_a^b f d\mu.$$

同本章 §4 一样，引进积分大和与小和如下：

$$S=\sum_{i=0}^{n-1} M_i(\mu(x_{i+1})-\mu(x_i)),$$

$$s=\sum_{i=0}^{n-1} m_i(\mu(x_{i+1})-\mu(x_i)),$$

其中 $M_i$, $m_i$ 分别为 $f(x)$ 在区间$[x_i, x_{i+1}]$上的上、下确界．那么，可以证明，函数 $f(x)$ 关于 $\mu(x)$ 为 $RS$ 可积的充要条件是，当 $\lambda\to 0$ 时，对同一分点组作出的大和 $S$ 与小和 $s$ 都趋于同一极限 $I$（参看定理 4.1）.

**定理 7.1　设 $\mu$ 为$[a, b]$上增函数．若 $f$ 在 $[a, b]$ 上连续，则 $f$ 关于 $\mu$ 的 $RS$ 积分存在.**

**证**　设任取 $\varepsilon>0$．由于 $f$ 在$[a, b]$上一致连续，存在 $\delta>0$，使当 $x, y\in[a, b]$，$|x-y|<\delta$ 时有

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon(\mu(b)-\mu(a)+1)^{-1}.$$

假定分点组

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

所对应的 $\lambda=\max\limits_i (x_{i+1}-x_i)<\delta$，而 $\xi_i$, $\eta_i\in[x_i, x_{i+1}]$ 分别满足 $f(\xi_i)=M_i$, $f(\eta_i)=m_i$, $i=0, 1, \cdots, n-1$．那么对此分点组有

$$S-s=\sum_{i=0}^{n-1}[f(\xi_i)-f(\eta_i)][\mu(x_{i+1})-\mu(x_i)]$$

$$\leqslant\varepsilon(\mu(b)-\mu(a)+1)^{-1}\sum_{i=0}^{n-1}[\mu(x_{i+1})-\mu(x_i)]\leqslant\varepsilon,$$

因此，$f$ 关于 $\mu$ 的 $RS$ 可积性得证.

下列例子表明，对于不连续函数，$RS$ 积分可能不存在.

**例**　设 $f(x)$ 与 $\mu(x)$ 在$[-1, 1]$上的定义分别是

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in[-1,0],\\ 1, & x\in(0,1],\end{cases}\qquad \mu(x)=\begin{cases}0, & x\in[-1,0),\\ x+1, & x\in[0,1],\end{cases}$$

我们来考察 $f$ 关于 $\mu$ 的 $RS$ 积分. 取分点组 $\{x_i\}$, $i=0,1,\cdots,n$, 假定 $0\overline{\in}\{x_i\}$. 于是在含 0 的小区间中分别取 $f(\xi_r)=0$ 与 $f(\xi_r)=1$ 时, 则相应的积分和分别是

$$\sigma_1=0+\sum_{i=r+1}^{n}1\cdot[\mu(x_i)-\mu(x_{i-1})]\to\mu(1)-\mu(0^+)=1,$$

$$\sigma_2=0+\sum_{i=r}^{n}1\cdot[\mu(x_i)-\mu(x_{i-1})]\to\mu(1)-\mu(0^-)=2.$$

因此 $f$ 关于 $\mu$ 的 $RS$ 积分不存在(图 16).

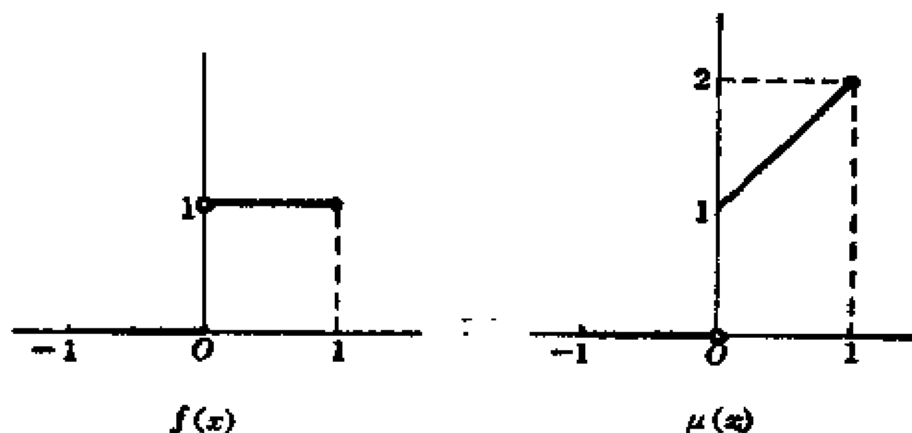



图 16

可是, 容易求出 $f$ 关于 $\mu$ 的 $LS$ 积分为 1. 实际上, $f$ 是 $\mu$ 简单函数, 据定义有

$$\int_{[-1,1]}fd\mu=0\cdot\mu([-1,0])+1\cdot\mu((0,1])=\mu(1)-\mu(0)=1.$$

**定理 7.2** 设 $\mu$ 是 $[a,b]$ 上的增函数. 我们有:

(i) 设 $f_1$, $f_2$ 关于 $\mu$ 在 $[a,b]$ 上均为 $RS$ 可积, $c_1$, $c_2$ 为常数, 则 $c_1f_1+c_2f_2$ 关于 $\mu$ 也为 $RS$ 可积, 且有

$$\int_a^b(c_1f_1+c_2f_2)d\mu=c_1\int_a^bf_1d\mu+c_2\int_a^bf_2d\mu. \tag{1}$$

(ii) **设 $f$ 关于 $\mu$ 在 $[a,b]$ 上为 $RS$ 可积，且 $a<c<b$，则 $f$ 关于 $\mu$ 在 $[a,c]$ 上与 $[c,b]$ 上均为 $RS$ 可积，且**

$$\int_a^b f d\mu = \int_a^c f d\mu + \int_c^b f d\mu. \tag{2}$$

(iii) **设 $f$ 关于 $\mu$ 在 $[a,b]$ 上为 $RS$ 可积，且 $f \geqslant 0$，则**

$$\int_a^b f d\mu \geqslant 0.$$

**证** 性质(i)与(iii)可据定义立即得出．下面证明性质(ii)。设任给 $\varepsilon>0$，取 $[a,b]$ 中分点组

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

满足

$$\sum_{i=0}^{n-1} M_i[\mu(x_{i+1})-\mu(x_i)]-\sum_{i=0}^{n-1} m_i[\mu(x_{i+1})-\mu(x_i)]<\varepsilon. \tag{3}$$

假定 $c\in[x_r, x_{r+1}]$。那么，令 $m'_r$, $m''_r$ 分别表示 $f$ 在 $[x_r,c]$, $[c, x_{r+1}]$ 上的下确界，而 $M'_r$, $M''_r$ 表示相应的上确界，则有

$$\begin{aligned}
&m_r[\mu(x_{r+1})-\mu(x_r)]=m_r[\mu(c)-\mu(x_r)]+m_r[\mu(x_{r+1})-\mu(c)]\\
&\leqslant m'_r[\mu(c)-\mu(x_r)]+m''_r[\mu(x_{r+1})-\mu(c)]\\
&\leqslant M'_r[\mu(c)-\mu(x_r)]+M''_r[\mu(x_{r+1})-\mu(c)]\\
&\leqslant M_r[\mu(x_{r+1})-\mu(x_r)].
\end{aligned}$$

因此不妨假定 $c$ 已属于分点组 $\{x_i\}_{i=0}^{n-1}$ 中，例如说，$c=x_r$，同时(3)成立，于是，由于(3)可以写成

$$\left\{\sum_{i=0}^{r-1} M_i[\mu(x_{i+1})-\mu(x_i)]-\sum_{i=0}^{r-1} m_i[\mu(x_{i+1})-\mu(x_i)]\right\}$$

$$+\left\{\sum_{i=r}^{n-1} M_i[\mu(x_{i+1})-\mu(x_i)]-\sum_{i=r}^{n-1} m_i[\mu(x_{i+1})-\mu(x_i)]\right\}<\varepsilon,$$

并且每个花括号中的项都是非负的，就知道它们都小于 $\varepsilon$．这表明 $f$ 关于 $\mu$ 在 $[a,c]$ 以及在 $[c,b]$ 上的 $RS$ 积分都存在，并且容易看出(2)成立．

同 $R$ 积分与 $L$ 积分的关系类似，我们有

**定理 7.3** **设 $\mu$ 是 $[a,b]$ 上的增函数，$f$ 是 $[a,b]$ 上的有界函数。则 $f$ 在 $[a,b]$ 上关于 $\mu$ 为 $RS$ 可积时，必 $LS$ 可积，且积分值相等.**

**证** 取区间 $[a,b]$ 的一个分割序列

$$D_i: a=x_0^{(i)}<x_1^{(i)}<\cdots<x_{n_i}^{(i)}=b$$

使 $D_{i+1}$ 的分点包含 $D_i$ 的分点，并使

$$\lambda_i=\max_k(x_{k+1}^{(i)}-x_k^{(i)})\to 0 \quad (i\to\infty).$$

考察简单函数列

$$\underline{f}_i(x)=\begin{cases} m_k^{(i)}, & x_k^{(i)}\leqslant x<x_{k+1}^{(i)} \quad (k=0,1,\cdots,n_i-1), \\ f(b), & x=b, \end{cases}$$

其中 $m_k^{(i)}$ 表示 $f(x)$ 在小区间 $[x_k^{(i)}, x_{k+1}^{(i)}]$ 上的下确界，显然 $\underline{f}_i$ 的 $LS$ 积分为

$$\int_{[a,b]}\underline{f}_i(x)d\mu=\sum_{k=0}^{n_i-1} m_k^{(i)}\mu(x_k^{(i)}, x_{k+1}^{(i)})+f(b)[\mu(b)-\mu(b-0)].$$

不难明了，上式右边当 $\lambda_i\to 0$ 时趋于 $f$ 关于 $\mu$ 的 $RS$ 积分. 由于 $\{\underline{f}_i\}$ 为有界递增序列，故据关于 $LS$ 积分的勒维定理，即得

$$\lim_{i\to\infty}\int_{[a,b]}\underline{f}_i(x)d\mu=\int_{[a,b]}\lim_{i\to\infty}\underline{f}_i(x)d\mu=\int_a^b f(x)d\mu,$$

并且还有 $\lim\limits_{i\to\infty}\underline{f}_i(x)\leqslant f(x)$. 同理，考虑函数序列 $\overline{f}_i(x)$ 时(对应于取上确界情形)，可得

$$\int_{[a,b]}\lim_{i\to\infty}\overline{f}_i(x)d\mu=\int_a^b f(x)d\mu.$$

并且还有 $f(x)\leqslant\lim\limits_{i\to\infty}\overline{f}_i(x)$. 这样，得到

$$\int_{[a,b]}\{\lim_{i\to\infty}\overline{f}_i(x)-\lim_{i\to\infty}\underline{f}_i(x)\}d\mu=0,$$

因此有

$$\int_{[a,b]} f(x)d\mu=\int_{[a,b]}\lim_{i\to\infty}\underline{f}_i(x)\,d\mu=\int_a^b f(x)d\mu.$$

这便直接证明了 $f$ 关于 $\mu$ 的 $LS$ 积分存在且等于 $f$ 关于 $\mu$ 的 $RS$ 积分.

以上我们讨论了 $f$ 关于单调增函数 $\mu$ 的 $RS$ 积分.一般地,当 $\mu$ 是 $[a,b]$ 上的囿变函数时, 我们可以定义 $f$ 关于 $\mu$ 的 $RS$ 积分,方法与 $LS$ 积分情形相同(参看定义 7.1). 就是说,利用 $\mu$ 的标准分解: $\mu(x)=p(x)-n(x)+\mu(a)$.这里 $p(x)$, $n(x)$ 分别是 $\mu(x)$的正变分与负变分,那么定义 $f$ 关于 $\mu$ 在$[a,b]$上的 $RS$ 积分为

$$\int_a^b f(x)d\mu=\int_a^b f(x)dp-\int_a^b f(x)dn,$$

并且积分值是唯一确定的,它不依赖于 $\mu(x)$ 表示为单调函数差的这种分解方式. 于是,据此定义,这种一般 $RS$ 积分的一系列性质可以由相应于 $\mu$ 为增函数情形的 $RS$ 积分的性质得出来.

## 第四章 习 题

1. 设 $f(x)$, $g(x)$ 都是 $E$ 上可测函数, $g(x)\in L$, 且在 $E$ 上几乎处处成立 $f(x)\leqslant g(x)$。问 $f(x)$ 是否可积?

2. 设 $f(x)$ 于 $E$ 上可积, 令 $E_n=E(|f|\geqslant n)$, 则 $\lim\limits_n mE_n=0$。

3. 设在康脱闭集 $P_0$ 上(参看第一章 §4 的例)定义函数 $f(x)$ 为零,而在 $P_0$ 的补集中长为 $1/3^n$ 的构成区间上定义 $f(x)$ 为 $n$($n\in$ 网)。试证 $f\in L$, 并求积分值。

4. 设 $f(x)\geqslant 0$ 为可测函数,令

$$\{f(x)\}_N=\begin{cases}f(x), & 若\ f(x)\leqslant n,\\ 0, & 若\ f(x)>n,\end{cases}$$

则当 $f(x)$ 几乎处处有限时,有

$$\lim_n\int_E\{f(x)\}_n dm=\int_E f(x)dm.$$

5. 设由$[0,1]$中取 $n$ 个可测子集 $E_1,E_2,\cdots,E_n$。假定$[0,1]$中任一点至

少属于这 $n$ 个集中的 $p$ 个，试证必有一集，它的测度不小于 $p/n$.

提示：利用 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 上的特征函数，并将测度化为积分来考虑.

6. 勒维定理中去掉函数列的非负性假定，结论是否成立？

7. 设 $mE>0$，又设 $E$ 上可积函数 $f(x), g(x)$ 满足 $f(x)<g(x)$，试证

$$\int_E f(x)\,dm<\int_E g(x)\,dm.$$

8. 设 $f(x)$ 为 $E$ 上可积函数，如果对任何有界可测函数 $\varphi(x)$，都有

$$\int_E f(x)\varphi(x)\,dm=0,$$

则 $f\sim 0$.

9. 证明下列等式：

$$\int_{(0,1)} \frac{x^p}{1-x}\log\frac{1}{x}\,dm=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(p+n)^2}\quad(p>-1).$$

10. 设 $f(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上的可积函数，若对任何 $c\in(0,1)$ 恒有 $\int_{(0,c)} f(x)\,dm=0$，则 $f\sim 0$.

11. 求极限
$$\lim_{n\to\infty}(R)\int_0^1 \frac{nx^{1/2}}{1+n^2x^2}\sin^5 nx\,dx.$$

12. 设 $f(x)$ 在有限区间 $[a,b]$ 上可积，试证，对每个 $n\in\mathbb{N}$，$[nf(x)]$ 可测且有等式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_{(a,b)}[nf(x)]\,dm=\int_{(a,b)} f(x)\,dm,$$

其中 $[y]$ 表示实数 $y$ 的整部.

13. 设 $f\in L(\mathbb{R})$ 且 $\int_{-\infty}^{\infty} f\,dm\neq 0$，$a$ 是一确定的实数. 令

$$F(x)=\frac{1}{2x}\int_{a-x}^{a+x} f(t)\,dm,\ x\in\mathbb{R}.$$

试证 $F\,\overline{\in}\,L(\mathbb{R})$.

14. 设 $f(x)$ 是以 $2\pi$ 为周期的实可测函数，若 $f(x)$ 又有周期 1，试证 $f(x)$ 几乎处处为常数. 这样的函数是否必为常数？

提示：先由 $f$ 为连续进行考虑并注意数集 $\{2k\pi+l: k,\ l\in\mathbb{Z}\}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密.

15. 设对每个 $n\in\mathbb{N}$，$f_n(x)$ 在 $E$ 上可积，$f_n(x)$ 几乎处处收敛于 $f(x)$，且一致有

$$\int_E |f_n(x)|\,dm \leqslant K,\ K\text{为常数,}$$

则$f(x)$可积。

16．设 $f(x)$，$f_n(x)$ ($n\in\mathbb{N}$) 均是 $E$ 上可积函数，$f_n(x)$几乎处处收敛于 $f$ 且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n(x)|\,dm=\int_E |f(x)|\,dm,$$

试证：在任意可测子集 $e\subset E$ 上，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_e |f_n(x)|\,dm=\int_e |f(x)|\,dm.$$

提示：对序列 $f_n$ 分别在 $e$ 与 $E-e$ 上应用法杜定理。

17．设 $f(x)$在$(-\infty,\infty)$上可积，则

$$\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h)-f(x)|\,dm=0.$$

18．设 $f$ 是 $\mathbb{R}$ 上可测函数．试证 $f\in L(\mathbb{R})$ 的充要条件是，存在简单函数列 $s_n$，$s_n\in L(\mathbb{R})$，$n\in\mathbb{N}$，满足：$s_n$ 测度收敛于 $f$ 且

$$\lim_{m,n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} |s_m-s_n|\,dm=0.$$

注　由此可以得到积分的又一定义：

$$\int_{\mathbb{R}} f\,dm=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} s_n\,dm.$$

19．设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的可积函数，试证

$$\hat{f}(t)=\int_{\mathbb{R}} e^{-itx}f(x)\,dx$$

是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数，且

$$\hat{f}(t)=\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-itx}-1}{ix}f(x)\,dx.$$

提示：应用勒贝格控制收敛定理。

20．设 $f(x)$ 是$(a,b)$上的可积函数，试证

$$\lim_{t\to\infty}\int_{(a,b)} f(x)e^{itx}\,dx=0.$$

提示：先对特殊的 $f(x)$ 证明结论，再利用极限过程．这个结果称为黎曼-勒贝格引理。

21. 设 $mE<\infty$. 则 $f(x)$ 在 $E$ 上可积的充要条件是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} mE(|f|\geqslant n)$ 收敛. 当 $mE=\infty$ 时, 结论是否成立?

22. 设 $f(x),g(x)$ 分别是定义在集 $X,Y$ 上的 $\mu$、$\nu$ 可积函数。则

$$h(x,y)=f(x)g(y)$$

是乘积空间 $X\times Y$ 上的可积函数, 且有

$$\int_{X\times Y} hd(\mu\times\nu)=\int_X fd\mu\int_Y gd\nu.$$

22. 设 $(X,\mathfrak{R},\mu)=(Y,\mathfrak{Y},\nu)$ 为对应于勒贝格测度的单位区间这样的测度空间, $E$ 是 $X\times Y$ 中适合下述条件的集: 对每个 $x$ 与每个 $y$, $E_x$ 与 $X-E^y$ 都是可列集. 那么, $E$ 是不可测的。

提示: 应用傅比尼定理。

23. 设在可测空间$(X,\mathfrak{R})$ 上给定两个测度 $\mu_1$、$\mu_2$. 令 $\mu=a_1\mu_1+a_2\mu_2$. 这里 $a_1$、$a_2$ 是实数. 试证存在 $X$ 的分解 $X=A\cup B$, $A\cap B=\phi$, 使 $A$ 为 $\mu$ 的正集, $B$ 为 $\mu$ 的负集. ($\mu$ 的正集 $A$ 定义为: 对每个可测集 $E$、$E\cap A$ 可测且 $\mu(E\cap A)\geqslant 0$. 负集的定义类似.)

24. 设 $\varphi$ 为 $\mathbb{R}$ 上复值连续映射, 满足:

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)\varphi(y), \text{ 且 } |\varphi(x)|=1 \quad (x,y\in\mathbb{R}).$$

试证, 存在 $\lambda\in\mathbb{R}$, 使 $\varphi(x)=e^{i\lambda x}$ $(x\in\mathbb{R})$.

25. 研究函数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\{10^n x\}}{10^n}$ 的可微性, 其中记号 $\{y\}$ 表示数 $y$ 与它最近整数间的距离. 例如, $\{3.1\}=0.1$、$\{3.5\}=0.5$。

26. 设 $\{f_n(x)\}$ 为$[a,b]$上囿变函数列, $f_n(x)$ 收敛于一有限函数 $f(x)$, 且有 $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f_n)\leqslant K$ $(n\in\mathbb{N})$, 则 $f(x)$ 也是囿变函数。

27. 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为绝对连续, 且几乎处处存在非负导数, 则 $f(x)$为增函数.

28. 讨论函数 $f(x)=x^{\alpha}\sin\frac{1}{x^{\beta}}$ $(0\leqslant x\leqslant 1;\ \alpha,\beta>0)$ 的囿变性与绝对连续性.

29. 试作一增函数, 使它的不连续点处处稠密.

30. 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上可积函数, 令 $\mu(a)=m\{|f|>a\}$. 试证:

$$\int_{\mathbb{R}}|f|\,dm=\int_0^{\infty}\mu(a)\,da.$$

31. 设 $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$是$[0, 1]$中有理数集，$\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$为正数列且满足 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$。令 $f(x)=\sum_{n: r_n\leq x} a_n, x\in[0, 1]$。试证 $f(x)$ 是 $[0, 1]$ 的严格增函数，在$[0, 1]$中每个无理点连续，而在每个有理点不连续。

32. 试作 $[0, 1]$ 上的严格增函数，使它处处连续且导数几乎处处为零。

# 第五章　函数空间$L^p$

一切$p$幂可积的函数构成一个函数类，称为$L^p$空间($p\geqslant 1$)．本章着重讨论这种函数空间的完备性，可分性与$L^2$空间傅立叶变式等问题，它们在微分方程、概率论与函数论中都起着重要的作用．这种空间是后面几章所讲赋范线性空间与内积空间的最典型例子，因而为今后学习打下一定的基础．

## §1. $L^p$空间·完备性

设$E$是$\mathbb{R}$中给定的可测集，$f(x)$是定义在$E$上的可测函数．我们将引进一个函数类并研究它的一些重要特性．

**定义 1.1**　设$p\geqslant 1$．若$|f(x)|^p$可积，称$f$是$p$幂可积的．一切$p$幂可积的函数构成一个类，记成$L^p(E)$或简记为$L^p$，称为$L^p$空间．即

$$L^p=\left\{f:\int_E|f|^p dm<\infty\right\}.$$

今后除特别声明外，恒假设$p\geqslant 1$．

**例 1**　设$mE<\infty$，有$L^p\subset L^1$．即对$E$为有限测度情形，$L^p$是$L^1$的子类．

为了证明，设$f\in L^p$．令$A=E(|f|\geqslant 1)$，$B=E-A$．那么注意到$p\geqslant 1$，有

$$\int_E|f|dm=\int_A|f|dm+\int_B|f|dm\leqslant\int_A|f|^p dm+\int_B 1dm$$
$$\leqslant\int_E|f|^p dm+mE<\infty.$$

因此，$f\in L$. 这就证明了，当 $p\geqslant 1$ 时，$L^p\subset L$.

**例 2** 设 $mE=\infty$, 例如 $E=(0,\infty)$, 则例 1 中的结论不再正确. 例如取 $f(x)=(1+x)^{-1}$, 则 $f\in L^p$, $p>1$; 但 $f\overline{\in}L$. 同时，也有函数属于 $L$ 而不属于某个 $L^p$, $p>1$. 例如取

$$f(x)=\begin{cases}x^{-1/p}, & \text{当 } x\in(0,1),\\ 0, & \text{当 } x\in[1,\infty),\end{cases}$$

则容易验明 $f\in L$ 但 $f\overline{\in}L^p$, $p\geqslant 1$.

可以证明，$L^p$ 中的元关于线性运算是封闭的，即 $L^p$ 是一个线性空间.

**定理 1.1** $L^p$ **是一个线性空间.**

**证** 我们只须验明 $L^p$ 中的元关于线性运算是封闭的. 设 $a,b$ 为复数，$f,g\in L^p$, 则

$$\int_E|af|^p dm=|a|^p\int_E|f|^p dm<\infty;$$

同时，由不等式 $|f+g|^p\leqslant 2^p(|f|^p+|g|^p)$ 可得

$$\int_E|f+g|^p dm\leqslant 2^p\int_E|f|^p dm+2^p\int_E|g|^p dm<\infty.$$

因此，$af\in L^p$, $f+g\in L^p$. 由此可知 $af+bg\in L^p$, 即 $L^p$ 是线性空间（线性空间的其他公理对 $L^p$ 显然满足）.

为了进一步讨论 $L^p$ 空间的性质，我们需要两个辅助工具——霍尔得(O. Hölder)不等式与明可夫斯基(H. Minkowski)不等式.

令数 $q$ 满足等式 $1/p+1/q=1$, 并约定 $p=1$ 时 $q=\infty$; $p=\infty$ 时 $q=1$. 称 $p,q$ 互为相伴数. 显然，当 $p\geqslant 1$ 时有 $q\geqslant 1$. 在级数里我们遇到这样的不等式

$$\left|\sum_k a_k b_k\right|\leqslant\left\{\sum_k|a_k|^p\right\}^{1/p}\left\{\sum_k|b_k|^q\right\}^{1/q},\quad p>1,$$

这里 $(a_1,\ a_2,\cdots)$ 与 $(b_1,\ b_2,\cdots)$ 分别为使上式右边两个因子收敛的

数列. 将这个不等式移植到连续变量的情形就是霍尔得不等式.

**定理1.2** **设** $p, q$ **互为相伴数,** $p>1, q>1$. **则对任何** $f\in L^p$, $g\in L^q$, **有** $fg\in L$ **且有不等式:**

$$\left|\int_E fg dm\right|\leqslant\left\{\int_E |f|^p dm\right\}^{1/p}\left\{\int_E |g|^q dm\right\}^{1/q}.$$

**证** 令 $\alpha=1/p$, $\beta=1-\alpha=1/q$, 考虑函数 $y=x^\alpha(0<\alpha<1, x\geqslant0)$. 这函数是上凸的(当 $x>0$ 时 $y''=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}<0$), 因而它在点(1, 1)的切线 $y=\alpha x+\beta$ 位于曲线的上方, 故有不等式

$$x^\alpha\leqslant\alpha x+\beta(x\geqslant0).$$

把 $x$ 换成 $u/v$ 得到 $u^\alpha v^{-\alpha}\leqslant\alpha uv^{-1}+\beta$ 或

$$u^\alpha v^\beta\leqslant\alpha u+\beta v\ \ (u, v\geqslant0).$$

令 $u=|f(x)|^p:\int_E |f|^p dm$, $v=|g(x)|^q:\int_E|g|^q dm$, 代入上式得

$$\frac{|f(x)|\cdot|g(x)|}{\left(\int_E|f|^p dm\right)^{1/p}\left(\int_E|g|^q dm\right)^{1/q}}$$

$$\leqslant\frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\int_E|f|^p dm}+\frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{\int_E|g|^q dm}$$

两边进行积分给出

$$\int_E|fg|dm\leqslant\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\left(\int_E|f|^p dm\right)^{1/p}\left(\int_E|g|^q dm\right)^{1/q}.$$

由于 $1/p+1/q=1$, $\left|\int fg dm\right|\leqslant\int|fg|dm$, 这就证明了霍尔得不等式.

**注1** 应当指出, 在上面证明中需假定 $\int|f|^p dm$, $\int|g|^q dm$ 均不为0. 但在相反情形下, 霍尔得不等式明显成立.

**注2** 当 $p, q$ 中有一个为1、而另一为∞时, 我们遇到空间 $L^\infty$. 它是 $L^p(p\geqslant1)$ 空间的一极端情形, 称为本性有界函数空间. 如

果以量 $\inf\limits_{me=0}\sup\limits_{x\in E-e}|f(x)|$ 代替霍尔得不等式右边第一个因子，那么当 $p=\infty, q=1$ 时，所述不等式仍然正确，并且可以直接得出而毋需象上面那样证明.

对于空间 $L^p$ 的元 $f$，如果引进记号

$$\|f\|_p=\left\{\int_E|f|^p dm\right\}^{1/p},$$

称为 $f$ 的范数，那么霍尔得不等式可写成

$$\left|\int_E fg dm\right|\leqslant\|f\|_p\cdot\|g\|_q,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

特别，当 $p=2$，$q=2$ 时，上述不等式化为施瓦茨（H. A. Schwarz）不等式

$$\left|\int_E fg dm\right|\leqslant\|f\|_2\cdot\|g\|_2,\ f,g\in L^2.$$

利用霍尔得不等式可以证明关于空间 $L^p$ 的范数的三角不等式，它又称为明可夫斯基不等式.

**定理 1.3** 设 $f,g\in L^p$, $p\geqslant 1$，则有不等式

$$\|f+g\|_p\leqslant\|f\|_p+\|g\|_p.$$

**证** 当 $p=1$ 时显然有

$$\int_E|f+g|dm\leqslant\int_E|f|dm+\int_E|g|dm,$$

即所证不等式成立. 设 $p>1$，据 $L^p$ 的线性，知 $f+g\in L^p$. 因此，$|f+g|^{p/q}\in L^q(1/p+1/q=1)$. 于是对两函数 $f$ 与 $|f+g|^{p/q}$ 应用霍尔得不等式，得

$$\int_E|f|\,|f+g|^{p/q}dm\leqslant\|f\|_p\left\{\int_E|f+g|^p dm\right\}^{1/q}.$$

同理，

$$\int_E|g|\,|f+g|^{p/q}dm\leqslant\|g\|_p\left\{\int_E|f+g|^p dm\right\}^{1/q}.$$

联合所得两个不等式，并注意到 $p-1=p/q$，可得

$$\int_E |f+g|^p dm \leqslant \int_E |f||f+g|^{p-1} dm + \int_E |g||f+g|^{p-1} dm$$
$$\leqslant \|f\|_p \left\{\int_E |f+g|^p dm\right\}^{1/q}$$
$$+\|g\|_p \left\{\int_E |f+g|^p dm\right\}^{1/q}.$$

不妨设 $f+g$ 不对等于零（否则要证的不等式显然正确）. 将上面不等式两边同除以$\left(\int_E |f+g|^p dm\right)^{1/q}$并注意到 $1-1/q=1/p$, 即得 $\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$.

上面已经提到, $L^p$ 中元 $f$ 的范数用

$$\|f\| = \|f\|_p = \left\{\int_E |f|^p dm\right\}^{1/p}$$

定义. 容易验明, 这种范数满足下列范数公理:

（i）$\|f\|_p \geqslant 0$; 等号成立的充要条件是 $f \sim 0$;

（ii）$\|af\|_p = |a|\|f\|_p$, $a$ 是复数;

（iii）$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$.

据定理 1.1, $L^p$ 又是线性空间, 因而, $L^p$ 是赋范线性空间(关于一般赋范线性空间, 详见第七章). 在 $L^p$ 中, 可以借用范数来引进两个元 $f$ 与 $g$ 之间的距离 $\|f-g\|_p$. 这时 $L^p$ 又成为距离空间(关于一般距离空间, 详见第六章). 有了距离, 便可定义 $L^p$ 中元列的收敛概念.

**定义 1.2** 设 $f, f_n \in L^p$, $n \in \mathbb{N}$. 如果当 $n \to \infty$ 时, $f_n$ 与 $f$ 的距离 $\|f_n - f\|_p$ 收敛于 0, 则称 $f_n$ 强收敛于 $f$ 或称 $f_n$ 依范数收敛于 $f$. 这时说 $f$ 是 $f_n$ 的强极限, 简记为 $f_n \xrightarrow{强} f$. 强收敛是 $L^p$ 中最基本的一个收敛概念.

据三角不等式可知

$$|\|f_n\|_p - \|f\|_p| \leqslant \|f_n - f\|_p,$$

因而当 $f_n$ 强收敛于 $f$ 时, 可推出范数列 $\|f_n\|_p$ 收敛于 $\|f\|_p$ ($n \to$

$\infty$). 这是范数的连续性.

**例 1** 考察 $L^2[0,1]$中的函数列

$$f_n(x)=\begin{cases}n, & x\in(0,1/n),\\ 0, & x\in[1/n,1],x=0,\end{cases}$$

$n\in\mathbb{N}$. 容易看出,当 $n\to\infty$ 时, $f_n(x)\to 0(x\in[0,1])$. 可是,元列 $f_n$ 在 $L^2[0,1]$中并不强收敛于 $f\equiv 0$. 这是因为,

$$\int_{[0,1]}|f_n(x)-f(x)|^2dm=\int_{(0,1/n)}n^2dm=n\to\infty.$$

此例表明几乎处处收敛(甚至处处收敛)未必蕴含强收敛. 反例只强调困难的一面, 正如通常所做的那样. 要想举一个几乎处处收敛同时又强收敛的序列是极其容易的.

**例 2** 在 $L[0,1]$中考察函数列

$$f_n(x)=\chi_{\left[\frac{i}{2^k},\frac{i+1}{2^k}\right]}(x),\quad n=2^k+i,0\leqslant i<2^k.$$

例如, $f_1=\chi_{[0,1]}$, $f_2=\chi_{[0,1/2]}$, $f_3=\chi_{[1/2,1]}$, $\cdots$, $f_{18}=\chi_{[1/4,3/8]}$, $\cdots$. 设取 $f(x)=0,x\in[0,1]$. 那么,对于 $n=2^k+i,0\leqslant i<2^k$,有

$$\int_{[0,1]}|f_n(x)-f(x)|dm=\int_{[i/2^k,(i+1)/2^k]}1dm=\frac{1}{2^k},$$

而当 $n\to\infty$ 时有 $k\to\infty$,因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{[0,1]}|f_n(x)-f(x)|dm=0$. 这就是说 $f_n\xrightarrow{\text{强}}0$(依 $L[0,1]$中的范),但不难证明$\{f_n(x)\}$处处不收敛于 0. 这从函数列的图形立可看出. 现用二进小数法说明如下. 我们约定二进有理数采用有尽表示, 对二进制数恒用括弧标出, 以示区别. 这样, $(101)=5$, $(0.101)=5/8$, 等等. 假定 $x=(0.x_1x_2\cdots x_k\cdots)$, $x_k\in\{0,1\}$,考虑$\{f_n\}$的子列

$$f_{(1)},f_{(1x_1)},f_{(1x_1x_2)},\cdots,f_{(1x_1\cdots x_k)},\cdots.$$

由于$(1x_1\cdots x_k)=2^k+(x_1x_2\cdots x_k)$,故 $f_{(1x_1\cdots x_k)}$ 在区间$[(x_1\cdots x_k)2^{-k},((x_1\cdots x_k)+1)2^{-k}]$上取值 1. 这区间含有点 $x$, 故 $f_{(x_1\cdots x_k)}$在 $x$ 处

取值 1, $k\in\mathbb{N}$. 而序列$\{f_n\}$中其他元在点 $x$ 均取值 0. 这样, 序列$\{f_n\}$不收敛.

**定义 1.3** 设 $f_n$, $n\in\mathbb{N}$ 是 $L^p$ 中的元列。如果当 $m,n\to\infty$ 时, 有 $\|f_m-f_n\|_p\to 0$, 则称 $f_n$ 是 $L^p$ 中的*基本列*.

容易看出. 当 $f_n$ 强收敛于 $f$ 时, $f_n$ 是基本列. 其实, 利用不等式

$$\|f_m-f_n\|_p\leqslant\|f_m-f\|_p+\|f_n-f\|_p$$

便可知道了. 反过来也正确:

**定理 1.4** **设 $f_n$, $n\in\mathbb{N}$ 是 $L^p=L^p(E)$ 中基本列, 即当 $m,n\to\infty$ 时 $\|f_m-f_n\|_p\to 0$, 则存在一个元 $f\in L^p$, 使 $f_n\xrightarrow{\text{强}}f$.**

**证** 因 $f_n$ 为基本列, 对每个自然数 $k$, 可选自然数 $n_k$, 使

$$\|f_{n_k}-f_{n_{k+1}}\|_p\leqslant 1/2^k,\ k\in\mathbb{N}.$$

从而据霍尔得不等式, 对 $E$ 的每一具有有限测度的子集 $e$, 有

$$\int_e|f_{n_k}-f_{n_{k+1}}|dm\leqslant\|f_{n_k}-f_{n_{k+1}}\|_p\cdot\|1\|_q=(me)^{1/q}2^{-k}.$$

因此级数 $\sum\limits_k\int_e|f_{n_k}-f_{n_{k+1}}|dm$ 收敛. 据第四章定理 3.1 推知级数

$$|f_{n_1}(x)|+|f_{n_2}(x)-f_{n_1}(x)|+|f_{n_3}(x)-f_{n_2}(x)|+\cdots$$

在子集 $e(me<\infty)$ 上几乎处处收敛(和函数可积, 因而几乎处处有限). 由 $e$ 的任意性, 上述级数在 $E$ 上也几乎处处收敛。于是级数

$$f_{n_1}(x)+\{f_{n_2}(x)-f_{n_1}(x)\}+\{f_{n_3}(x)-f_{n_2}(x)\}+\cdots$$

在 $E$ 上几乎处处收敛于某个可测函数 $f(x)$. 这就表明, 序列 $f_{n_k}(x)$在 $E$ 上几乎处处收敛于 $f(x)$.

现在证明, $f\in L^p$ 且为 $f_n$的强极限: $f_n\xrightarrow{\text{强}}f$.

仍然由 $f_n$ 为基本列可知, 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在自然数 $N$, 使当 $n,n_k>N$ 时, 有 $\|f_{n_k}-f_n\|_p<\varepsilon$. 利用第四章定理 3.3 (对每一固定的 $n>N$, 令 $k\to\infty$), 得到

$$\|f-f_n\|_p \leqslant \varepsilon \quad (n>N).$$

据 $f-f_n \in L^p$, $f=(f-f_n)+f_n$ 知 $f\in L^p$, 并且上式表明, $f_n \xrightarrow{强} f$.

**注 1** 定理 1.4 说明，空间 $L^p$ 的任何基本列必有强极限，且极限元属于 $L^p$. 这正表明空间 $L^p$ 是完备的. 在实数论里，我们知道，任何基本列或哥西(A. L. Cauchy)数列必有极限(为一实数)，这是实数集的完备性. 读者试将两者加以比较.

**注 2** 关于极限元 $f$ 的唯一性问题，可以说，在彼此对等的元当作同一个元，这样理解下，答案是肯定的. 实际上，设 $f_n \xrightarrow{强} f$, $f_n \xrightarrow{强} g$, 则由不等式

$$\|f-g\|_p \leqslant \|f-f_n\|_p + \|f_n-g\|_p$$

令 $n\to\infty$ 得到 $\|f-g\|_p=0$, 故 $f\sim g$. 今后关于唯一性问题都按这个注来理解.

**注 3** 以上全是讨论当 $p\geqslant 1$ 时空间 $L^p$ 的情形. 当 $0<p<1$ 时，情况就很不相同. 例如，对于非负的可测函数 $f, g$，可以证明反向的明可夫斯基不等式成立：

$$\|f+g\|_p \geqslant \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{1}$$

但若用 $\|\cdot\|_p^p$ 代替 $\|\cdot\|_p$ 时，我们有不等式

$$\|f+g\|_p^p \leqslant \|f\|_p^p + \|g\|_p^p, \quad f, g\in L^p. \tag{2}$$

后者的作用是可以用以讨论空间 $L^p$ 当 $0<p<1$ 时的收敛与完备性等问题. 下面举一个数值例子以验明这种情况.

**例** 考虑空间 $L^{1/2}=L^{1/2}(0, 1)$. 取两个非负函数如下：

$$f(x)=x^2, \quad g(x)=1+2x, \quad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

容易求出，$\|f+g\|_{1/2}=\left\{\int_0^1 (1+x)dx\right\}^2=9/4$, $\|f\|_{1/2}=\left\{\int_0^1 x dx\right\}^2=1/4$, $\|g\|_{1/2}=\frac{2}{9}(14-3\sqrt{3})$. 不等式(1), (2)分别对应于

$$\frac{9}{4}>\frac{1}{4}+\frac{2}{9}(14-3\sqrt{3}) \quad 或 \quad 5<3\sqrt{3}$$

与

$$\frac{3}{2}<\frac{1}{2}+\frac{1}{3}(3\sqrt{3}-1) \quad 或 \quad 4<3\sqrt{3},$$

他们显然都正确.

## §2. $L^p$空间的可分性

空间 $L^p$ 除了完备性以外,还具有可分性. 就是说,它有可列的稠密子空间. 于是空间 $L^p$ 的结构就比较简单,很多问题可以先从它的这种稠密子空间开始进行研究.

**定义 2.1** 设 $A$ 是 $L^p$ 的一个子类. 若对任一个 $f\in L^p$, 恒有元列 $g_n\in A$ 使$g_n\xrightarrow{强}f$, 则称 $A$ 在 $L^p$ 中稠密. 如果存在可列子类 $A$,使 $A$ 在 $L^p$ 中稠密,则说 $L^p$ 是可分的.

可分性可以对一般的距离空间定义,不限于对 $L^p$ 空间. 容易明了, $\mathbb{R}$ 中有理点集在 $\mathbb{R}$ 中稠密, 而有理点集是可列的, 故依所述概念, $\mathbb{R}$ 是可分的. $L^p$ 空间也具有可分性, 它的证法很多. 通常的方法是利用外尔斯脱拉斯逼近定理,我们把它放在定理2.2的推论 2 之后. 这里引进的一个方法是限于已学过的知识的. 我们把证明分成几个步骤并写成引理的形式.

**引理 2.1** **设 $f\in L^p$,则对任意的 $\varepsilon>0$,存在有界可测函数 $g$,使 $\|f-g\|_p<\varepsilon$.**

**证** 对任意的 $\varepsilon>0$,根据积分的绝对连续性,存在 $\delta>0$,使对一切 $e\subset E$, $me<\delta$ 时有

$$\int_e |f|^p dm<\varepsilon^p.$$

令 $A_k=E(|f|>k)$ , $k\in\mathbb{N}$, $B=E(|f|=\infty)$,则由 $f\in L^p$ 可

知，对 $E$ 的每一子集 $e'$，$me'<\infty$，有 $f\in L(e')$. 由于可积函数几乎处处有限，故 $m(B\cap e')=0$。再由 $e'$ 的任意性，知 $mB=0$. 显然，$\{A_k\}$为渐缩序列，因而

$$\lim_{k\to\infty} mA_k=m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right)=mB=0.$$

于是存在 $k_0\in\mathbb{N}$ 使 $mA_{k_0}<\delta$. 现在作函数 $g(x)$如下：

$$g(x)=\begin{cases}f(x), & \text{若 } x\in E-A_{k_0},\\ 0, & \text{若 } x\in A_{k_0}.\end{cases}$$

那么，$g(x)$显然可测，且 $|g(x)|\leqslant k_0$，即 $g$ 是有界可测函数. 由于 $mE(f\neq g)=mA_{k_0}<\delta$，有

$$\|f-g\|_p^p=\int_{E(f\neq g)}|f-g|^p dm=\int_{E(f\neq g)}|f|^p dm<\varepsilon^p,$$

即 $\|f-g\|_p<\varepsilon$.

**引理 2.2 设 $E$ 是有界可测集，$g$ 是 $E$ 上有界可测函数，则对任意的 $\varepsilon>0$，存在简单函数 $\varphi(x)$，使 $\|g-\varphi\|_p<\varepsilon$.**

**证** 令 $M=\sup|g(x)|<\infty$，且不妨设 $M>0$. 这时 $g$ 是 $E$ 上可积函数. 据第四章引理 2.1，存在 $E$ 上的简单函数 $\varphi(x)$，使

$$\int_E|g(x)-\varphi(x)|dm<\varepsilon^p/(2M)^{p-1},$$

且(参看该引理的注)$\sup|\varphi(x)|\leqslant M$. 这样，

$$\int_E|g(x)-\varphi(x)|^p dm\leqslant(2M)^{p-1}\int_E|g(x)-\varphi(x)|dm<\varepsilon^p,$$

从而 $\|g-\varphi\|<\varepsilon$.

**引理 2.3 设 $\varphi(x)$是 $E$ 上简单函数，则对任意的 $\varepsilon>0$，存在有限个互不相交的开集 $G_1,\cdots,G_n$，**它们的构成区间端点全是有理数，以及存在于 $G_1,\cdots,G_n$ 上分别取有理数 $r_1,\cdots,r_n$ 的这样的简单函数 $s(x)$，它在 $E$ 上的限制 $s_0(x)$**适合** $\|\varphi-s_0\|_p<\varepsilon$.

**证** 设 $\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i\chi_{E_i}(x)$，$E=\bigcup_{i=1}^{n}E_i$，且 $E_i$ 等为互不相交的

可测集. 那么,存在闭集 $F_i \subset E_i$, 使

$$m(E_i - F_i) < \varepsilon^p / (2n(2M)^p), \quad i=1, 2, \cdots, n.$$

显然, 闭集 $F_i$ 等也互不相交. 这时, 可以证明(第一章习题 13), 存在互不相交的开集 $G_i \supset F_i$ 且可使这些开集的构成区间端点全为有理数, $i=1, 2, \cdots, n$. 现在令 $s(x)$ 在每个 $G_i$ 上取常数 $r_i$, 使

$$|r_i - c_i| < \varepsilon/(2mE)^{1/p} \text{ 与 } |r_i| \leqslant |c_i|,$$

而在 $\bigcup_{i=1}^{n} G_i$ 之外取值 0. 这样的 $s(x)$ 在 $E$ 上的限制 $s_0(x)$ 便合乎定理要求. 其实,

$$\int_E |\varphi - s_0|^p dm = \int_{\bigcup_i E_i} |\varphi - s|^p dm$$

$$= \int_{\bigcup F_i} |\varphi - s|^p dm + \int_{\bigcup_i (E_i - F_i)} |\varphi - s|^p dm$$

$$< \frac{\varepsilon^p}{2mE} \cdot mE + (2M)^p \frac{\varepsilon^p n}{2n(2M)^p} = \varepsilon^p.$$

有了上述三条引理, 便容易证明空间 $L^p$ 的可分性, 我们正是借用引理 2.3 中所指的简单函数 $s$ 形成的类 $S$ 来达到目的. 易见 $S$ 是可列集.

**定理 2.1　设 $E$ 是有界可测集, 那么 $L^p(E)$, $p \geqslant 1$, 是可分的.**

**证**　任取 $f \in L^p = L^p(E)$, 则 $f \in L(E)$. 据引理 2.1, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在有界可测函数 $g$, 使 $\|f - g\|_p < \varepsilon/3$. 再据引理 2.2, 对这样的 $g$, 存在简单函数 $\varphi$, 使 $\|g - \varphi\|_p < \varepsilon/3$. 最后再据引理 2.3, 存在那里所指的简单函数 $s \in S$, 使 $\|\varphi - s\| < \varepsilon/3$, 于是据三角不等式有

$$\|f - s\|_p \leqslant \|f - g\|_p + \|g - \varphi\|_p + \|\varphi - s\|_p < \varepsilon.$$

但 $S$ 是可列的, 它们在 $E$ 上的限制也是可列集. 这样便容易知

道，可列子类 $S$ 在 $L^p(E)$ 中稠密，故 $L^p(E)$ 是可分的.

**注** 定理只对有界可测集 $E$ 证明了 $L^p(E)$ 的可分性. 对于 $E$ 为无界可测集情形定理仍然成立. 这可以按下列思路来证明. 利用已证明的结果，对每个有界可测集 $E_n=(-n,n)\cap E$，$L^p(E_n)$ 是可分的，$n\in\mathbb{N}$；然后再注意空间族 $\{L^p(E_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是可列的，并且空间 $L^p(E_n)$ 中每个元 $f$ 可以看成 $L^p(E)$ 中的元，只要规定 $f$ 在 $E_n$ 外恒为零.

下面我们来介绍关于连续函数借用多项式的逼近定理. 它是逼近论、近似方法的理论基础，对分析学有重大的影响. $L^p$ 空间的可分性可作为它的一个推论而得出.

**定义 2.2** 用 $C=C[a,b]$ 表示区间 $[a,b]$ 上一切连续函数的类. 称映射 $L:C\to C$ 为 $C$ 中线性算子，如果 $L$ 映 $C$ 到自身且满足

$$L(\alpha f+\beta g)=\alpha L(f)+\beta L(g),$$

其中 $f,g\in C$，$\alpha,\beta$ 为实数. 若对 $C$ 中每个 $f\geqslant 0$ 有 $L(f)\geqslant 0$，称 $L$ 为正算子；若对每个 $f\in C$，$L(f)$ 恒为多项式，则称 $L$ 为多项式算子. 线性算子概念将在第七章中详细讨论.

**例 1** 设 $C=C[0,1]$，则线性算子

$$B_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

为 $C$ 中正算子且是多项式算子（和中每一项均是 $n$ 次多项式）。这算子称为 $f$ 的伯恩斯坦(С.Н. Бернштейн)多项式.

**例 2** 设 $C=C[-\pi,\pi]$，且其中每个元具有周期 $2\pi$，令

$$S_n(f;x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt,$$

则 $S_n(f;x)$ 为 $C$ 中(三角)多项式线性算子，但未必是正算子. 实际上，这算子是 $f$ 的傅立叶级数部分和，它对更广的类——周期为

$2\pi$ 的可积函数类有定义.

**定理 2.2** **设 $L_n(f;x), n\in\mathbb{N}$, 是 $C[a,b]$ 中的正线性算子列, 且满足下列条件: 对每个 $a_t(x)=x^t$, $L_n(a_t;x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $a_t(x)$, $t=0,1,2$. 那么, $L_n(f;x)$ 对每个 $f\in C[a,b]$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$ $(n\to\infty)$.**

**证** 任取 $\varepsilon>0$, 据 $f$ 的连续性, 存在 $\delta>0$, 使当 $|t-x|<\delta$ $(x, t\in[a,b])$ 时, 有

$$-\varepsilon<f(t)-f(x)<\varepsilon. \tag{1}$$

因而令 $M=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|f(t)|$, $\varphi(t)=(t-x)^2$, 就有不等式

$$-\varepsilon-\frac{2M}{\delta^2}\varphi(t)<f(t)-f(x)<\varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}\varphi(t). \tag{2}$$

其实, 当 $|t-x|<\delta$ 时, 由于 $\varphi(t)\geqslant 0$, 据(1)知(2)成立; 当 $|t-x|\geqslant\delta$ 时, 则因 $\varphi(t)\geqslant\delta^2$, 有 $\varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}\varphi(t)>2M$, 且 $|f(t)-f(x)|\leqslant 2M$, 故(2)也成立. 于是对一切 $t, x\in[a,b]$, (2)恒成立.

据算子 $L_n$ 的正性与线性, 由(2)可得(视 $t$ 为函数变元, $x$ 为任一固定的量)

$$-\varepsilon L_n(1;x)-\frac{2M}{\delta^2}L_n(\varphi;x)\leqslant L_n(f;x)-L_n(f(x);x)$$

$$\leqslant\varepsilon L_n(1;x)+\frac{2M}{\delta^2}L_n(\varphi;x). \tag{3}$$

据定理条件, $L_n(1;x)$ 一致收敛于 1, 且易见

$$\begin{aligned}L_n(\varphi;x)&=L_n(t^2-2tx+x^2;x)\\&=L_n(t^2;x)-2xL_n(t;x)+x^2L_n(1;x)\end{aligned}$$

一致收敛于 $x^2-2x\cdot x+x^2=0$, 故存在 $N=N(\varepsilon)$, 使当 $n>N$ 时, 在区间 $[a,b]$ 上一致有

$$|L_n(\varphi;x)|<\varepsilon\delta^2,\quad |L_n(1;x)-1|<\varepsilon; \tag{4}$$

由后一不等式还推出

$$|L_n(1;x)|<1+\varepsilon,\ 当\ n>N. \tag{5}$$

注意到

$$\begin{aligned}&L_n(f;x)-f(x)\\&=L_n(f;x)-L_n(f(x);x)+f(x)\{L_n(1;x)-1\},\end{aligned}$$

据(3)、(4)与(5)便推出，当 $n>N$ 时，在$[a,b]$上一致有

$$|L_n(f;x)-f(x)|\leqslant\varepsilon(1+\varepsilon)+\frac{2M}{\delta^2}\varepsilon\delta^2+M\varepsilon.$$

由于 $\varepsilon$ 是任意的，线性算子列 $L_n(f;x)$ 在 $[a,b]$ 上便一致收敛于 $f(x)$.

定理得证.

定理的意义在于，为了判别线性算子列对整个类 $C[a,b]$的一致收敛性，现在只需要对三个函数 $1,x,x^2$ 去检验就行了. 此定理属于柯罗夫金(П.П.Коровкин).

据所证定理容易推出下列伯恩斯坦定理.

**推论 1　对任何 $f\in C[0,1]$，伯恩斯坦多项式列**

$$B_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k},\ n\in\mathbb{N}$$

**在$[0,1]$上一致收敛于 $f(x)(n\to\infty)$.**

**证**　$B_n(f;x)$是线性、正算子列. 应用定理 2.2，要证明这个推论，只须验明，对于 $a_i(x)=x^i$，$i=0,1,2$，$B_n(a_i;x)$一致收敛于 $a_i(x)$即可. 我们有

$$B_n(1;x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=(x+1-x)^n=1;$$

$$\begin{aligned}B_n(t;x)&=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\&=\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^k(1-x)^{n-k}=x(x+1-x)^{n-1}=x;\end{aligned}$$

$$B_n(t^2;x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=\frac{n-1}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{k-1}{n-1}\binom{n-1}{k-1}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=\frac{n-1}{n}x^2(x+1-x)^{n-2}+\frac{x}{n}(x+1-x)^{n-1}$$

$$=x^2+\frac{x(1-x)}{n}.$$

因而在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上，$B_n(a_i;x)$一致收敛于 $a_i(x)$，$i=0,1,2$.

**推论 2** **设** $f(x)\in C[a,b]$，**则对任何** $\varepsilon>0$，**存在多项式** $P(x)$，**使在** $a\leqslant x\leqslant b$ **上，一致有**

$$|f(x)-P(x)|<\varepsilon.$$

**证** 对于$[a,b]=[0,1]$情形，注意到 $B_n(f;x)$ 为 $n$ 次多项式，应用推论 1 即得所需结论. 对于一般情形，可利用线性变换 $x=a+(b-a)t$ 将区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 化为区间 $0\leqslant t\leqslant 1$ 来考察.

推论 2 是著名的外尔斯脱拉斯 (K. Weierstrass) 逼近定理(1885 年). 利用这一逼近定理，很容易给出空间 $L^p[a,b]$的可分性的一个证明如下.

令 $S[a,b]$ 表示 $[a,b]$ 上一切有界可测函数，则 $S[a,b]$ 在 $L^p[a,b]$ 中稠密 (参看引理 2.1). 据第三章定理 3.2 以及它的说明，可知$C[a,b]$在 $S[a,b]$中稠密. 因此为证 $L^p[a,b]$ 的可分性，只须证 $C[a,b]$是可分的. 于是，令 $\mathscr{I}$ 表示以有理数为系数的一切多项式的全体，$\mathscr{I}$ 显然是可列集. 设 $\varepsilon>0$，据推论 2，存在多项式 $P(x)$，使

$$|f(x)-P(x)|<\varepsilon/(2(b-a)^{1/p}),\quad a\leqslant x\leqslant b.$$

设 $P(x)=\sum_{k=0}^{n}c_kx^k$, 取多项式 $R(x)=\sum_{k=0}^{n}r_kx^k\in\mathscr{I}$, 使

$$|c_k-r_k|<\varepsilon/(2(n+1)A^n(b-a)^{1/p}),\quad k=0,1,\cdots,n$$

其中 $A=\max(1,|a|,|b|)$. 那么, 在 $[a,b]$ 上一致有

$$\begin{aligned}|P(x)-R(x)|&\leqslant\sum_{k=0}^{n}|c_k-r_k||x^k|\\&\leqslant\varepsilon(2(n+1)A^n(b-a)^{1/p})^{-1}(n+1)A^n\\&=\varepsilon/(2(b-a)^{1/p}).\end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned}|f(x)-R(x)|&\leqslant|f(x)-P(x)|+|P(x)-R(x)|\\&<\varepsilon/(b-a)^{1/p},\quad a\leqslant x\leqslant b.\end{aligned}$$

这样, 对于所取的多项式 $R(x)\in\mathscr{I}$, 有

$$\|f-R\|_p\leqslant\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-R(x)|(b-a)^{1/p}<\varepsilon.$$

这就证明了, 可列子集 $\mathscr{I}$ 在 $C[a,b]$ 中稠密. 于是 $L^p[a,b]$ 的可分牲得到了又一证明.

在本节末尾我们作几点评注. 第一, 在空间 $L^p$, $1\leqslant p<\infty$ 中除了强收敛以外还可以引进弱收敛概念. 设 $f_n\in L^p$, 若存在 $f\in L^p$, 使对每个 $g\in L^q$(这里 $q$ 是 $p$ 的相伴数, $1/p+1/q=1$)有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_ngdm=\int_E fgdm,$$

则称 $f_n$ 在 $L^p$ 中弱收敛于 $f$, 记成 $f_n\xrightarrow{\text{弱}}f$. 容易看出, 强收敛蕴含弱收敛. 其实, 设在 $L^p$ 中, $f_n\xrightarrow{\text{强}}f$, 那么据霍尔得不等式, 对每个 $g\in L^q$,

$$\left|\int_E f_ngdm-\int_E fgdm\right|\leqslant\|f_n-f\|_p\cdot\|g\|_q,$$

即 $f_n\xrightarrow{\text{弱}}f$. 可以举出这样的序列, 它是弱收敛的但不强收敛.

**例 1** 在 $L^2(0,\pi)$ 中取 $f_n(x)=\sin nx$, $n\in\mathbb{N}$. 则据傅立叶级

数中的黎曼-勒贝格引理（第四章习题 20），知对任何可积函数 $g(x)$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{(0,\pi)} g(x)\sin nx dx=0,$$

从而注意到 $L^2(0,\pi)\subset L(0,\pi)$，知对任何 $g\in L^2(0,\pi)$，上述关系也成立．这表明 $f_n\xrightarrow{\text{弱}}0$．但 $f_n$ 根本不是强收敛序列．这是因为，对任何 $m,n\in\mathbb{N}$，只要 $m\neq n$，就有 $\|f_m-f_n\|^2=\pi$．

假定基本集的测度为无穷，则由一致收敛未必得出弱收敛．试看下列例子．

**例 2** 设 $p\geqslant 1$，考察空间 $L^p(R)$．令 $f_n(x)=n^{-1}\chi_{(1,\exp(n))}(x)$，这里 $\chi_E$ 表示 $E$ 的特征函数．那么 $f_n\in L^p(\mathbb{R})$，$n\in\mathbb{N}$．现在取 $g(x)=x^{-1}\chi_{(1,\infty)}(x)$，则 $g\in L^q(\mathbb{R})$，$1/p+1/q=1$，并且 $g$ 是有界函数．容易看出，序列 $f_n$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛于 0，但不弱收敛于 0：

$$\int_R f_n g dm=\frac{1}{n}\int_1^{\exp(n)}\frac{dx}{x}=1,\ 对一切\ n\in\mathbb{N}.$$

第二，空间 $L^p$ 当 $p=2$ 时有很多有趣的性质．例如，当 $mE<\infty$ 时，可以在 $L^2(E)$ 中引进元 $f$ 与 $g$ 的内积．

$$(f,g)=\int_E f\bar{g}dm,$$

其中 $\bar{g}$ 表示 $g$ 的共轭，而使 $L^2(E)$ 成为复内积空间．在 $L^2(E)$ 中可以考察标准直交系 $\{\omega_n\}$，$n\in\mathbb{N}$，即满足条件

$$(\omega_k,\omega_j)=0(当\ k\neq j),\ (\omega_k,\omega_k)=1,$$

$k,j\in\mathbb{N}$，并研究 $L^2(E)$ 中元 $f$ 按系 $\{\omega_n\}$ 的直交展开等等．这在后面第八章中将要详细讲到．这里我们仅给出两个具体而重要的直交系的例子．

**例 1** 考察空间 $L^2(-\pi,\pi)$．容易验证，函数系

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \cdots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \cdots$$

是 $L^2(-\pi,\pi)$ 中的标准直交系. 其实, 我们有

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} \frac{\cos jx}{\sqrt{\pi}} dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \{\cos(k+j)x+\cos(k-j)x\}dx$$

$$=\begin{cases}0, & k\neq j,\\ 1, & k=j,\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin jx}{\sqrt{\pi}} dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \{\sin(k+j)x-\sin(k-j)x\}dx=0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin jx}{\sqrt{\pi}} dx$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \{\cos(k+j)x-\cos(k-j)x\}dx$$

$$=\begin{cases}0, & k\neq j,\\ 1, & k=j,\end{cases}$$

$j\in\mathbb{N}$, $k\in\mathbb{P}=\mathbb{N}\cup\{0\}$. 又 $1/\sqrt{2\pi}$ 显然是标准元. 这个系称为三角系, 它是理论与应用中极为重要的一个直交系.

与三角系类似, 可以证明指数函数系 $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}\right\}$, $n\in\mathbb{P}$ 是 $L^2(-\pi,\pi)$ 中的标准直交系.

**例 2** 考察空间 $L^2(0,1)$, 令

$$\varphi_n(x)=\operatorname{sgn}\{\sin(2^{n+1}\pi x)\},\quad n\in\mathbb{P},$$

在 $\varphi_n$ 的不连续点, 规定函数值为它的右极限. 利用函数 $\varphi_n$ 可以定义沃尔什(J.L.Walsh)函数系 $w_k(x)$, $k\in\mathbb{P}$ 如下. 将自然数 $k$

依二进制表示为 $k=(k_{r-1},k_{r-2},\cdots,k_0)$，其中 $k_j\in\{0,1\}$，$r$ 与 $k$ 有关，并且总可假定 $k_{r-1}=1$. 当 $k=0$ 时，$k=(k_0)=(0)$。例如，$6=(1,1,0)$，$3=(1,1)$. 用记号 $I(k)=\{j:k_j=1\}$，对于 $x\in[0,1)$，令

$$w_0(x)=1,$$

$$w_k(x)=\prod_{j\in I(k)}\varphi_j(x),$$

$$k\in\mathbb{N}.$$

那么，称 $\{w_k(x)\}$，$k\in\mathbb{P}$ 为区间 $[0,1)$ 上的沃尔什函数系. 它是标准直交系，首八个函数的图形如图 17 所示. 这个系在信号分析与计算机中有重要的应用，在理论上也有很多有趣的性质.

上面两个例子中给出的标准直交系都是完整的，即不可能找到一个非零的函数，与这系中一切函数相直交. 这一论断可借用逼近论的知识来证明，这里不去讲了.

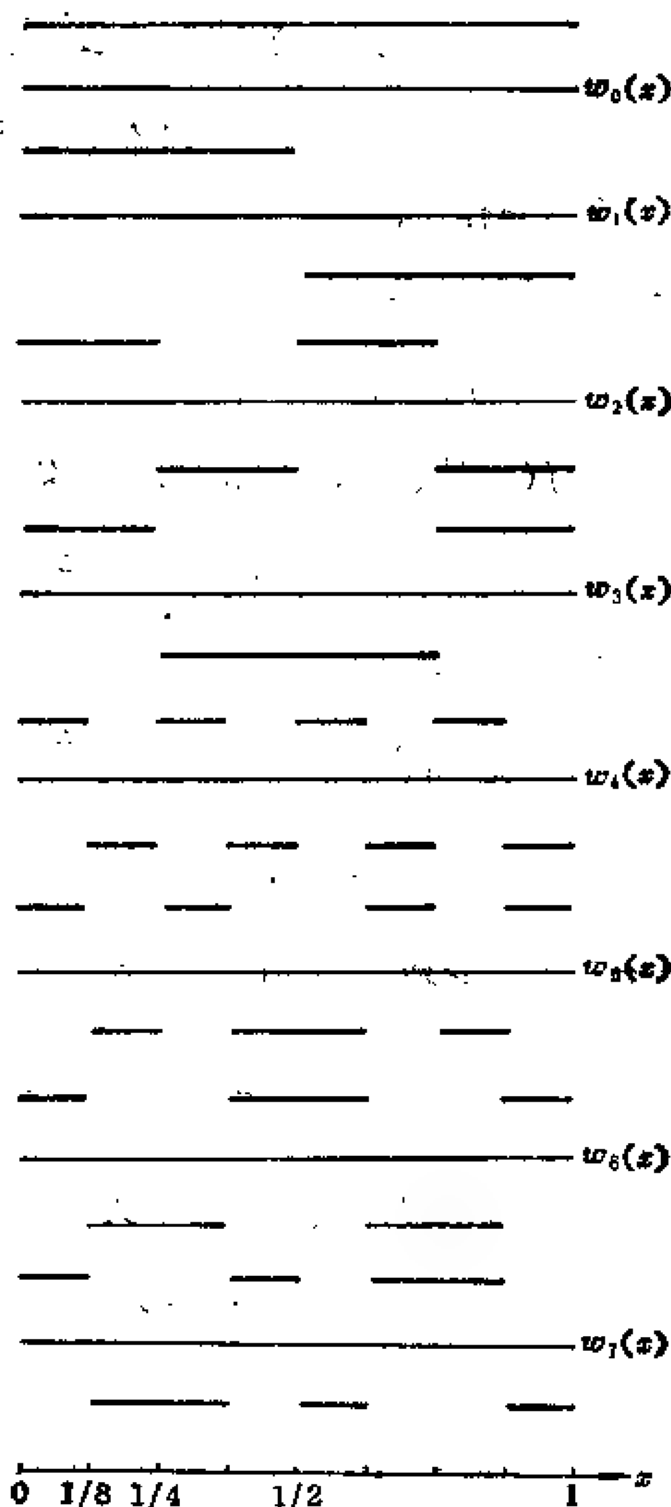



图 17 $w_k(x)$的图形，$k=0,1,\cdots,7$

## §3. 傅立叶变式概要

由于傅立叶变式无论在理论上或是应用上都是极端重要的，我们在这里作个概要性介绍．本节我们总是考察基本集为$\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$的情形，因而为书写方便起见，将积分记号$\int_{\mathbb{R}} f dm$一概写成$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$，空间记号$L^1(-\infty,\infty)$简写成$L^1$，等等．

设$f(x)$是$(-\pi,\pi)$上的可积函数，它的傅立叶级数为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

其中系数由等式

$$\begin{cases} a_k=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx, & k\in\mathbb{P}, \\ b_k=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx, & k\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

确定．应用欧拉(L.Euler)公式

$$\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix}),\quad \sin x=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix}),$$

可将上述级数改写成复级数形式

$$f(x)\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{ikx},$$

其中

$$c_0=a_0/2,\quad c_k=(a_k-ib_k)/2,\quad c_{-k}=\bar{c}^k,\quad k\in\mathbb{N}.$$

当$f(x)$为复函数(实变元的复函数)时，条件$c_{-k}=\bar{c}_k$不一定成立．这时系数由公式

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-ikx}dx,\ k\in\mathbb{Z}$$

给出. 如果把级数看为离散情形, 则转到连续情形时, 级数化为积分. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,\infty)$ 上的可积函数, 我们引进积分

$$\hat{f}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-itx}dx,$$

$t$ 是实参数, 它称为 $f$ 依 $L$ 意义的傅立叶变式, 或称可积函数 $f$ 的傅立叶变式. 由于 $t,x$ 都是实数, $e^{-itx}$ 有界, 故 $f(x)e^{-itx}$ 可积, 从而 $f$ 的傅立叶变式 $\hat{f}$ 对每个 $t\in(-\infty,\infty)$ 有定义。

**例 1** 设 $f(x)=\begin{cases}1, & -a\leqslant x\leqslant a,\\ 0, & \text{其余情形.}\end{cases}$ 试求 $\hat{f}(t)$.

**解** 我们有

$$\hat{f}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}e^{-itx}dx=\frac{1}{2\pi}\left.\frac{e^{-itx}}{-it}\right|_{x=-a}^{a}=\frac{\sin at}{\pi t}.$$

**例 2** 证明 $f(x)=e^{-x^2/2}$ 的傅立叶变式为 $\hat{f}(t)=(2\pi)^{-1/2}e^{-t^2/2}$. 因而除常数因子不计外, $e^{-x^2/2}$ 与它的傅立叶变式取同一形式.

其实, 有

$$\hat{f}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/2}e^{-itx}dx=e^{-t^2/2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x+it)^2/2}dx.$$

由于 $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/2}dx=\sqrt{2\pi}$, 因此如能证明右边积分与 $t$ 无关, 那么便得到所需结论. 令 $z=x+it$, 函数 $e^{-z^2/2}$ 在复平面上处处解析, 因而据哥西定理, 它沿顶点为 $z=\pm R$, $z=\pm R+it$ 的矩形边界 $T$ 的积分为 0. 令 $R\to\infty$, 注意到函数沿矩形 $T$ 两纵边的积分均趋于 0, 而沿矩形 $T$ 的两横边的积分均趋于 $(2\pi)^{-1/2}$, 即与 $t$ 无关.

对于 $f\in L$, 不仅它的傅立叶变式有定义, 而且此变式还是有界连续函数. 其实, 对每个 $t\in(-\infty,\infty)$,

$$|\hat{f}(t)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx = \frac{1}{2\pi}\|f\|_1 < \infty,$$

因而 $\hat{f}(t)$ 有界．为证 $\hat{f}(t)$ 连续，设 $\varepsilon>0$，据 $f$ 的可积性，有正数 $N$，使

$$\int_{|x|>N} |f(x)|\,dx < \varepsilon/4.$$

我们有，对于 $t, t' \in \mathbb{R}$，

$$\int_{-N}^{N} f(x)e^{-it'x}dx - \int_{-N}^{N} f(x)e^{-itx}dx$$

$$= \int_{-N}^{N} f(x)\left(e^{-ix\frac{t'-t}{2}} - e^{ix\frac{t'-t}{2}}\right)e^{-ix\frac{t'+t}{2}}dx,$$

因而

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-it'x}dx - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-itx}dx\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \int_{-N}^{N} |f(x)| \left| -2i \sin\frac{t'-t}{2}x \right| dx$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + N|t'-t|\int_{-N}^{N} |f(x)|\,dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + N|t'-t|\,\|f\|_1.$$

由此可见，取 $t'$ 与 $t$ 充分接近，以致 $2N|t'-t|\,\|f\|_1<\varepsilon$ 时，即有

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-it'x}dx - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{itx}dx\right| < \varepsilon.$$

这样，$\hat{f}(t)$ 于每点 $t\in(-\infty, \infty)$ 连续．如果用 $C$ 表示实轴上有界连续函数空间，$\mathscr{F}$ 表示傅立叶变换：$\mathscr{F}f=\hat{f}$，那么 $\mathscr{F}$ 是由 $L$ 到 $C$ 的线性有界映射或线性有界算子．

我们来建立黎曼-勒贝格定理．

**定理 3.1** 设 $f\in L$，则当 $t\to\pm\infty$ 时，$\hat{f}(t)\to 0$．

**证** 据 $f$ 的可积性，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，使

$$\int_{|x|>N} |f(x)|\,dx < \varepsilon/4.$$

当 $N$ 确定后，我们有 $f\in L(-N,N)$。于是据第四章定理 2.8，存在连续函数 $g(x)(|x|\leqslant N)$，使

$$\int_{-N}^{N}|f(x)-g(x)|dx<\varepsilon/4.$$

对$[-N,N]$上的连续函数 $g$，显然可求出这样的阶梯函数

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{r}c_k\chi_{[x_{k-1},x_k)}(x),\quad x_0=-N<x_1<\cdots<x_r=N,$$

使

$$\int_{-N}^{N}|g(x)-\varphi(x)|dx<\varepsilon/4.$$

从而

$$\int_{-N}^{N}|f(x)-\varphi(x)|dx$$
$$\leqslant\int_{-N}^{N}|f(x)-g(x)|dx+\int_{-N}^{N}|g(x)-\varphi(x)|dx<\varepsilon/2.$$

令 $M=\max|c_k|$，则由

$$\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k}c_ke^{-itx}dx\right|=\left|c_k\cdot\frac{e^{-itx_k}-e^{-itx_{k-1}}}{-it}\right|$$
$$\leqslant\left|\frac{2c_k}{t}\right|\leqslant\frac{2M}{|t|},\quad k=1,2,\cdots,r$$

知

$$\left|\int_{-N}^{N}\varphi(x)e^{-itx}dx\right|=\left|\sum_{k=1}^{r}\int_{x_{k-1}}^{x_k}c_ke^{-itx}dx\right|\leqslant\frac{2rM}{|t|}.$$

因此当 $|t|$ 充分大时，$|t|>T$，有

$$\left|\int_{-N}^{N}\varphi(x)e^{-itx}dx\right|<\varepsilon/4.$$

综合所得结果，注意到等式

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-itx}dx=\int_{|x|>N}f(x)e^{-itx}dx$$
$$+\int_{-N}^{N}[f(x)-\varphi(x)]e^{-itx}dx$$

$$+\int_{-N}^{N}\varphi(x)e^{-itx}dx$$

即得，当 $|t|>T$ 时，

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-itx}dx\right|<\varepsilon/4+\varepsilon/2+\varepsilon/4=\varepsilon.$$

定理得证.

**注** 定理包含关于傅立叶系数的黎曼-勒贝格引理：设 $f\in L(-\pi,\pi)$，则当 $n\to\pm\infty$ 时，

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx\to 0.$$

其实，只须将 $f$ 扩充定义到 $(-\infty,\infty)$ 上使在 $[-\pi,\pi]$ 之外函数的值为零．那么，这个引理便成为定理 3.1 的特例.

下面考虑傅立叶变式的微分性质．将变式 $\hat{f}(t)$ 形式上对 $t$ 求导数一次，得

$$\frac{d}{dt}\hat{f}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)(-ix)e^{-itx}dx,$$

如果 $xf(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 可积，则易见上式右边积分关于 $t$ 一致收敛．实际上它以 $\int_{-\infty}^{\infty}|xf(x)|dx$ 为优积分．因而此时上面微分公式确实成立．借用归纳法便可证得下列定理.

**定理 3.2** **设 $x^rf(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上可积，则 $\hat{f}(t)$ 为 $r$ 阶可微，且有等式**

$$\frac{d^r}{dt^r}\hat{f}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)(-ix)^re^{-itx}dx,\quad r\in\mathrm{P}.$$

注意，定理中条件只是充分的而非必要的．例如，设 $f(x)=4x^{-2}\sin^2\frac{x}{2}$，则可求出

$$\hat{f}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}e^{-itx}dx=\frac{4}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\cos txdx$$

$$=\begin{cases}1-|t|, & |t|\leqslant 1,\\ 0, & |t|>1.\end{cases}$$

除了 $t=\pm 1$ 以外，$\hat{f}(t)$是处处可微的，但 $xf(x)$不可积.

在傅立叶级数情形，我们有著名的巴塞弗公式。转到傅立叶变式情形，对于 $f\in L^2$，有类似的公式成立：

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(t)|^2dt.$$

可是，由于 $f\in L^2$ 时未必有 $f\in L$(例如考察函数 $f(x)=x^{-1}\sin x$)，$f$ 的傅立叶变式就不能象上面那样定义了，即使变式被定义出来，它是否平方可积呢？这都需要作进一步的讨论.

设 $f\in L^2$，我们将证明，当 $N\to\infty$ 时，

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N}f(x)e^{-itx}dx$$

依 $L^2$ 意义强收敛于一个函数，称为 $f$ 依 $L^2$ 意义的傅立叶变式，并记为

$$\hat{f}(t)=\underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N}f(x)e^{-itx}dx, \tag{1}$$

这里 $N$ 不限定为自然数，符号l.i.m.意为平均收敛下的极限. 先建立下列引理.

**引理　设 $\chi=\chi_{(\alpha,\beta)}(x)$是区间$(\alpha,\beta)$上的特征函数，$\hat{\chi}$ 是它的傅立叶变式(依 $L$ 意义)，则几乎处处有**

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}\hat{\chi}(t)e^{itx}dt=\chi(x). \tag{2}$$

**证**　容易求出

$$\hat{\chi}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\chi(x)e^{-itx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\beta}e^{-itx}dx$$

$$=\frac{e^{-it\beta}-e^{-it\alpha}}{-2\pi it}.$$

作积分

$$\int_{-N}^{N}\hat{\chi}(t)e^{itx}dt=\frac{1}{-2\pi i}\int_{-N}^{N}\frac{e^{i(x-\beta)t}-e^{i(x-\alpha)t}}{t}dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{N}\frac{\sin(x-\alpha)t-\sin(x-\beta)t}{t}dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{0}^{(x-\alpha)N}\frac{\sin v}{v}dv-\int_{0}^{(x-\beta)N}\frac{\sin v}{v}dv\right\},\qquad(3)$$

因而注意到$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin v}{v}dv=\pi/2$(依主值意义)，便得

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}\hat{\chi}(t)e^{itx}dt=\begin{cases}1, & x\in(\alpha,\beta),\\ 0, & x\overline{\in}[\alpha,\beta],\\ 1/2, & x=\alpha,\beta.\end{cases}$$

于是除了 $x=\alpha,\beta$ 以外，

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}\hat{\chi}(t)e^{itx}dt=\chi(x).$$

着重指出，由(3)可见，在这个收敛式子中，积分 $\int_{-N}^{N}\hat{\chi}(t)e^{itx}dt$ 关于 $N$ 与 $x$ 是一致有界的 $\left(\int_{0}^{x}\frac{\sin v}{v}dv\text{ 是 } x \text{ 的有界函数，参看第四章 §4 积分 } I(z)\text{的处理}\right)$.

**定理 3.3　设 $f(x)\in L^2$, $\hat{f}(t)$ 是它依 $L^2$ 意义的傅立叶变式，则 $\hat{f}\in L^2$, 且有巴塞弗公式成立：**

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(t)|^2dt.\qquad(4)$$

**证**　第一步．引进阶梯函数类 $S$，证明对每个 $f\in S$，几乎处处有下式成立：

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}\hat{f}(t)e^{itx}dt=f(x).\qquad(5)$$

这里所指的 $f\in S$ 有下述结构：存在点组 $x_1, x_2, \cdots, x_r$,

$$-\infty<x_1<x_2<\cdots<x_r<\infty,$$

使 $f(x)$在每个区间$[x_k, x_{k+1})$上取复常数 $c_k$, $k=1,2,\cdots,r-1$, 而

在$(-\infty, x_1)$与$[x_r, \infty)$上$f(x)$恒取值零．由于积分是线性运算，$S$中每个函数可表为有限个区间的特征函数的线性组合，因而据引理知(5)成立．并且，据引理证明末的注解，(5)中左边积分关于$N, x$是一致有界的．

第二步．我们证明，对每个$f\in S$，(4)成立．

其实，对于$f\in S$，有关的积分实际上是有限区间上的积分，将积分$\int_{-N}^{N}|\hat{f}(t)|^2dt$进行变形，得

$$\begin{aligned}\int_{-N}^{N}|\hat{f}(t)|^2dt&=\frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N}dt\hat{f}(t)\int_{-\infty}^{\infty}\bar{f}(y)e^{ity}dy\\&=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{f}(y)dy\int_{-N}^{N}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-itx}dx\right\}e^{ity}dt\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{f}(y)dy\int_{-N}^{N}\hat{f}(t)e^{ity}dt,\end{aligned}$$

据第一步所证，当$N\to\infty$时，上式右边里层积分几乎处处收敛于$f(y)$，并且此积分关于$N$与$x$是一致有界的．因而，据勒贝格控制收敛定理(第四章定理3.4)得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{f}(y)f(y)dy$$

或

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(t)|^2dt.$$

这表明(4)对每个$f\in S$成立．

第三步．考虑一般情形．设$f\in L^2$．在建立公式(4)之前，自然要说清$\hat{f}(t)$是如何定义的．令

$$f_N(x)=\begin{cases}f(x), & |x|\leqslant N,\\0, & |x|>N,\end{cases}\tag{6}$$

则有

$$\hat{f}_N(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_N(x)e^{-itx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N} f(x)e^{-itx}dx.$$

对每一固定的自然数 $N$，可取在 $(-N,N)$ 之外恒为零的阶梯函数列 $s_\nu=s_{\nu,N}\in S$，$\nu\in\mathbb{N}$，使

$$\|f_N-s_\nu\|_{L^2(-N,N)}\to 0(\nu\to\infty).$$

此时据施瓦茨不等式可证 $\hat{s}_\nu(t)\to\hat{f}_N(t)$ $(\nu\to\infty)$. 从而 $|\hat{s}_\nu(t)|^2\to|\hat{f}_N(t)|^2$ $(\nu\to\infty)$. 因而再据法杜定理（第四章定理 3.3）与第二步所证，得到

$$\|\hat{f}_N\|_2\leqslant\varliminf_{\nu\to\infty}\|\hat{s}_\nu\|_2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{\nu\to\infty}\|s_\nu\|_2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f_N\|, \tag{7}$$

于是 $\hat{f}_N\in L^2$. 并且，对任何 $p\in\mathbb{N}$，有

$$\|\hat{f}_N-\hat{f}_{N+p}\|_2=\|(f_N-f_{N+p})^\wedge\|_2\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f_N-f_{N+p}\|_2\to 0$$

$(N\to\infty)$，故 $\{\hat{f}_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ 是 $L^2$ 中的基本列，从而存在一个元 $\hat{f}\in L^2$，适合

$$\|\hat{f}_N-\hat{f}\|_2\to 0\ (N\to\infty). \tag{8}$$

这样，我们得到了 $L^2$ 中的一个元 $\hat{f}$，并且从证明中可以看出，上面的讨论可以不限定 $N$ 为自然数. 因用所得的 $\hat{f}$ 是由 $f$ 而唯一确定的，它正是我们想在(1)中所指的意义. 顺便指出，当 $f$ 还是 $L$ 中的元时，(1)中定义的 $\hat{f}$ 与本节开头所定义的变式相一致.

当 $\hat{f}$ 由(1)给定时，在(7)中令 $N\to\infty$ 得

$$\|\hat{f}\|_2\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_2. \tag{9}$$

为完成巴塞弗公式的证明，我们再取 $S$ 中阶梯函数列 $u_1,u_2,\cdots$，满足 $\|u_\nu-f\|_2\to 0(\nu\to\infty)$，从而推出 $\|u_\nu\|_2\to\|f\|_2(\nu\to\infty)$. 据(9)有

$$\|\hat{u}_\nu-\hat{f}\|_2=\|(u_\nu-f)^\wedge\|_2\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|u_\nu-f\|_2,$$

故 $\|\hat{u}_\nu\|_2 \to \|\hat{f}\|_2 (\nu\to\infty)$. 但第二步中已证明, $\|\hat{u}_\nu\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|u_\nu\|_2$, 故 $\|u_\nu\|_2 \to \sqrt{2\pi}\,\|\hat{f}\|_2 (\nu\to\infty)$. 前已指出, $\|u_\nu\|_2 \to \|f\|_2 (\nu\to\infty)$, 于是 $\|f\|_2 = \sqrt{2\pi}\,\|\hat{f}\|_2$, 即对于一般的 $f\in L^2$, 我们证明了巴塞弗公式(4).

**推论** 设 $f, g\in L^2$, 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\bar{g}(x)dx = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(t)\overline{\hat{g}}(t)dt.$$

**证** 由 $f$, $g\in L^2$ 知 $f+g\in L^2$. 据巴塞弗公式, $\|f+g\|_2^2 = 2\pi\|(f+g)^\wedge\|_2^2 = 2\pi\,\|\hat{f}+\hat{g}\|_2^2$, 展开得

$$\begin{aligned}&(f,f)+(g,g)+(f,g)+\overline{(f,g)}\\ &=2\pi\{(\hat{f},\hat{f})+(\hat{g},\hat{g})+(\hat{f},\hat{g})+\overline{(\hat{f},\hat{g})}\},\end{aligned}$$

故

$$\mathrm{Re}(f,g) = 2\pi\,\mathrm{Re}(\hat{f},\hat{g}).$$

将所得结果中的 $f$ 换为 $if$, 注意到 $(if)^\wedge = i\hat{f}$, 即得

$$\mathrm{Im}(f,g) = 2\pi\,\mathrm{Im}(\hat{f},\hat{g}),$$

因此 $(f,g) = 2\pi(\hat{f},\hat{g})$. 这就是所要证的等式.

**定理 3.4** **设 $f\in L^2$, $\hat{f}$ 是它依 $L^2$ 意义的傅立叶变式, 则 $\hat{f}\in L^2$ 且有反演公式成立:**

$$\hat{f}(t) = \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\frac{e^{-itu}-1}{-iu}du\right\}, \text{a.e.}, \tag{10}$$

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(t)\frac{e^{itx}-1}{it}dt\right\}, \text{a.e.} \tag{11}$$

**证** 由定理 3.3 知 $\hat{f}\in L^2$. 因而, 对任何实数 $x$, 有 $\hat{f}\in L(0,x)$. 令

$$\hat{f}_N(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N} f(u)e^{-itu}du,$$

则 $\hat{f}_N\in L^2$, 从而 $\hat{f}_N\in L(0,x)$. 引进 $\hat{f}$ 与 $\hat{f}_N$ 的不定积分

$$\Phi(x)=\int_0^x \hat{f}(t)dt,\quad \Phi_N(x)=\int_0^x \hat{f}_N(t)dt.$$

那么据施瓦茨不等式得

$$|\Phi(x)-\Phi_N(x)|\leqslant\|\hat{f}-\hat{f}_N\|_2|x|^{1/2},$$

由于 $\hat{f}_N\xrightarrow{\text{强}}\hat{f}(N\to\infty)$, 故对每个实数 $x$ 有 $\Phi_N(x)\to\Phi(x)$ $(N\to\infty)$. 但容易求出

$$\Phi_N(x)=\int_0^x\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-N}^N f(u)e^{-itu}du\right\}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-N}^N f(u)\frac{e^{-ixu}-1}{-iu}du,$$

故几乎处处有

$$\hat{f}(t)=\Phi'(t)=\frac{d}{dt}\left\{\lim_{N\to\infty}\Phi_N(t)\right.$$

$$\left.=\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\frac{e^{-itu}-1}{-iu}du\right\}\right.,$$

即(10)成立.

等式(11)可以完全用对偶的方法建立. 可是利用已建立的定理 3.3 的推论也能很快地给出证明. 其实, 引进$(0, x)$的特征函数 $\chi_{(0,x)}(t)$, 那么它的傅立叶变式是$\frac{1}{2\pi}\ \frac{e^{-ixt}-1}{-it}$, 取它的共轭得 $\frac{1}{2\pi}\ \frac{e^{ixt}-1}{it}$. 因而对两个函数 $f(x)$ 与 $\chi_{(0,x)}(t)$ (分别看成推论中的 $f, g$, 它们均属于 $L^2$)应用所述推论, 即得

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{\chi_{(0,x)}}(t)dt=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(t)\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{e^{itx}-1}{it}dt,$$

或

$$\int_0^x f(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(t)\frac{e^{itx}-1}{it}dt,$$

由于右边是 $x$ 的绝对连续函数, 故几乎处处可微而有公式(11)成立.

定理 3.3 与 3.4 一起，通常称为普朗席奈(M. Plancherel)定理.

**定理 3.5** **设 $f(x)$ 属于 $L$ 或 $L^2$，它的傅立叶变式是 $\hat{f}(t)$，$a$ 为常数，则 $f(x+a)$ 的傅立叶变式是 $e^{ita}\hat{f}(t)$.**

**证** 当 $f(x)\in L$ 时，$f(x+a)$ 亦然. 据定义它的傅立叶变式为

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+a)e^{-itx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-it(y-a)}dy$$
$$=e^{ita}\hat{f}(t).$$

当 $f(x)\in L^2$ 时，$f(x+a)$ 亦然. 它依 $L^2$ 意义的傅立叶变式为

$$\underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N} f(x+a)e^{-itx}dx$$
$$=\underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\frac{1}{2\pi}\int_{-N+a}^{N+a} f(y)e^{-it(y-a)}dy$$
$$=\underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-N+a}^{N-a} f(y)e^{-ity}e^{ita}dy\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2\pi}\int_{N-a}^{N+a} f(y)e^{-ity}e^{ita}dy\right\}$$
$$=e^{ita}\hat{f}(t)+e^{ita}\underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\frac{1}{2\pi}\int_{N-a}^{N+a} f(y)e^{-ity}dy,$$

上式右边第二项为 $e^{ita}$ 与 $f(y)\chi_{(N-a,\,N+a)}(y)$ 的傅立叶变式之积，而后者依 $L^2$ 的范数(据巴塞弗公式)为

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\int_{N-a}^{N+a}|f(y)|^2dy\right\}^{1/2}\to 0\quad(N\to\infty),$$

因而当 $f\in L^2$ 时，$f(x+a)$ 的傅立叶变式为 $e^{ita}\hat{f}(t)$.

设 $f, g$ 同属于 $L$ 或同属于 $L^2$，定义它们的卷积为

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt.$$

**定理3.6** 当 $f, g \in L$ 时有

$$(f*g)^{\wedge}(t)=2\pi\hat{f}(t)\hat{g}(t);$$

当 $f, g \in L^2$ 时有

$$(f*g)(t)=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(u)\hat{g}(u)e^{itu}du.$$

**证** 当 $f, g \in L$ 时，据傅比尼定理(第四章定理 6.4)，有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(f*g)(x)e^{-itx}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}dx\int_{-\infty}^{\infty}f(u)g(x-u)du$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)du\int_{-\infty}^{\infty}g(x-u)e^{-itx}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{-itu}\hat{g}(t)du=2\pi\hat{f}(t)\hat{g}(t).$$

当 $f, g$ 同属于 $L^2$ 时，对函数 $f(x)$ 与 $\overline{g(u-x)}$ 应用定理3.3的推论，注意到 $\overline{g(u-x)}$ 的傅立叶变式为

$$\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N}\overline{g(u-x)}e^{-itx}dx$$

$$=\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N}\overline{g(u-x)}e^{it(u-x)}e^{-itu}dx=e^{-itu}\overline{\hat{g}}(t),$$

得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)g(u-x)dx=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(t)\hat{g}(t)e^{itu}dt.$$

**例3** 函数 $f(x)=\frac{\sin x}{x}\in L^2$，可以求出它的傅立叶变式

$$\hat{f}(t)=\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N}\frac{\sin x}{x}e^{-itx}dx$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{4\pi}\int_{-N}^{N}\frac{\sin(1+t)x+\sin(1-t)x}{x}dx$$

$$=\begin{cases}1/2, & |t|<1,\\ 0, & |t|>1,\\ 1/4, & |t|=1.\end{cases}$$

因此据巴塞弗公式,求出

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(t)|^2 dt$$

$$=2\pi\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^2 dt=\pi.$$

**例 4** 在函数逼近论中常要考虑卷积型算子

$$L_\sigma(f;x)=\sigma\int_{-\infty}^{\infty} f(u)K(\sigma(x-u))du, \sigma>0,$$

其中 $K\in L^2$ 并满足某些适当条件. 如果 $f\in L^2$,那么据定理 3.6,可以将算子 $L_\sigma(f;x)$ 写成

$$L_\sigma(f;x)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(t)\rho\left(\frac{t}{\sigma}\right)e^{itx}dt,$$

其中 $\rho(x)$ 是 $K(x)$ 的傅立叶变式乘以 $2\pi$: $\rho(t)=2\pi\hat{K}(t)$。实际上,这时 $\sigma K(\sigma x)$ 的傅立叶变式为

$$\underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N}\sigma K(\sigma v)e^{-itv}dv$$

$$=\underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N}K(s)e^{-i\left(\frac{t}{\sigma}\right)s}ds$$

$$=\hat{K}(t/\sigma).$$

从这个角度我们看到,卷积型算子不过是傅立叶积分中添上了一个因子 $\rho(t/\sigma)$ 而已。

# 第五章 习 题

1 设 $f_n(x)$ 是 $L^2$ 中的序列, $f_n$ 测度收敛于 $f$ 且 $\|f_n\|_2\leqslant K$, $K$ 为常数,

则 $f_n \xrightarrow{\text{弱}} f(n\to\infty)$。

2．问在 $L^2$ 中弱收敛于 $f$ 的元列是否测度收敛？

3．设在 $L^2$ 中 $f_n \xrightarrow{\text{强}} f$，又 $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} g$，则 $f\sim g$。

4．设 $f, f_n \in L^p(p\geqslant 1)$，$f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$，又设

$$\int_E |f_n|^p dm \longrightarrow \int_E |f|^p dm,$$

则对任何可测子集 $e\subset E$，有

$$\int_e |f_n|^p dm \longrightarrow \int_e |f|^p dm.$$

5．设 $f, f_n \in L^p(p\geqslant 1)$，$f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$．则在 $L^p$ 中 $f_n \xrightarrow{\text{强}} f$ 的充要条件是 $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$．

6．试作依赖于给定函数 $f$ 的连续函数列 $f_n$，使对任何 $p$，$1\leqslant p<\infty$ 时，都有 $f_n \xrightarrow{\text{强}} f(n\to\infty)$．又问此结论能否包括 $p=\infty$ 情形？

7．设 $1\leqslant p<q\leqslant\infty$，问两关系式 $L^q(\mathbb{R})\subset L^p(\mathbb{R})$ 与 $L^p(\mathbb{R})\subset L^q(\mathbb{R})$ 是否必有一成立？

8．设 $F(x)$ 是 $L^p(p>1)$ 中某个元的不定积分，则渐近式

$$F(x+h)-F(x)=O(h^{1-\frac{1}{p}})\quad(h\to 0)$$

成立．

9．设 $f(x)$ 是以 $2\pi$ 为周期的平方可积函数，且存在 $\alpha>0$ 满足 $\|f(x+h)-f(x)\|_2=O(h^{1+\alpha})$，$h\to 0$，试证 $f(x)$ 几乎处处为常数．

10．设 $f\in L^p(\mathbb{R})$，$p>0$．则对任何 $p_1, p_2>0$，$p_1<p<p_2$，恒有分解 $f=f_1+f_2$，其中 $f_1\in L^{p_1}(\mathbb{R})$，$f_2\in L^{p_2}(\mathbb{R})$．并给出这种分解的一个应用．

11．设 $f, g$ 为 $E=(0,1)$ 上非负可测函数，满足 $f(x)g(x)\geqslant x^{-1}$，a.e.，试证

$$\int_E f(x)\,dm\int_E g(x)\,dm\geqslant 4,$$

并问式中等号可否成立。

12．设 $f\in L^p(\mathbb{R})$，这里 $p\geqslant 1$．试作函数列 $f_n$，$n\in\mathbb{N}$，满足下列条件：$\|f_n\|_{p'}=1$，这里 $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x)f_n(x)\,dx=\infty$．

13．设 $p, q, r$ 为满足 $1/p+1/q+1/r=1$ 的三个正数，则对任何可测函数 $f, g, h$ 有

$$\int_E |fgh|\,dm \leqslant \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_r.$$

14．设 $f\in L^p(E)$，$e$ 为 $E$ 的可测子集，则

$$\left\{\int_E |f|^p dm\right\}^{1/p} \leqslant \left\{\int_e |f|^p dm\right\}^{1/p} + \left\{\int_{E-e} |f|^p dm\right\}^{1/p}.$$

15．设 $f\in L^p(a,b)$，$p>0$，试证

$$\lim_{h\to 0}\left\{\int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x+h)-f(x)|^p dm\right\}^{1/p}=0\quad (0<2\delta\leqslant b-a).$$

16．设 $f\in L^p(\mathbb{R})$，$g\in L^q(\mathbb{R})$，$1/p+1/q=1$，$p\geqslant 1$．试证

$$F(t)=\int_{\mathbb{R}} f(x+t)g(x)\,dm$$

为 $t$ 的连续函数．

17．设 $f$ 是可测集 $E$ 上的可测函数，它使积分 $\int_E f(x)\bar{g}(x)\,dm$ 对任何 $g\in L^2(E)$ 都存在为有限．试证 $f\in L^2(E)$．

18．试证，当 $1\leqslant r<p$ 时，$L^p\subset L^r$，假定基本集 $E$ 的测度为有限．如果 $mE=\infty$，结论如何？

19．设 $p>1$，$f_n\in L^p$，并假定基本集 $E$ 的测度为有限．若在 $L^p$ 中 $f_n\xrightarrow{强} f$，$f\in L^p$，则当 $1\leqslant r<p$ 时，在 $L^r$ 中 $f_n\xrightarrow{强} f$．

20．试证 $L^2(0,1)$ 中标准直交系的基数不超过 $\aleph_0$．

21．试证：若一可积函数的傅立叶级数在一正测度集 $E$ 上处处收敛，则它的傅立叶系数趋于零．

22．设 $f\in L(0,2\pi)$ 而 $g$ 有界且有周期 $2\pi$，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(nx)\,dm=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dm\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dm.$$

23．设 $f$，$f_n\in L(\mathbb{R})$，且 $f_n\xrightarrow{强} f$（在 $L(\mathbb{R})$ 中），则在 $\mathbb{R}$ 上一致有 $\lim\limits_{n\to\infty}\hat{f}_n(t)=\hat{f}(t)$．问在 $L^2(\mathbb{R})$ 中相应的命题是否成立？

24．设 $f\in L(\mathbb{R})$，且 $\hat{f}=0$，则 $f\sim 0$．

25．设 $f\in L^2(\mathbb{R})$，令 $f_h(x)=\dfrac{1}{2h}\displaystyle\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt$．试证几乎处处成立

$$f_h(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(t)\frac{\sin ht}{ht}e^{itx}dt.$$

26．设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上有界连续函数，令

$$L_\sigma(f;x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}f\left(x+\frac{2t}{\sigma}\right)\frac{\sin^2 t}{t^2}dt,$$

试证,在任何闭区间$[\alpha,\beta]$上,$L_\sigma(f;x)$一致收敛于$f(x)$.

27. 设$E$为可测集,$mE<\infty$,$f\in L_\infty(E)$且$\|f\|_\infty>0$.令$c_n=\int_E|f|^n dm$,$n\in N$. 试证,$\|f\|_\infty=\lim\limits_{n\to\infty}c_{n+1}/c_n$.

28. 设$1<p<\infty$,$f\in L^p(0,\infty)$,并令$F(x)=x^{-1}\int_0^x f(t)dm$,$0<x<\infty$. 试证,映射$f\to F$是$L^p(0,\infty)$到$L^p(0,\infty)$的有界映射,且$\|F\|_p\leqslant p(p-1)^{-1}\|f\|_p$. 又等式成立的充要条件是什么?

提示:先对连续并具紧支集的函数$f$考虑并且限定$f\geqslant 0$,然后对$F(x)$的$p$次幂用分部积分公式,再应用霍尔得不等式.

29. 设$mE<\infty$,试证

$$\lim_{p\to 0}\|f\|_p=\exp\left\{\int_E\log|f(x)|dm\right\}.$$

提示:对$f\geqslant 0$考察,注意$p^{-1}(f^p-1)$单调递减趋于$\log f$(当$p\to 0$),再设法应用控制收敛定理.

30. 研究霍尔得不等式与明可夫斯基不等式中等号成立的充要条件.

31. 设$I$为实轴上的一区间,$\varphi$为$I$上的实函数. 称$\varphi$为$I$上凸函数,如果对任何$x,y\in I$,$t\in(0,1)$,有$\varphi(tx+(1-t)y)\leqslant t\varphi(x)+(1-t)\varphi(y)$. 试证:

(i) $\varphi$在$I$的每个内点处连续;

(ii) 设$(X,\mathscr{R},\mu)$为有限测度空间,若$f$为$X$上实可积函数且$f$的值域含于$I$则有岑生(B. Jensen)不等式

$$\varphi\left\{\frac{1}{\mu X}\int_X f d\mu\right\}\leqslant\frac{1}{\mu X}\int_X\varphi(f)d\mu.$$

32. 设$E$是一维勒贝格可测集. 对于任意的$x\in\mathbb{R}$,令$\Delta_h(x)=(2h)^{-1}m(E\cap(x-h,x+h))$,$h>0$. 试证几乎对一切$x\in E$有$\lim\limits_{h\to 0}\Delta_h(x)=1$,而几乎对一切$x\notin E$有$\lim\limits_{h\to 0}\Delta_h(x)=0$;试作一集$E$,使极限$\lim\limits_{h\to 0}\Delta_h(0)$不存在. 又问当$E$是不可测集时,结论如何?

# 参考书目与文献


[1] 南京大学数学系编：实变函数(讲义)，1965；

[2] 夏道行、吴卓人、严绍宗、舒五昌编著：实变函数论与泛函分析(第二版)，高等教育出版社，1987.

[3] 江泽坚、吴智泉编：实变函数论，人民教育出版社，1961.

[4] И.П.Натансон：实变函数论，徐瑞云译，高等教育出版社，1958年10月第二版(修订本).

[5] P.R.Halmos：测度论，王建华译，科学出版社，1958.

[6] S. K. Berberian, Measure and Integration, The Macmillan Company, New York, 1965.

[7] P. J. Cohen, Set Theory and The Continuum Hypothesis, New York, 1966, Amsterdam.

[8] R. L. Wheedan, A. Zygmund, Measure and Integration, Marcel Dekker, INC., New York and Basel, 1977.

[9] 久保田阳人：积分论，槙书店，1977.

# 索　引

术语后数字指章节。如1.1，指第一章§1。

## 一　画



## 二　画



## 三　画



## 四　画

## 五 画

## 六　画



## 七　画

## 八　画

## 九 画

## 十 画



## 十 一 画

## 十 二 画



## 十 三 画

## 十 四 画



## 十五画以上

# 实变函数与泛函分析概要

高等学校教材

（第二版）

第二册

王声望　郑维行　编

高等教育出版社



高等学校教材

# 实变函数
# 与泛函分析概要

（第二版）

第二册

王声望　郑维行　编




高等教育出版社

(京)112 号

本书第二版是作者在第一版的基础上经过多年教学实践，吸收了国内各高等院校使用本书的教师们很多宝贵意见，并根据 1990 年 11 月在南京制订的《实变函数论》与《泛函分析》教材编写大纲修订而成。

第二版较第一版有较大程度的充实和改进. 本书用中等篇幅把泛函分析主要的基础内容系统地加以阐述，引入概念从具体例子出发，逐步抽象概括并讲述大量典型例子。每章小结颇有特色，能清晰地把握所学内容，习题也丰富。

第二册分五章，主要内容包括距离空间、赋范线性空间、Hilbert 空间、有界线性泛函及有界线性算子、非线性泛函分析初步以及广义函数论大意等.

本书可作为综合大学、理工大学、师范院校的基础数学、计算数学以及应用数学等专业的教材，也可作为自学用书。凡学习过数学分析、线性代数、常微分方程、复变函数、实变函数等课程的同志都可阅读.

责任编辑　丁鹤龄

高等学校教材

实变函数与泛函分析概要

(第二版)

第二册

王声望　郑维行　编

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

开本 850×1168　1/32　印张 12.125　字数 290 000

1980 年 7 月第 1 版　1992 年 7 月第 2 版　1992 年 7 月第 1 次印刷

印数 0001—5 910

ISBN 7-04-003736-4/O·1111

定价 4.35 元

# 第二版 前 言

本书自1980年出版以来，由于教育战线形势的不断发展与变化，并经过十多年的教学实践，特别是根据国内各高等院校使用本书的教师们所提出的很多重要而富有建设性的意见，感到本书在内容上需要作适当的调整与充实．编者本着这一精神并根据高等学校理科数学、力学教材编审委员会函数论（包括数学分析）、泛函分析编审组于1990年11月在南京大学召开的会议上制订的《实变函数论》与《泛函分析》教材编写大纲，作了认真仔细的斟酌，对本书完成了第二版的修订工作。修改以后的这份教材，注意了以下几方面：

第一，将原来的三章扩充为四章并另增加了一章，共五章．除第一版原有的内容，如距离空间，赋范线性空间、Hilbert空间，有界线性算子的几条基本定理，紧算子的Riesz-Schauder理论，自共轭算子的谱分解定理等外，增加的内容为：距离空间中的第一、第二类型的集，具有基的Banach空间，线性拓扑空间大意，有界线性算子的谱半径及谱半径公式，正常算子、酉算子的基本性质以及它们的谱分解定理，非线性泛函分析初步、广义函数大意以及Hilbert空间上的双线性泛函等。

第二，为了适应各种不同情况的读者的需要，在第二版中，对某些部分作了较特殊的处理，主要有：第八章定理7.13以及它前面的三条引理自成一个系统，在讲授时可以将这三条引理连同它们的证明全部略去而只介绍定理7.13的结论，至于定理7.13的证明自然也不必讲授。关于第九章，建议使用本书的教师与读者根据各自不同的情况采用以下几种方法：

1° 对于学时比较少的学校，可以介绍到第九章第二节或第三节并加上第五、第六节中关于酉算子及正常算子的基本性质;

2° 对于学时稍多的学校,可以介绍到第九章第四节并加上第五、第六节中关于酉算子及正常算子的基本性质,至于自共轭算子的谱分解定理的证明连同其预备知识可以考虑删去而只介绍谱分解定理的结论;

3° 对于学时比较富裕的学校，则可以介绍到第九章第四节(包括全部证明)以及第五、第六节中关于酉算子及正常算子的基本性质,至于酉算子、正常算子谱分解定理可以考虑只叙不证.

以上只是编者的建议,仅供使用本书的教师及读者参考,至于其他章节,也可根据情况适当删减.希望使用本书的教师与读者尽可能根据自己的教学实践选择适合各自特点的教学内容与方法.

第三，本书对理论的阐述尽可能注意由浅入深、由具体到抽象. 对每个较难的新概念引入，尽可能先从比较直观的角度加以阐述,然后给以严格的定义. 例如，对有界线性算子范数的引入，我们先考虑算子沿每个方向的伸长度，然后从伸长度中抽象出算子的范数这一概念.

第四,注意内容的归纳与总结,除少数例外，在每一节或每两节的最后都有一个小结,扼要地阐述有关的内容,提出应当注意的事项. 希望这项工作对读者有所裨益. 此外，习题基本上按节安排,但都集中放在每一章的最后.授课人可根据情况适当选择一部分作为学生的练习,以巩固课堂上所学的内容.

本书经华东师范大学程其襄、吴良森、魏国强三位教授审阅，他们在百忙中抽出宝贵时间仔细审阅了本书手稿并提出了很多宝贵意见,使本书增色很多. 编者对于他們的意见都尽可能采纳了. 尤其值得提出的是，程其襄教授作为我国泛函界的老前辈以八十高龄极其负责地审阅了本书手稿,使编者深为感动.

本书在修改过程中，得到了南京大学各级领导的关怀与支持并为编者提供了各种方便．曾经使用过本书第一版的部分同志，如苏维宜教授、鲁世杰教授、何泽霖副教授、王崇祜副教授、宋国柱副教授等都提出了很多宝贵意见，研究生李建奎、孙国正两位同志仔细阅读了手稿并提出很多宝贵意见，编者也都尽可能采纳了．本书每章每节均分成若干段，如第七章§3.1表示第七章第三节第一段，等等．

编者对以上所有为本书付出了辛勤劳动的同志表示由衷的感谢．由于我们水平有限，书中错误与疏漏之处在所难免，希望使用本书的教师、读者以及同行们不吝赐教．

编者

1991年3月于南京．

# 目　录

## 第　二　篇

# 第 二 篇

## 第六章 距 离 空 间

### §1 距离空间的基本概念

在前面几章中，我们陆续学习了 $n$ 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$，$L^2$空间，$L^p$ 空间等. 以 $\mathbf{R}^n$ 为例，我们在其中定义了距离 $\rho$（见第一章17页），它满足下面三个条件：

(i) **非负性**：对任何 $x$、$y\in\mathbf{R}^n$，$\rho(x,y)\geqslant 0$，而且 $\rho(x,y)=0$的充分必要条件是 $x=y$；

(ii) **对称性**：对任何$x$、$y\in\mathbf{R}^n$，有$\rho(x,y)=\rho(y,x)$；

(iii) **三角不等式**：对任何$x$、$y$、$z\in\mathbf{R}^n$，有

$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y).$$

如果我们仔细分析一下 $\mathbf{R}^n$ 中的许多重要概念（如收敛概念）与结论（如极限的唯一性），就可以发现，实质上它们仅与距离$\rho$ 的性质(i)—(iii)有关. 再以第五章中介绍过的空间 $L^p[a,b]$ $(1\leqslant p<\infty)$为例，虽然当时只在其中定义了范数，还没有明确地定义距离，但可以令

$$\rho(x,y)=\left(\int_a^b|x(t)-y(t)|^p dt\right)^{1/p}\quad (x,y\in L^p[a,b]). \tag{*}$$

我们在本节例 3 中将验证(*)中的$\rho$也满足上面的性质(i)—(iii).

我们称(*)为$L^p[a,b]$上的距离.通过第五章的学习,读者不难发现,$L^p[a,b]$中的收敛概念以及其他与之有关的概念和结论,实质上也与他们中的距离(*)满足性质(i)—(iii)有关.因此,为了在一般的非空集合中引进适当的收敛概念,一个可行的办法就是先引进适当的距离.为了引进适当的距离,则应以性质(i)—(iii)为基础.在一般的非空集合中引进了适当的距离后,我们便称它为距离空间.大家将会看到,在一般的距离空间中,有很多与$\mathbf{R}^n$相似的性质,但由于距离空间是一些具体空间如$\mathbf{R}^n$等的进一步抽象,故也有很多本质的不同.

### 1.1 距离空间的定义及例

**定义 1.1** 设 $X$ 为一非空集合,如果对于 $X$ 中的任何两个元素 $x$、$y$,均有一个确定的实数记为 $\rho(x,y)$ 与它们对应且满足下面三个条件:

(i) **非负性**: $\rho(x,y)\geqslant 0$,而且 $\rho(x,y)=0$ 的充分必要条件是 $x=y$;

(ii) **对称性**: $\rho(x,y)=\rho(y,x)$;

(iii) **三角不等式**: $\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$,这里 $z$ 也是 $X$ 中任意一个元素,

则称 $\rho$ 是 $X$ 上的一个距离,而称 $X$ 是以 $\rho$ 为距离的距离空间,记为$(X,\rho)$.条件(i)—(iii)称为距离公理.距离空间中的元素又称为点.在不会引起混淆的情况下,我们将$(X,\rho)$简单地记为 $X$.

现在设 $X$ 为一距离空间,以 $\rho$ 为距离,$A$ 为 $X$ 的一非空子集,则 $A$ 按照距离 $\rho$ 也是一个距离空间,称它为 $X$ 的子空间.如 $A\neq X$,则称它为 $X$ 的真子空间.

值得注意的是,在任何一个非空集合 $X$ 上,我们都可以定义距离.例如对任一 $x\in X$,规定 $\rho(x,x)=0$,对任何 $y\in X$,只要

$y \neq x$，便规定 $\rho(x, y)=1$. 显然这样定义的 $\rho$ 满足距离公理的全部条件，因此 $X$ 按照距离 $\rho$ 成为一个距离空间，我们称这种距离空间是离散的.

**例 1**（见第一章） $n$ 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$. $\mathbb{R}^n$是所有 $n$ 维实向量

$$(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$$

组成的集合，此处所有的$\xi_k (k=1,2,\cdots,n)$都是实数. 我们已经指出在 $\mathbb{R}^n$ 中如果定义向量 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$与向量 $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$之间的距离如下：

$$\rho(x, y)=\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k-\eta_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1}$$

则 $\rho$ 满足定义 1.1 中的全部条件. 在第一章中，我们没有逐一验证这些条件，为清楚起见今以三角不等式为例加以验证. 为此先证明 Cauchy 不等式：

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2, \tag{2}$$

其中 $a_k, b_k (k=1,2,\cdots,n)$均为实数. 任取实数 $\lambda$，则

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n}(a_k+\lambda b_k)^2=\sum_{k=1}^{n} a_k^2+2\lambda \sum_{k=1}^{n} a_k b_k+\lambda^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2,$$

右端是 $\lambda$ 的二次三项式，以上不等式表明，这个二次三项式对 $\lambda$ 的一切实数值都是非负的，故其判别式不大于零，即

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2,$$

Cauchy 不等式成立. 由这个不等式，得到

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2 &=\sum_{k=1}^{n} a_k^2+2 \sum_{k=1}^{n} a_k b_k+\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2+2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}+\sum_{k=1}^{n} b_k^2\end{aligned}$$

$$=\left[\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2. \tag{2'}$$

在 $\mathbb{R}^n$ 中任取点 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$, $z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)$, 并在(2')中令 $a_k=x_k-z_k$, $b_k=z_k-y_k(k=1,2,\cdots,n)$, 立即得到三角不等式:

$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y).$$

因此 $\mathbb{R}^n$ 按距离(1)是一个距离空间.

在集合 $\mathbf{R}^n$ 中, 我们还可以引入如下的距离:

$$\rho_1(x,y)=\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k-\eta_k|, \tag{1'}$$

$\rho_1$ 也满足距离公理的全部条件, 故 $\mathbb{R}^n$ 按照 $\rho_1$ 也是一个距离空间(见本章习题第 1 题).

上述例 1 告诉我们, 在一个集合中, 定义距离的方式不是唯一的. 一般地说, 如果在一个非空集合 $X$ 中定义了距离 $\rho$ 与 $\rho_1$, 当 $\rho(x,y)\not\equiv\rho_1(x,y)$ 时, 那么 $X$ 按照距离 $\rho$ 与 $\rho_1$所成的两个距离空间必须看成是不同的. 因此, $\mathbb{R}^n$ 按照(1)及(1')是两个不同的距离空间.

类似于例 1 中的 $\mathbf{R}^n$, 我们还可以考虑复数的情形. 假设 $\mathbf{C}^n$ 是由所有 $n$ 维复向量

$$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$$

组成的集合, 这里 $\xi_k(k=1,2,\cdots,n)$ 都是复数. 对 $\mathbf{C}^n$ 中的任意两个向量 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 及 $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$, 我们仍旧用(1)定义它们之间的距离, 即

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k-\eta_k|^2\right)^{1/2}. \tag{1''}$$

与实数情形一样, 可以证明复数情形的 Cauchy 不等式:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_kb_k|\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\cdot\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2, \tag{2''}$$

其中 $a_k, b_k (k=1,2,\cdots,n)$ 均为复数.

由 $(2'')$ 可得

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2\right)^{1/2}. \quad (2''')$$

于是又可得到三角不等式

$$\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y),$$

这里 $x$、$y$、$z$ 均属于 $\mathbf{C}^n$. 因此按照 $(1'')$ 定义的距离 $\rho$, $\mathbf{C}^n$ 是距离空间.

当 $n=1$ 时, $\mathbf{R}^1$, $\mathbf{C}^1$ 分别记为 $\mathbb{R}$, $\mathbf{C}$.

今后凡不特殊声明时, 均取 (1), $(1'')$ 分别作为 $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{C}^n$ 中的距离.

**例 2** 空间 $\mathbf{C}[a,b]$. 考虑定义在 $[a,b]$ 上所有实(或复) 连续函数构成的集合 $C[a,b]$. $C[a,b]$ 中任意两个元素 $x$、$y$ 之间的距离定义如下:

$$\rho(x,y) = \max_{a \leqslant t \leqslant b}|x(t)-y(t)|, \quad (3)$$

则 $C[a,b]$ 按照 (3) 中的 $\rho$ 是一个距离空间. 距离公理中的条件 (i) 与 (ii) 是明显的. 我们仅验证三角不等式. 设 $x$、$y$、$z \in C[a,b]$, 则

$$\begin{aligned}
&|x(t)-y(t)| \leqslant |x(t)-z(t)| + |z(t)-y(t)| \\
&\leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b}|x(t)-z(t)| + \max_{a \leqslant t \leqslant b}|z(t)-y(t)| \\
&= \rho(x,z) + \rho(z,y).
\end{aligned}$$

因此

$$\rho(x,y) = \max_{a \leqslant t \leqslant b}|x(t)-y(t)| \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y),$$

三角不等式成立. 故 $C[a,b]$ 按照 (3) 是一个距离空间.

**例 3** $\mathbf{L}^p[a,b]$ $(1 \leqslant p < \infty)$. 在第五章中, 我们已比较详细地讨论了空间 $L^p[a,b]$, 这里不打算重复. 大家知道, 两个几乎处

处相等的 $p$ 幂可积函数在 $L^p(E)$ 中视为同一元素. 现在指出, 如果对 $L^p[a,b]$ 中任意两个元素 $x$、$y$, 令

$$\rho(x,y)=\left(\int_a^b |x(t)-y(t)|^p dt\right)^{1/p}, \tag{4}$$

则 $\rho$ 满足距离公理的全部条件, 因此 $L^p[a,b]$ 按照距离 $\rho$ 是一个距离空间. $\rho$ 满足距离公理中的条件(i)、(ii)是明显的, 故只需验证三角不等式. 任取 $x$、$y$、$z\in L^p[a,b]$. 在第五章定理 1.3 的 Minkowski 不等式 $\|f+g\|_p\leqslant\|f\|_p+\|g\|_p$ 中令 $f=x-z, g=z-y$, 便得

$$\begin{aligned}\rho(x,y)&=\|x-y\|_p\\&\leqslant\|x-z\|_p+\|z-y\|_p=\rho(x,z)+\rho(z,y),\end{aligned}$$

因此三角不等式成立. 故 $L^p[a,b]$ 按照 $\rho$ 确实是一个距离空间.

**例 4 空间 $L^\infty[a,b]$.** 在第五章中也已介绍了空间 $L^\infty[a,b]$. 现在我们对它进行比较详细的讨论, 主要目的在于证明按照由下面(5)式定义的距离 $\rho$, $L^\infty[a,b]$ 是一个距离空间.

称定义在可测集 $[a,b]$ 上的可测函数 $x(\cdot)$ 是本性有界的, 是指存在着 $[a,b]$ 的某个零测度子集 $E_0$, 使得 $x(\cdot)$ 在集合 $[a,b]\setminus E_0$ 上有界. $[a,b]$ 上所有本性有界可测函数构成的集用 $L^\infty[a,b]$ 表示, 几乎处处相等的两个本性有界的可测函数看作同一元素. 对 $L^\infty[a,b]$ 中任意两个元素 $x$、$y$, 令

$$\begin{aligned}\rho(x,y)&=\inf_{\substack{mE_0=0\\E_0\subset[a,b]}}\left\{\sup_{t\in[a,b]\setminus E_0}|x(t)-y(t)|\right\}\\&=\operatorname*{vraisup}_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|.\end{aligned} \tag{5}$$

需要验证 $\rho$ 满足距离公理的三个条件. 我们只验证三角不等式. 设 $x$、$y$、$z\in L^\infty[a,b]$. 任给 $\varepsilon>0$, 存在 $E_0$、$E_1\subset[a,b]$, $mE_0=mE_1=0$, 使

$$\sup_{t\in[a,b]\setminus E_0}|x(t)-z(t)|\leqslant\rho(x,z)+\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\sup_{t\in[a,b]\setminus E_1}|z(t)-y(t)|\leqslant\rho(z,y)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

注意到 $m(E_0\cup E_1)=0$, 于是

$$\begin{aligned}\rho(x,y)&\leqslant\sup_{t\in[a,b]\setminus(E_0\cup E_1)}|x(t)-y(t)|\\&\leqslant\sup_{t\in[a,b]\setminus(E_0\cup E_1)}|x(t)-z(t)|\\&\quad+\sup_{t\in[a,b]\setminus(E_0\cup E_1)}|z(t)-y(t)|\\&\leqslant\sup_{t\in[a,b]\setminus E_0}|x(t)-z(t)|+\sup_{t\in[a,b]\setminus E_1}|z(t)\\&\quad-y(t)|\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)+\varepsilon,\end{aligned}$$

令 $\varepsilon\to0$, 得

$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y),$$

三角不等式成立. 因此按照(5)式定义的距离 $\rho$, $L^\infty[a,b]$ 确为距离空间.

**例 5** **空间 $l^p(1\leqslant p<\infty)$.** 令 $l^p$ 是由满足下列条件的实(或复)数序列 $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}$ 构成的集合:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p<\infty.$$

我们的目的是证明 $l^p$ 按照下面(9)式定义的距离为距离空间. 为清楚起见, 先设 $1<p<\infty$. 在第五章第 197 页的不等式 $u^\alpha v^\beta\leqslant\alpha u+\beta v(u\geqslant0,v\geqslant0)$ 中, 令 $\alpha=\frac{1}{p}$, $\beta=\frac{1}{q}$, 这里 $p$、$q$ 互为相伴数, 即 $1/p+1/q=1$. 于是有

$$u^{\frac{1}{p}}v^{\frac{1}{q}}\leqslant\frac{u}{p}+\frac{v}{q}. \tag{6}$$

任取 $l^p$ 中的元素 $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}$ 及 $l^q$ 中的元素 $y=\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots\}$. 对于给定的 $n$, 取

$$u=\frac{|\xi_n|^p}{\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p};\qquad v=\frac{|\eta_n|^q}{\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^q}.$$

将以上的 $u$、$v$ 代入(6)式，并对 $n$ 求和再经过简单的计算，便有

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n\eta_n|}{\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^q\right)^{1/q}}\leqslant\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

将上式左端分母中的 $k$ 换成 $n$，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n\eta_n|\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\eta_n|^q\right)^{1/q}. \qquad (7)$$

称(7)式为 Hölder 不等式，这个不等式在第五章第 196 页中已经提到，现在只是给予严格的证明.

今任取 $l^p$ 中的两个元素 $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}$ 及 $y=\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots\}$ (注意$y$不再属于$l^q$)，由不等式$|a+b|^p\leqslant 2^p(|a|^p+|b|^p)$，这里 $a$、$b$ 均为实(或复)数，可知$\{\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\cdots,\xi_n+\eta_n,\cdots\}$也属于 $l^p$. 于是$\{|\xi_1+\eta_1|^{p/q},|\xi_2+\eta_2|^{p/q},\cdots,|\xi_n+\eta_n|^{p/q},\cdots\}$属于$l^q$. 由Hölder 不等式(7)，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n||\xi_n+\eta_n|^{p/q}\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n+\eta_n|^p\right)^{1/q};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\eta_n||\xi_n+\eta_n|^{p/q}\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\eta_n|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n+\eta_n|^p\right)^{1/q}.$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n+\eta_n|^p=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(|\xi_n-\eta_n|\right)|\xi_n+\eta_n|^{p-1}\right]$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}[(|\xi_n|+|\eta_n|)|\xi_n+\eta_n|^{p/q}]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n||\xi_n+\eta_n|^{p/q}+\sum_{n=1}^{\infty}|\eta_n||\xi_n+\eta_n|^{p/q}$$

$$\leqslant\left[\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\eta_n|^p\right)^{1/p}\right]\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n+\eta_n|^p\right)^{1/q},$$

因此

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n+\eta_n|^p\right)^{1/p}\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\eta_n|^p\right)^{1/p}. \tag{8}$$

如果 $p=1$，不等式(8)显然成立．因此我们在使用不等式(8)时，既可设 $p>1$，也可设 $p=1$．称(8)式为Minkowski 不等式．

在 $l^p(1\leqslant p<\infty)$ 中定义如下的距离

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n-\eta_n|^p\right)^{1/p}. \tag{9}$$

利用 Minkowski 不等式可以证明三角不等式，方法与例 3 中的完全类似，这里不详述．于是 $\rho$ 满足距离公理的条件(iii)．至于距离公理的条件(i)、(ii)，则是显然的．因此 $l^p(1\leqslant p<\infty)$ 按照 (9) 式定义的距离 $\rho$ 是一个距离空间．

当 $p=1$ 时，我们将 $l^1$ 记为 $l$．

**例 6　空间 $l^\infty$．** 令 $l^\infty$ 是由一切有界的实(或复) 数列构成的集合．任取 $l^\infty$ 中的两个元素 $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}$ 及 $y=\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots\}$．令

$$\rho(x,y)=\sup_{1\leqslant n<\infty}|\xi_n-\eta_n|. \tag{10}$$

不难证明(10)中的 $\rho$ 满足距离公理的全部条件，因此 $l^\infty$按照(10)式定义的距离 $\rho$ 是一个距离空间．

**1.2　距离空间中的收敛概念**

这一章开始时，我们就已指出，在一非空集合中引进了适当的距离后，便可以引进收敛概念．现在就着手引进收敛概念并讨论与它有关的一些性质．

**定义 1.2** 设$\{x_n\}$为距离空间 $X$ 中的一个点列(或称序列)，这里 $n=1, 2, 3, \cdots$．如果存在 $X$ 中的点 $x_0$ 使得当 $n\to\infty$ 时，$\rho(x_n, x_0)\to 0$，就称点列$\{x_n\}$收敛于 $x_0$，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \text{ 或 } \{x_n\}\to x_0.$$

有时也简记为

$$x_n\to x_0$$

称 $x_0$ 为$\{x_n\}$的极限．

以后如无特别声明，均假定 $n$ 取一切自然数．

**定理 1.1 距离空间$X$中的点列$\{x_n\}$最多只能收敛于一个点，因此收敛点列的极限是唯一的．**

**证** 设$\{x_n\}$收敛于两个点 $x_0$、$y_0$．则对于任给的 $\varepsilon>0$，存在自然数 $N$，使得当 $n>N$ 时，

$$\rho(x_n, x_0)<\varepsilon, \quad \rho(x_n, y_0)<\varepsilon.$$

由三角不等式得到

$$\rho(x_0, y_0)\leqslant\rho(x_0, x_n)+\rho(x_n, y_0)<2\varepsilon \quad (n>N).$$

因 $\varepsilon$ 是任给的，故 $\rho(x_0, y_0)=0$，于是 $x_0=y_0$．这表明$\{x_n\}$最多只能收敛于一点．因此收敛点列的极限必唯一．证毕．

**定理 1.2 设距离空间$X$中的点列$\{x_n\}$收敛于$x_0$，那么$\{x_n\}$的任一子列(或称子点列、子序列)$\{x_{n_k}\}$也收敛于 $x_0$．**

**证**．因$\{x_n\}$收敛于 $x_0$，故对于任给的 $\varepsilon>0$，存在自然数 $N$，使得当 $n>N$ 时，$\rho(x_n, x_0)<\varepsilon$．于是存在自然数 $K$，使得当 $k>K$ 时，$n_k>N$，故 $\rho(x_{n_k}, x_0)<\varepsilon$．这表明$\{x_{n_k}\}$收敛于 $x_0$．证毕．

**定理 1.3 设距离空间$X$中的点列$\{x_n\}$收敛于 $x_0$，则对于$X$中**

的任一点 $y_0$，数列 $\{\rho(x_n, y_0)\}$ 有界.

证. $\{\rho(x_n, x_0)\}$ 作为收敛数列是有界的，故存在 $M>0$ 使得 $\rho(x_n, x_0)\leqslant M$ 对一切 $n$ 成立. 于是

$$\rho(x_n, y_0)\leqslant\rho(x_n, x_0)+\rho(x_0, y_0)$$
$$\leqslant M+\rho(x_0, y_0).$$

证毕.

现在考察空间 $\mathbb{R}^n$ 及 $C[a,b]$ 中的收敛概念.

对于 $\mathbb{R}^n$ 来说，其中的点列 $\{x^{(m)}\}=\{(\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \cdots, \xi_n^{(m)})\}$ 按照等式(1) 定义的距离收敛于 $x^{(0)}=(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \cdots, \xi_n^{(0)})$ 的充分必要条件是 $x^{(m)}$ 的每个坐标收敛于 $x^{(0)}$ 的相应坐标.
其实由

$$|\xi_j^{(m)}-\xi_j|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k^{(m)}-\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\rho(x^{(m)}, x),$$

其中 $j=1, 2, \cdots, n$，可知，当 $\rho(x^{(m)}, x)\to 0$ 时，$|\xi_j^{(m)}-\xi_j|\to 0$ 对 $j=1, 2, \cdots, n$ 都成立.

反之，由

$$\rho(x^{(m)}, x)=\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k^{(m)}-\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant|\xi_1^{(m)}-\xi_1|+\cdots+|\xi_n^{(m)}-\xi_n|,$$

并注意到 $n$ 是一个固定的自然数，可知当 $|\xi_j^{(m)}-\xi_j|\to 0$ 对 $j=1, 2, \cdots, n$ 都成立时，必有 $\rho(x^{(m)}, x)\to 0$.

同理可以证明 $\{x^{(m)}\}$ 按照(1′)定义的距离收敛于 $x^{(0)}$ 也等价于按坐标收敛. 由此可知，$\mathbb{R}^n$ 按照等式(1)及(1′)定义的距离导出的收敛概念是一致的.

对于 $C[a,b]$（距离由等式 (3) 定义）来说，其中的点列 $\{x_n\}$ 收敛于点 $x_0$ 的充分必要条件是：作为函数列的 $\{x_n(t)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 $x_0(t)$.

事实上，设$\{x_n\}$按照距离公式(3)收敛于$x_0$，则当$n\to\infty$时，

$$\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x_n(t)-x_0(t)|\to 0,$$

这意味着对任给的$\varepsilon>0$，存在着仅与$\varepsilon$有关的$N$，使得当$n>N$时，对所有的$t\in[a,b]$，有

$$|x_n(t)-x_0(t)|<\varepsilon,$$

故$\{x_n(t)\}$一致收敛于$x_0(t)$.

反之，设$\{x_n(t)\}$于$[a,b]$上一致收敛于$x_0(t)$，则对于任给的$\varepsilon>0$，存在着仅与$\varepsilon$有关的$N$，使得当$n>N$时，不等式

$$|x_n(t)-x_0(t)|<\varepsilon$$

对于所有的$t\in[a,b]$一致地成立，于是

$$\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x_n(t)-x_0(t)|\leqslant\varepsilon\quad(n>N),$$

即$\rho(x_n,x_0)\leqslant\varepsilon(n>N)$. 这表明$\{x_n\}$作为空间$C[a,b]$中的点列按照距离(3)收敛于$x_0$.

在$C[a,b]$中还可以定义其他的距离. 但相应的收敛概念未必与一致收敛等价. 例如对$C[a,b]$中任意两个元素$x$、$y$，定义：

$$\rho_1(x,y)=\left(\int_a^b|x(t)-y(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}.\tag{11}$$

容易看出，$C[a,b]$按照$\rho_1$是一个距离空间而且是$L^2[a,b]$的子空间. 在$C[a,b]$中取函数列

$$x_n(t)=\frac{1}{(b-a)^n}(t-a)^n\quad(t\in[a,b],n=1,2,\cdots,n).$$

由 Lebesgue 控制收敛定理（第 4 章），$\{x_n\}$按照距离$\rho_1$收敛于$C[a,b]$中的零元素. 但作为函数列，$\{x_n(t)\}$显然不一致收敛. 因此在$C[a,b]$中，按照距离$\rho_1$导出的收敛概念不等价于一致收敛.

迄今为止，我们已经引进了距离及距离空间，在此基础上又引进了收敛概念，并讨论了一些有关的性质. 概括起来，我们应当注

意以下几点:

1° 对于任何一个非空集合,我们都可以定义距离.但是一般说来,我们应当根据该集合的特点适当地引进距离以充分反映这些特点. 例如,对 $C[a,b]$,我们常常用等式(3)定义距离;对于 $L^p[a,b]$,我们常常用等式(4)定义距离,等等.只有这样,在理论上或实践上才有较大的意义;

2° 定义距离的方式一般说不是唯一的;

3° 如果一个非空集合中定义了两个或两个以上的距离,那么由它们导出的收敛概念可以一致也可以不一致.

# §2 距离空间中的点集及其上的映射

## 2.1 几类特殊的点集

类似于空间 $\mathbf{R}^n$ 的情形,在一般的距离空间中也可以引进邻域、开集、闭集等一系列基本概念. 关于 $\mathbf{R}^n$ 中的邻域、开集、闭集等概念,在第一章中已作了详细讨论. 这里将根据一般距离空间的特点引进这些概念,且在叙述的方式上基本相同. 不过在一般的距离空间中,这些概念所包含的内容既丰富得多也深刻得多.

**定义 2.1** 距离空间 $X$ 中的点集

$$\{x:\rho(x,x_0)<r\} \quad (r>0) \tag{1}$$

叫做以 $x_0$ 为中心、以 $r$ 为半径的开球,这里 $x_0$ 是 $X$ 中一个给定的点. 如果在(1)式中将"$<$"换成"$\leqslant$",则相应的点集 $\{x:\rho(x,x_0)\leqslant r\}$ $(r>0)$ 叫做以 $x_0$ 为中心、以 $r$ 为半径的闭球. 上述开球与闭球分别用 $S(x_0,r)$、$\bar{S}(x_0,r)$ 表示. 以 $x_0$ 为中心、以正数 $r$ 为半径的开球又称为 $x_0$ 的一个球形邻域,简称为邻域.

有了邻域的概念,便可以引进开集、闭包、闭集等概念.

**定义 2.2** 设 $X$ 是一个距离空间,$G\subset X$,$x\in X$. 如果存在 $x$ 的

一个邻域 $S(x,r)\subset G$，则称 $x$ 是 $G$ 的内点．显然 $G$ 的内点都属于 $G$．$G$ 的全部内点构成的集记为 $G^0$，称为 $G$ 的内部．如果 $G$ 中的每一个点都是它的内点，则称 $G$ 为开集．空集规定为开集．

由定义立刻知道，$X$ 中的任何开集一定是某些开球(可能无穷多个)的并，而任何一个开球本身也是开集．

如果 $x$ 是集合 $G$ (未必是开集)的内点，我们也称 $G$ 是 $x$ 的一个邻域．

**定理 2.1　设 $X$ 是距离空间，则**

**(i) 空间 $X$ 与空集 $\varnothing$ 都是开集；**

**(ii) 任意多个开集的并是开集；**

**(iii) 有限多个开集的交是开集．**

由于几乎可以逐字逐句重复第一章有关定理的证明，故本定理的证明从略．

**定义 2.3**　设 $X$ 是距离空间，$A\subset X$．点 $x_0\in X$ 叫做 $A$ 的接触点，是指对任给的 $\varepsilon>0$，$x_0$ 的邻域 $S(x_0,\varepsilon)$ 中含有 $A$ 中的点，即

$$S(x_0,\varepsilon)\cap A\neq\varnothing.$$

如果点 $x_0$ 的任一邻域中必含有 $A\setminus\{x_0\}$ 中的点，则称 $x_0$ 为 $A$ 的聚点或极限点．若 $x_0\in A$ 但不是 $A$ 的聚点，则称 $x_0$ 为 $A$ 的孤立点．如果存在 $x_0$ 的某个邻域 $S(x_0,\varepsilon_0)$ 使得

$$S(x_0,\varepsilon_0)\cap A=\varnothing,$$

则称 $x_0$ 为 $A$ 的外点．

集合 $A$ 的全部接触点构成的集称为 $A$ 的闭包，记为 $\bar{A}$．如果 $A=\bar{A}$，则称 $A$ 为闭集．

我们已经引进了一个给定集合 $A$ 的内点、外点、接触点、聚点与孤立点等概念，此外还引进了开集、闭包与闭集的概念．

容易看出，内点与外点是两个不相容的概念，聚点与孤立点也是两个不相容的概念，而接触点则可以是聚点也可以是孤立点．还

容易看出，一个集合的闭包恰好由它的全部聚点（可能属于这个集合也可能不属于这个集合）与它的全部孤立点（必属于这个集合）组成．开集则恰好由它的全部内点组成．闭集则恰好由它的全部聚点与全部孤立点（二者均属于这个集合）组成．

**例 1** 设 $X$ 是数直线，即 $X=\mathbf{R}$．若 $A=\left\{1,\ \frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}$，则对于每个 $n(n=1,2,3,\ \cdots)$，$\frac{1}{n}$ 都是 $A$ 的孤立点，0 是 $A$ 的聚点，但不属于 $A$．设 $B$ 是区间 $(0,1]$，则闭区间 $[0,\ 1]$ 中的一切点都是 $B$ 的聚点，$(0,1)$ 中的一切点都是它的内点．因此聚点可以是内点也可以不是内点．

**例 2** 设 $X=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$，即 $X$ 为全部非负整数组成的集合．在 $X$ 中定义距离如下：

$$\rho(x,y)=|x-y|\quad (x,y\in X).$$

显然，$X$ 按照距离 $\rho$ 为一距离空间而且是 $\mathbb{R}$ 的子空间．$X$ 中的一切点都是它的孤立点，当然也是它的内点．由此可见内点与孤立点并非两个互相排斥的概念．

以下的定理给出了闭包的基本特性．

**定理 2.2 设 $X$ 是距离空间，$A$、$B$ 都是 $X$ 的子集，则：**

(i) $A\subset\overline{A}$;

(ii) $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$;

(iii) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$;

(iv) $\overline{\varnothing}=\varnothing$.

**证** (i)与(iv)是明显的，只需证明(ii)与(iii)．

(ii) 由(i)显然有 $\overline{A}\subset\overline{\overline{A}}$．今设 $x_0\in\overline{\overline{A}}$，那末对任给的 $\varepsilon>0$，开球 $S(x_0,\varepsilon)$ 中必含有 $\overline{A}$ 中的点，任取一个这样的点，记为 $y_0$．令 $\delta=\varepsilon-\rho(x_0,y_0)$，则 $\delta>0$．因 $y_0\in\overline{A}$，故开球 $S(y_0,\delta)$ 中至少含有 $A$ 中的一个点，记为 $z_0$．由于

$$S(x_0, \varepsilon)\supset S(y_0, \delta),$$

故 $z_0\in S(x_0,\varepsilon)$，这说明 $x_0\in\bar{A}$，故 $\bar{A}=\bar{\bar{A}}$.

(iii) 由于 $A\subset A\cup B$，故$\bar{A}\subset\overline{A\cup B}$，同理 $\bar{B}\subset\overline{A\cup B}$，于是

$$\bar{A}\cup\bar{B}\subset\overline{A\cup B}.$$

现在证明$\overline{A\cup B}\subset\bar{A}\cup\bar{B}$. 设 $x_0\in\overline{A\cup B}$，于是对于任给的 $\varepsilon>0$，

$$S(x_0, \varepsilon)\cap(A\cup B)\neq\varnothing. \tag{2}$$

假定 $x_0$ 既不是 $A$ 的接触点也不是 $B$ 的接触点，那末由定义，必存在正数 $\varepsilon_1$、$\varepsilon_2$，使

$$S(x_0, \varepsilon_1)\cap A=\varnothing,\quad S(x_0, \varepsilon_2)\cap B=\varnothing.$$

取 $\varepsilon=\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$，则

$$S(x_0,\varepsilon)\cap(A\cup B)=\varnothing,$$

这与(2)矛盾，故 $x_0$ 或者是 $A$ 的接触点或者是 $B$ 的接触点，二者必居其一，这表明$\overline{A\cup B}\subset\bar{A}\cup\bar{B}$，因此 $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B}$. 证毕.

由定理 2.2(ii)，任何集合的闭包必为闭集. 其次，还容易证明，$A\subset X$ 为闭集的充分必要条件是 $X\backslash A$ 是开集(见本章习题第 2 题). 于是由定理 2.1，立刻有

**定理 2.3 设 $X$ 为距离空间，则**

**(i) 空间 $X$ 及空集 $\varnothing$ 都是闭集;**

**(ii) 任意多个闭集的交是闭集;**

**(iii) 有限多个闭集的并是闭集.**

**例 3** 现在考察比例 2 更一般的情形. 设 $X$ 为一离散的距离空间. 在 §1.1 中已经指出，$X$ 中的距离由下面的等式给出:

$$\rho(x,y)=\begin{cases}0 & 若\ x=y;\\ 1 & 若\ x\neq y,\end{cases}$$

这里 $x$、$y$ 均属于 $X$. 根据这个定义，$X$ 中的每个点既为它的内点也为它的孤立点. 每个单元素集都是开集. 再由 $X$ 中的每个点为孤立点这一性质可知，每个单元素集必定是闭集. 因此每个单元

素集是既开且闭的集.

**例4** 设 $X=(0,1]\cup[2,3)$，距离定义为

$$\rho(x,y)=|x-y| \quad (x、y \text{ 均属于 } X),$$

因此$X$为 $\mathbf{R}$ 的子空间. $(0,1]$及$[2,3)$都是 $X$中既开且闭的集，$X$中以 1 为中心以$\frac{1}{2}$为半径的开球是区间$\left(\frac{1}{2}, 1\right]$.

### 2.2 稠密性与可分性

在第五章中，我们已在空间$L^p(E)$中定义了稠密性与可分性，并且证明了 $L^p(E)$是可分的. 由于定义这两个概念的主要基础是$L^p(E)$中的距离，因此不难将这两个概念推广到一般的距离空间中去.

**定义 2.4** 设 $A,B$ 均为距离空间 $X$ 的子集. 如果 $\bar{B}\supset A$，就称$B$在$A$中稠密.

稠密性概念可以换成下面几种等价的说法:

1° 对于任意的 $x\in A$ 以及任意的 $\varepsilon>0$，存在$B$中的点 $y$ 使 $\rho(x,y)<\varepsilon$;

2° 对于任给的 $\varepsilon>0$，以 $B$ 中的每个点为中心、以 $\varepsilon$ 为半径的全部开球的并包含 $A$;

3° 对于任意的 $x\in A$，存在 $B$ 中的点列$\{x_n\}$收敛于 $x$（在第五章中，对 $L^p$ 空间引入稠密概念时，就是用的这一说法).

应当注意，在稠密性的定义中，并不要求 $B\subset A$，$B$ 与 $A$ 甚至可以没有公共点.

**例5** 1° $n$ 维欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 中坐标为有理数的点的全体在 $\mathbf{R}^n$ 中稠密.

2° 连续函数空间 $C[0,1]$中伯恩斯坦多项式的全体在 $C[0,1]$中稠密(第五章).

3° 设$E$为有界可测集，则$E$上简单函数的全体在$L^p(E)$中

稠密(第五章).

利用稠密性概念可以定义距离空间的可分性.

**定义 2.5** 距离空间 $X$ 称为可分的,是指在 $X$ 中存在一个稠密的可列子集. $A\subset X$ 称为可分的,若 $A$ 本身作为距离空间(以 $X$ 的距离为距离)是可分的.

可以证明, $A\subset X$ 是可分的充分必要条件是存在 $X$ 的可列子集 $B$ 使 $\overline{B}\supset A$. 值得注意的是集合 $B$ 不必包含在 $A$ 中甚至不必与 $A$ 相交.

**例6** 1° $\mathbb{R}^n$ 是可分的, 因为 $\mathbb{R}^n$ 坐标为有理数的点的全体是 $\mathbb{R}^n$ 的一个可列稠密子集.

2° 空间 $C[a, b]$是可分的, 因为利用第五章中的伯恩斯坦定理可以证明:具有有理系数的多项式的全体 $P_0$ 在 $C[a, b]$中稠密,而 $P_0$ 是可列集.

3° 空间 $L^p[a, b]$ $(p\geqslant 1)$ 是可分的, 这在第五章 § 2 中已经证明.

但确实存在着不可分的距离空间.

**例7** $L^\infty[a,b]$是不可分的距离空间. 设 $A$ 是由如下的函数

$$x_s(t)=\begin{cases}1, & a\leqslant t\leqslant s;\\ 0, & s<t\leqslant b\end{cases}\quad (s\in[a,b])$$

组成的集合. 由空间 $L^\infty[a,b]$中距离的定义, 对于任意的 $s$、$s'\in[a,b]$, 只要 $s\neq s'$, 就有

$$\rho(x_s,x_{s'})=1. \tag{3}$$

如果 $L^\infty[a,b]$是可分的, 则它存在稠密的可列子集, 设为 $M_0$. 以 $M_0$ 中的每个元素为中心,以 1/3 为半径作开球, 此种开球共计可列个,这可列个开球的并是 $L^\infty[a,b]$, 因此包含 $A$. 由于 $A$ 的势为 $\aleph$,因此 $A$ 中至少有两个元素,例如说 $x_{s_0}$ 及 $x_{s_1}$ 含在同一个球中. 于是 $x_{s_0}$, $x_{s_1}$ 的距离不可能大于 2/3, 即

$$\rho(x_{s_0},\ x_{s_1})\leqslant\frac{2}{3},$$

这与式(3)矛盾. 因此 $L^\infty[a,b]$是不可分的.

## 2.3 距离空间上的连续映射

§2.1、§2.2 中研究了距离空间中点集的性质. 但我们还需研究从一个距离空间到另一个距离空间的映射, 其中尤以连续映射比较重要.

**定义2.6** 设 $X$、$X_1$ 都是距离空间,如果对每一个 $x\in X$,必有 $X_1$ 中唯一的点 $y$ 与之对应,则称这个对应关系是一个映射, 映射常用记号 $T$ 来表示,据此,我们有 $Tx=y$. 如果对于某一给定的点 $x_0\in X$,映射 $T$ 满足下面的条件:对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$, 使得当 $\rho(x,x_0)<\delta$ 时, 有 $\rho(Tx,Tx_0)<\varepsilon$, 则称映射 $T$ 在 $x_0$ 连续. 如果映射 $T$ 在 $X$ 中的每一点都连续, 就称 $T$ 在 $X$ 上连续或称 $T$ 是连续映射.

**定义 2.7** 设 $T$ 是由距离空间 $X$ 到距离空间 $X_1$ 的映射, $A\subset X$. 我们称集合

$$\{Tx;\ x\in A\}$$

为集合 $A$ 的像,记为 $T(A)$. 设 $B\subset X_1$,则称集合

$$\{x;\ Tx\in B\}$$

为集合 $B$ 的原像,记为 $T^{-1}(B)$.

根据定义,集合 $A$ 的像是 $X_1$ 的子集, 集合 $B$ 的原像则是 $X$ 的子集.

**例 8** 设 $X$ 是一距离空间,以 $\rho$ 为距离,$x_0\in X$ 为一给定的点. 则 $f(x)=\rho(x,x_0)$ 是 $X$ 到 $\mathbb{R}$ 的连续映射.

其实,对于给定的 $x$、$y\in X$,由三角不等式,有

$$\rho(y,x_0)\leqslant\rho(y,x)+\rho(x,x_0),$$

因此

$$\rho(y,x_0)-\rho(x,x_0)\leqslant\rho(y,x). \tag{4}$$

同理
$$\rho(x,x_0)-\rho(y,x_0)\leqslant\rho(y,x). \tag{5}$$

由(4)、(5)，得到

$$|\rho(x,x_0)-\rho(y,x_0)|\leqslant\rho(y,x).$$

于是

$$|f(y)-f(x)|=|\rho(y,x_0)-\rho(x,x_0)|\leqslant\rho(y,x).$$

任给 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，则当 $\rho(y,x)<\delta$ 时，有 $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$，故映射 $f$ 在 $X$ 中的任一点 $x$ 处连续，因此是连续映射.

从距离空间 $X$ 到实(或复)数域中的映射又称为函数. 例如上例中的 $f(x)=\rho(x,x_0)$ 便是定义在 $X$ 上的一个函数.

与古典分析中函数的记号类似，在本书中，常用 $f$、$g$、$h$ 等表示函数，函数亦称为泛函.

下面的两个定理讨论映射连续性的几个等价条件.

**定理 2.4 由距离空间 $X$ 到距离空间 $X_1$ 中的映射 $T$ 在点 $x_0\in X$ 连续的充分必要条件是对任何收敛于 $x_0$ 的点列 $\{x_n\}\subset X$，有 $\{Tx_n\}$ 收敛于 $Tx_0$.**

**证** 必要性. $X$、$X$上的距离分别用$\rho$、$\rho_2$表示. 设 $T$ 在 $x_0$连续，则，对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $\rho(y,x_0)<\delta$ 时，有 $\rho_1(Ty,Tx_0)<\varepsilon$. 今设 $\{x_n\}\subset X(n=1,2,3,\cdots)$ 且 $\{x_n\}$ 收敛于 $x_0\in X$. 于是存在 $N>0$，使得当 $n>N$ 时，$\rho(x_n,x_0)<\delta$，故 $\rho_1(Tx_n,Tx_0)<\varepsilon$，因此 $\{Tx_n\}\to Tx_0$.

充分性. 用反证法. 设定理的条件成立，但 $T$ 在点 $x_0$ 不连续，于是存在某个正数 $\varepsilon_0$ 以及点列 $\{x_n\}\subset X$，使得对于每个 $n(n=1,2,3,\cdots)$，有 $\rho(x_n,x_0)<\frac{1}{n}$，但 $\rho_1(Tx_n,\ Tx_0)\geqslant\varepsilon_0$. 显然与定理中的充分性假设矛盾，故 $T$ 在 $x_0$ 连续.

**定理 2.5 由距离空间 $X$ 到距离空间 $X_1$ 中的映射 $T$ 是连续**

映射的充分必要条件是下列两个条件之一成立：

（i）对于 $X_1$ 中的任一开集 $G$，$G$ 的原象 $T^{-1}(G)$ 是 $X$ 中的开集；

（ii）对于 $X_1$ 中的任一闭集 $F$，$F$ 的原象 $T^{-1}(F)$ 是 $X$ 中的闭集.

证 (i) 先证必要性. $X$、$X_1$ 上的距离分别用 $\rho$、$\rho_1$ 表示. 设 $G$ 是 $X_1$ 中的开集，如果 $T^{-1}(G)$ 是空集，则它显然是开集. 今设 $T^{-1}(G)$ 非空. 任取 $x_0 \in T^{-1}(G)$，令 $y_0 = Tx_0$，则 $y_0$ 属于 $G$ 且是 $G$ 的内点，故存在 $\varepsilon > 0$，使 $S_1(y'_0, \varepsilon) \subset G$，这里 $S_1(y_0, \varepsilon)$ 表示 $X^1$ 中以 $y_0$ 为中心、以 $\varepsilon$ 为半径的开球. 因 $T$ 连续，故存在 $\delta > 0$，使得当 $\rho(x, x_0) < \delta$ 时，$\rho_1(Tx, Tx_0) < \varepsilon$，就是说当 $x \in S(x_0, \delta)$ 时，$Tx \in S_1(y_0, \varepsilon) \subset G$，故 $x \in T^{-1}(G)$. $x$ 是 $S(x_0, \varepsilon)$ 中的任一点，因此 $S(x_0, \delta) \subset T^{-1}(G)$，$T^{-1}(G)$ 为开集.

再证(i)的充分性. 任取 $x_0 \in X$ 并任给 $\varepsilon > 0$. 令 $G = S_1(Tx_0, \varepsilon)$. 由假设，$T^{-1}(G)$ 为开集，故存在 $\delta > 0$ 使 $S(x_0, \delta) \subset T^{-1}(G)$，由此可知，当 $\rho(x, x_0) < \delta$ 时，$\rho_1(Tx, Tx_0) < \varepsilon$，故 $T$ 在 $x_0$ 处连续. 而 $x_0$ 在 $X$ 中是任意的，故 $T$ 在 $X$ 上连续.

(ii) 容易证明下面的事实：对于 $X_1$ 中任何两个子集 $A$、$B$，当 $A$、$B$ 在 $X_1$ 中互为补集时，$T^{-1}(A)$、$T^{-1}(B)$ 在 $X$ 中也互为补集. 而开集与闭集是互为补集的，利用(i)中条件的充分必要性可以知道，(ii)中的条件也是 $T$ 连续的充分必要条件. 证毕.

连续映射的一个重要特例是同胚映射. 我们先引入逆映射的概念. 设 $T$ 是距离空间 $X$ 到距离空间 $X_1$ 的一对一的映射，即对任意的 $x_1$、$x_2 \in X$，当 $x_1 \neq x_2$ 时，$Tx_1 \neq Tx_2$. 今再设 $T(X) = X_1$. 任取 $y \in X_1$，则存在唯一的 $x \in X$ 使

$$Tx = y. \tag{6}$$

$T$ 的逆映射是如下的映射，记为 $T^{-1}$，它将(6)中的 $y$ 映为 $x$：

$$T^{-1}y=x.$$

显然 $T^{-1}$ 是由 $X_1$ 到 $X$ 上的映射，且对任何 $x\in X$，

$$T^{-1}(Tx)=x, \tag{7}$$

而对任何 $y\in X_1$，

$$T(T^{-1}y)=y. \tag{8}$$

当 $T$ 存在逆映射时，称 $T$ 是可逆的.

通常一对一的映射又称为单映射，满足 $T(X)=X_1$ 的映射又称为满映射. 因此 $T$ 存在逆映射的充分必要条件是 $T$ 既为单映射又为满映射. 今后我们称既单且满的映射为双映射.

在本书中，一对一映射与单映射这两个名称将同时使用. 有的场合，我们使用一对一映射这一名称，有的场合则使用单映射这一名称.

**定义 2.8** 如映射 $T$ 存在逆映射，且 $T$ 及其逆映射 $T^{-1}$ 都连续，则称 $T$ 是 $X$ 到 $X_1$ 上的同胚映射. 如果存在一个从 $X$ 到 $X_1$ 上的同胚映射，则称 $X$ 与 $X_1$ 同胚.

**例 9** $y=\operatorname{arctg}x$ 是 $\mathbb{R}$ 到 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 的同胚映射，因此 $\mathbb{R}$ 与 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 同胚. $y=e^x$ 是 $\mathbb{R}$ 到 $(0,\infty)$ 的同胚映射，因此 $\mathbb{R}$ 与 $(0,\infty)$ 同胚.

在这一节中，我们引进了较多的概念. 就点的类型来说，有内点、外点、接触点、聚点、孤立点等. 就集合的类型来说，则引进了开集、闭包、闭集等. 就距离空间与它的子集的相互关系来说，则引进了稠密性概念以及在此基础上的可分性概念. 最后，就两个距离空间的相互关系来说，则引进了映射、连续映射以及同胚映射等概念. 我们应当注意：

1° 由于给定的非空集合 $X$ 的任意性以及在 $X$ 上定义距离的多样性，与 Euclid 空间的情形相比，这一节引进的概念包含了更

加丰富更加深刻的内容；

2° 当读者学习这一节的内容时，要注意它与 Euclid 空间情形的共同点，更要注意它们的不同点. 当着我们注意这些不同点时，最重要的是：这一节中所有的概念都离不开预先定义的距离；

3° 因此，如果在一个非空集合上定义了两个或两个以上的距离，我们便得到两个或两个以上的距离空间，那么其中一个很可能是可分的，而其余的则不是. 对于稠密性以及映射的连续性与同胚性等，也有类似的情形. 在此不一一赘述.

## §3 完备性·距离空间的完备化

### 3.1 完备的距离空间

大家知道实数域有一个重要特性，即任何一个 Cauchy 序列或基本序列必有极限，这就是通常所说的实数域的完备性. 这个性质在数学分析中起着重要作用. 例如由它可以获得级数收敛的哥西判别准则，由它的等价命题可以证明有界闭区间上连续函数的三个重要性质，等等.

在第五章中，我们引进了 $L^p$ 空间完备性概念并证明了 $L^p$ 空间是完备的. 但一般的距离空间就不一定具有这种性质. 在本节中，我们将特别研究具有这种性质(即完备性)的距离空间.

**定义 3.1** 距离空间 $X$ 中的点列 $\{x_n\}$ 叫做 Cauchy 点列或基本点列，是指对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，使当 $m, n>N$ 时，

$$\rho(x_m, x_n)<\varepsilon$$

(今后我们将采用基本点列这一名称). $X$ 叫做完备的距离空间，是指 $X$ 中的任一基本点列必收敛于 $X$ 中的某一点.

由定义直接导出下面两个性质：

1° 距离空间中的任一收敛点列必是基本点列；

**2°** 完备距离空间的任何闭子空间也是完备的.

一般说,性质 1° 的逆不成立，这是因为不完备的距离空间是存在的.例如有理数域按照距离 $\rho(x,y)=|x-y|$ 是不完备的距离空间. 又如区间$(0,1]$及区间 $(0,1)$ 按照距离 $\rho(x, y)=|x-y|$ 也都是不完备的距离空间，它们中的基本点列不一定收敛. 如 $\left\{\frac{1}{n}\right\}(n=1,2,3,\cdots)$是$(0,1]$中的基本点列,但在$(0,1]$中不收敛.

尽管如此，却存在着为数众多的完备距离空间. 例如§1.1中所举的两个例子 $\mathbf{R}^n$、$C[a,b]$都是完备的距离空间. $\mathbf{R}^n$ 的完备性可由实数域的完备性导出,故不详细讨论. 下面研究 $C[a,b]$的完备性,并再介绍几个完备的距离空间.

**例 1 空间 $C[a,b]$** 设$\{x_n\}\subset C[a, b]$是一基本点列，于是对于任给的 $\varepsilon>0$，存在仅与 $\varepsilon$ 有关的 $N>0$,使得当 $m$、$n>N$ 时,有$\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$.由§1等式(3)，$|x_m(t)-x_n(t)|<\varepsilon$ 对一切 $t\in[a, b]$一致地成立. 由数学分析可知 $\{x_n(t)\}$在$[a, b]$上一致收敛于某一连续函数 $x_0(t)$. 因此 $x_0\in C[a, b]$. 由于一致收敛与§1等式(3)定义的收敛是等价的,故 $\rho(x_n,x_0)\to 0$, $C[a,b]$完备.

**例 2 空间 $L^p[a, b](1\leqslant p<+\infty)$** 由第五章定理 1.4 可知,$L^p[a,b]$是完备的.

**例 3 空间 $l^p(1\leqslant p<+\infty)$** 已知 $l^p$ 是由满足

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p<+\infty$$

的一切实(或复)数序列 $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k,\cdots\}$组成的集. 对于 $l^p$ 中的任意两个元素 $x=\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k,\cdots\}$及 $y=\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k,\cdots\}$,规定的距离为(§1例5):

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k-\eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

则 $l^p$ 为一完备的距离空间(见本章习题第 15 题).

**例 4　空间 $S$**　记 $E=[a,\ b]$. 定义在 $E$ 上的一切几乎处处有限的可测函数组成的集记为 $S$. $S$ 中凡几乎处处相等的函数看成同一元素. 在 $S$ 中定义距离如下:

$$\rho(x,y)=\int_E \frac{|x(t)-y(t)|}{1+|x(t)-y(t)|}dt \quad (x、y\in S),$$

则 $S$ 为完备的距离空间.

先证 $S$ 为距离空间. 距离公理中的条件(i)、(ii)都是显然的, 只需验证三角不等式. 考察函数 $f(t)=\frac{t}{1+t}$ $(t\geqslant 0)$. 由 $f(t)=1-\frac{1}{1+t}$, $f(t)$是 $t\geqslant 0$ 的上升函数, 因此当 $0\leqslant t'<t''$ 时

$$\frac{t'}{1+t'}<\frac{t''}{1+t''}.$$

任取$S$中的元素$x$、$y$、$z$, 按照 $S$ 中距离的定义, 有

$$\begin{aligned}\rho(x,y)&=\int_E \frac{|x(t)-y(t)|}{1+|x(t)-y(t)|}dt\\&\leqslant\int_E \frac{|x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|}{1+|x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|}dt\\&\leqslant\int_E \frac{|x(t)-z(t)|}{1+|x(t)-z(t)|}dt\\&\quad+\int_E \frac{|z(t)-y(t)|}{1+|z(t)-y(t)|}dt\\&=\rho(x,z)+\rho(z,y),\end{aligned}$$

于是 $S$ 按照所定义的距离为一距离空间.

现在证明空间 $S$ 中的收敛等价于测度收敛. 设 $\{x_n\}\subset S(n=1,2,3,\cdots)$ 按 $S$ 的距离收敛于 $x\in S$. 任给 $\sigma>0$, 在

$$\rho(x_n,x)=\int_E \frac{|x_n(t)-x(t)|}{1+|x_n(t)-x(t)|}dt$$

$$\geqslant\int_{E(|x_n-x|\geqslant\sigma)}\frac{|x_n(t)-x(t)|}{1+|x_n(t)-x(t)|}dt$$

$$\geqslant\frac{\sigma}{1+\sigma}mE(|x_n-x|\geqslant\sigma) \tag{1}$$

中，令 $n\to\infty$，可得 $mE(|x_n-x|\geqslant\sigma)\to 0$，因此，$\{x_n(t)\}$ 测度收敛于 $x(t)$.

反之，设 $S$ 中的函数列 $\{x_n(t)\}$ 测度收敛于几乎处处有限的可测函数 $x(t)$. 对任给的 $\sigma>0$，有

$$\rho(x_n,x)=\int_E\frac{|x_n(t)-x(t)|}{1+|x_n(t)-x(t)|}dt$$

$$=\int_{E(|x_n-x|\geqslant\sigma)}\frac{|x_n(t)-x(t)|}{1+|x_n(t)-x(t)|}dt$$

$$+\int_{E(|x_n-x|<\sigma)}\frac{|x_n(t)-x(t)|}{1+|x_n(t)-x(t)|}dt$$

$$\leqslant mE(|x_n-x|\geqslant\sigma)+\frac{\sigma}{1+\sigma}mE(|x_n-x|<\sigma)$$

$$\leqslant mE(|x_n-x|\geqslant\sigma)+\frac{\sigma}{1+\sigma}mE. \tag{2}$$

任给 $\varepsilon>0$，取正数 $\sigma$，使 $\frac{\sigma}{1+\sigma}mE<\frac{\varepsilon}{2}$. 对于这个 $\sigma$，再取正数 $N$ 使得当 $n>N$ 时，$mE(|x_n-x|\geqslant\sigma)<\frac{\varepsilon}{2}$. 由(2)，得

$$\rho(x_n,x)<\varepsilon\quad(n>N),$$

故 $\{x_n\}\to x$.

最后证明 $S$ 的完备性. 设 $\{x_n\}$ 是 $S$ 中的基本点列. 任意取定 $\sigma>0$，在不等式(1)中将 $x$ 换成 $x_m$，有

$$\rho(x_n,x_m)\geqslant\frac{\sigma}{1+\sigma}mE(|x_n-x_m|\geqslant\sigma). \tag{3}$$

因 $\{x_n\}$ 为基本点列，故对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，使得当 $m$、$n>N$ 时，

$$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon. \tag{4}$$

由(3)及(4)，当 $m$、$n > N$ 时，$mE(|x_n - x_m| \geqslant \sigma) < \frac{1+\sigma}{\sigma} \cdot \varepsilon$，因此

$$mE(|x_n - x_m| \geqslant \sigma) \to 0 \quad (m, n \to \infty). \tag{5}$$

利用(5)可找到自然数列 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$，使

$$mE\left(|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}| \geqslant \frac{1}{2^k}\right) < \frac{1}{2^k}.$$

对 $k = 1, 2, 3, \cdots$ 成立. 为简便起见，记 $E_k = E\left(|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}| < \frac{1}{2^k}\right)$. 再令

$$E_0 = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=m}^{\infty} E_k,$$

则 $mE_0 = mE$，且对任何 $t \in E_0$，$\{x_{n_k}(t)\}$ 是基本序列，故收敛于有限极限（以上的详细过程可参考第三章关于可测函数列的收敛性一节）. 令

$$x_0(t) = \begin{cases} \lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k}(t), & \text{当 } t \in E_0; \\ 0, & \text{当 } t \in E - E_0. \end{cases}$$

则 $x_0(\cdot)$ 为处处有限的可测函数，故 $x_0 \in S$. 当 $n$、$n_k > N$ 时，由(4)可得

$$\int_E \frac{|x_n(t) - x_{n_k}(t)|}{1 + |x_n(t) - x_{n_k}(t)|} dt = \rho(x_n, x_{n_k}) < \varepsilon.$$

令 $k \to \infty$ 并利用勒贝格控制收敛定理，有

$$\rho(x_n, x_0) \leqslant \varepsilon \quad (n > N),$$

因此 $\{x_n\}$ 在 $S$ 中收敛于 $x_0$，$S$ 完备.

**注** $S$ 中的点列 $\{x_n\}$ 如果满足(5)，则称它为基本测度收敛点列. 以上的论证表明，基本测度收敛必测度收敛. 其实，逆命题也成立，证明也很容易.

**例 5 空间 s** 令 $s$ 为一切实(或复)数序列 $x = \{\xi_1, \xi_2, \cdots,$

$\xi_k,\cdots\}$组成的集，在 $s$ 中定义距离如下：

$$\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|},$$

其中$x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k,\cdots\}$，$y=\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k,\cdots\}$，则 $s$ 为一完备的距离空间.

先证 $s$ 为距离空间. 只验证三角不等式. 任取$x$、$y$、$z\in s$，由函数$f(t)=\dfrac{t}{1+t}$的上升性($t\geqslant 0$)，我们有

$$\begin{aligned}\rho(x,y)&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|}\\&\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k-\zeta_k|+|\zeta_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\zeta_k|+|\zeta_k-\eta_k|}\\&\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k-\zeta_k|}{1+|\xi_k-\zeta_k|}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\zeta_k-\eta_k|}{1+|\zeta_k-\eta_k|}\\&=\rho(x,z)+\rho(z,y),\end{aligned}$$

其中 $\xi_k$、$\eta_k$、$\zeta_k$分别为$x$、$y$、$z$的第$k$个坐标.

现在考察空间 $s$ 中收敛概念的含义. 设 $x_n=\{\xi_1^{(n)},\ \xi_2^{(n)},\ \cdots,\ \xi_k^{(n)},\cdots\}$，$x_0=\{\xi_1^{(0)},\xi_2^{(0)},\cdots,\xi_k^{(0)},\cdots\}$均属于 $s$ 且$\rho(x_n,x_0)\to 0$. 于是对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，使得当 $n>N$ 时，

$$\rho(x_n,x_0)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(0)}|}{1+|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(0)}|}<\varepsilon,$$

因此对每个给定的 $k$，有

$$\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(0)}|}{1+|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(0)}|}<\varepsilon\quad(n>N),$$

故$|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(0)}|\to 0$，就是说 $x_n$ 的每个坐标收敛于 $x_0$ 的对应坐标.

反之，设 $x_n$ 的每个坐标收敛于 $x_0$ 的对应坐标，即对每个 $k$，当

$n\to\infty$ 时，$|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(0)}|\to 0$. 我们证明$\{x_n\}$按照 $s$ 的距离收敛于$x_0$. 任给 $\varepsilon>0$, 取定充分大的 $m$, 使$\frac{1}{2^m}<\frac{\varepsilon}{2}$. 于是

$$\rho(x_n,x_0)=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(0)}|}{1+|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(0)}|}$$

$$+\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(0)}|}{1+|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(0)}|}$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{m}|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(0)}|+\frac{\varepsilon}{2}.$$

由于 $m$ 是取定的，故存在 $N>0$，使得当$n>N$时，$\sum_{k=1}^{m}|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(0)}|$也小于$\frac{\varepsilon}{2}$. 于是当 $n>N$ 时，$\rho(x_n,x_0)<\varepsilon$. 因此 $\rho(x_n,\ x_0)\to 0$ $(n\to\infty)$. 这表明$\{x_n\}$ 按 $s$ 的距离收敛于 $x_0$. 于是 $s$ 中的收敛与按坐标收敛等价.

利用上面的方法还可以证明：如果$\{x_n\}$是 $s$ 中的一个基本点列，则对于每个 $k(k=1,2,3,\cdots)$，$x_n$的第 $k$ 个坐标 $\xi_k^{(n)}$构成一基本序列. 由实数域的完备性可知它们都有极限，这些极限组成的数列为 $s$ 中的一个元素，记为$x_0$. 由于在空间 $s$ 中，按距离收敛等价于按坐标收敛，因此$\{x_n\}$收敛于 $x_0$，故 $s$ 是完备的.

在下面的例6中，需要用到几乎一致收敛概念，我们先介绍它. 设 $\{x_n(\cdot)\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 是定义在可测集$E$上的可测函数列，$x_0(\cdot)$ 是定义在 $E$ 上的可测函数. 如果存在 $E$ 的零测度子集$E_0$使得$\{x_n(\cdot)\}$在 $E\setminus E_0$ 上一致收敛于 $x_0(\cdot)$，就称$\{x_n(\cdot)\}$几乎一致收敛于 $x_0(\cdot)$.

**例 6 空间 $L^\infty[a,b]$** 在 §1.1 中我们已经证明 $L^\infty[a,b]$是距离空间. 按照 $L^\infty[a,b]$中距离的定义还可以证明 $L^\infty[a,b]$中的

收敛等价于几乎一致收敛，由此不难推出 $L^\infty[a,b]$ 是完备的（本章习题第 17 题）。

前面已经指出距离空间不一定是完备的，并且列举了几个简单的实例．现在再以连续函数类为例来说明这一问题．

**例 7** 我们已经证明 $C[a,b]$ 按照距离

$$\rho(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|\ (x、y\in C[a,b])$$

是完备的距离空间．现在再证明 $C[a,b]$ 按照距离

$$\rho_1(x,y)=\left(\int_b^b|x(t)-y(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}} \tag{6}$$

是不完备的．在 $(a,\ b)$ 中任意取定一点 $c$，例如取 $c=\frac{a+b}{2}$，令

$$x_0(t)=\begin{cases}1, & c<t\leqslant b;\\ 0, & t=c;\\ -1, & a\leqslant t<c.\end{cases}$$

因 $C[a,b]$ 按照距离 $\rho_1$ 在 $L^2[a,b]$ 中稠密，故存在 $\{x_n\}\subset C[a,b]$，使 $\{x_n\}$ 按照 $\rho_1$ 收敛于 $x_0$，但 $x_0(t)$ 不可能对等于一个连续函数，所以 $C[a,b]$ 按照 $\rho_1$ 是不完备的．

**3.2 第一及第二类型的集**

在 §2.2 中，我们对距离空间引进了稠密性概念．现在再引进一个与此完全不同的概念．在此基础上再引进第一及第二类型的集．

**定义 3.2** 设 $X$ 为一距离空间，$A$ 是 $X$ 的子集．如果 $A$ 在 $X$ 的任何一个非空开集中均不稠密，则称 $A$ 为稀疏集．

定义中的非空开集可以换成非空开球．下面的定理给出稀疏集的一个特征．

**定理 3.1** 距离空间 $X$ 的子集 $A$ 为稀疏集的充分必要条件是对任一开球 $S(x_0,r)$，存在另一个含于 $S(x_0,r)$ 中的开球 $S(y_0,r')$

使

$$A \cap S(y_0, r') = \varnothing.$$

**证** 必要性. 设 $A$ 是稀疏集，则 $A$ 在开球 $S(x_0, r)$ 中是不稠密的，于是存在 $y_0 \in S(x_0, r)$ 以及以 $y_0$ 为中心的开球 $S(y_0, r') \subset S(x_0, r)$ 使 $S(y_0, r')$ 与 $A$ 不相交，即 $A \cap S(y_0, r') = \varnothing$.

充分性. 如果定理中的条件满足，则 $A$ 在任一非空开球中不稠密，因此 $A$ 是稀疏集.

显然定理 3.1 中所涉及的开球均可换成闭球.

**定义 3.3** 设 $A$ 为距离空间 $X$ 的子集. 如果 $A$ 可以表示成至多可列个稀疏集的并，则称 $A$ 是第一类型的集，凡不是第一类型的集均称为第二类型的集.

因此，距离空间 $X$ 的子集或者是第一类型的集或者是第二类型的集，二者必居其一.

**例 8** 1° $n$ 维Euclid空间 $\mathbf{R}^n$ 中的任一有限子集是稀疏集，特别地，任一单元素集是稀疏集，因此 $\mathbf{R}^n$ 中的任一可列集是第一类型的集.

2° 设 $X$ 为离散的距离空间（见 § 2 例 2），则 $X$ 中的任一单元素集是第二类型的集.

事实上，设 $\{x\}$ 是一单元素集. 首先可以断言 $\{x\}$ 不是稀疏集，这是因为 $\{x\} = S\left(x, \frac{1}{2}\right)$，故 $\{x\}$ 在 $S\left(x, \frac{1}{2}\right)$ 中稠密，于是 $\{x\}$ 不是稀疏集. 因此包含在 $\{x\}$ 中的任一稀疏集必为空集. 如果 $\{x\}$ 是可列个稀疏集的并，则 $\{x\}$ 本身必为空集. 矛盾. 因此 $\{x\}$ 为第二类型的集.

由例 8 可以看出，第一类型的集与第二类型的集都是相对于一定的距离空间而言的，因而也都与事先给定的空间有着不可分割的联系.

在数学分析中，有著名的区间套定理，它是实数域的完备性的一个等价命题．在完备的距离空间中则有闭球套定理．

**定理 3.2** **设 $X$ 是完备的距离空间，$K_n=\bar{S}(x_n, r_n)$ 是 $X$ 中的一列闭球，满足**

$$K_1\supset K_2\supset\cdots\supset K_n\supset\cdots(\text{称为闭球套}).$$

**如果球的半径 $r_n$ 构成的序列 $\{r_n\}\to 0(n\to\infty)$，则有唯一的点 $x_0$ 含于所有的球中．**

**证** 让我们考虑这些球的中心组成的点列 $\{x_n\}$．设 $m>n$，则 $K_m\subset K_n$，所以 $x_m\in K_n$．于是

$$\rho(x_m, x_n)\leqslant r_n,$$

故当 $m,n\to\infty\ (m>n)$ 时，$\rho(x_m, x_n)\to 0$，因此 $\{x_n\}$ 是基本点列．因 $X$ 是完备的，故 $\{x_n\}$ 收敛于某一点 $x_0\in X$．我们证明 $x_0$ 属于所有的 $K_n$．任意取定一个 $K_{n_0}$，当 $n\geqslant n_0$ 时，一切 $x_n$ 均属于 $K_{n_0}$．而 $K_{n_0}$ 是闭的，故点列 $\{x_n\}_{n\geqslant n_0}$ 的极限 $x_0$ 也属于 $K_{n_0}$．从而 $x_0$ 属于所有的球 $K_n$．

现在设除去 $x_0$ 外，点 $y_0$ 也属于所有的球，而且 $y_0\neq x_0$．于是

$$\rho(x_0, y_0)=\delta_0>0.$$

另一方面，由于 $x_0, y_0$ 均属于所有的球 $K_n$，故

$$\rho(x_0, y_0)\leqslant\rho(x_0, x_n)+\rho(x_n, y_0)\leqslant 2r_n.$$

但这是不可能的，因为当 $n\to\infty$ 时，$\{r_n\}\to 0$．因此 $x_0$ 是唯一属于所有球 $K_n$ 的点．证毕

**定理 3.2** 的逆命题也成立．

**定理 3.3** **如果距离空间 $X$ 中的任一半径趋于零的闭球套都有非空的交，则空间 $X$ 是完备的．**

**证** 设 $\{x_n\}$ 为 $X$ 中的一基本点列，则存在子点列 $\{x_{n_k}\}$ 使得

$$\rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k})<\frac{1}{2^k}.$$

记 $\bar{S}_k$ 是以 $x_{n_k}$ 为中心以 $\frac{1}{2^{k-1}}$ 为半径的闭球. 则 $\bar{S}_{k+1}\subset\bar{S}_k$, 其实, 若 $x\in\bar{S}_{k+1}$, 那么

$$\rho(x, x_{n_k})\leqslant\rho(x, x_{n_{k+1}})+\rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k})$$
$$<\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^{k-1}},$$

故 $x\in\bar{S}_k$. 因此 $\bar{S}_{k+1}\subset\bar{S}_k$, $\{\bar{S}_k\}$ 为一闭球套. 闭球 $\bar{S}_k$ 的半径构成的序列趋于零(当 $k\to\infty$). 由假设, 存在 $X$ 中的点 $x_0$ 属于所有的球 $\bar{S}_k$,

现在证明 $\{x_n\}$ 收敛于 $x_0$. 因为 $x_0\in\bar{S}_k$ 对 $k=1, 2, 3, \cdots$ 均成立, 故

$$\rho(x_n, x_0)\leqslant\rho(x_n, x_{n_k})+\rho(x_{n_k}, x_0)$$
$$\leqslant\rho(x_n, x_{n_k})+\frac{1}{2^{k-1}},$$

当 $n$ 及 $k$ 都趋于无穷大时, 右端两项均趋于零, 故 $\{x_n\}\to x_0$. 证毕

下面的定理讨论了完备距离空间的一个重要特性.

**定理 3.4(Baire)　完备的距离空间是第二类型的集.**

**证**　假定结论不对, 则存在完备距离空间 $X$, 使 $X$ 为第一类型的集, 于是有

$$X=\bigcup_{n=1}^{\infty}K_n,$$

其中 $K_n(n=1, 2, 3, \cdots)$ 均为稀疏集. 在 $X$ 中任取一个闭球 $\bar{S}(x_0, r_0)$ $(r_0>0)$. 因 $K_1$ 是稀疏集, 于是存在一个包含在球 $\bar{S}(x_0, r_0)$ 内的闭球 $\bar{S}(x_1, r_1)$, 它不含 $K_1$ 中的点. 设半径 $r_1$ 满足: $0<r_1<1$. 对于球 $\bar{S}(x_1, r_1)$ 来说, 由于 $K_2$ 是稀疏集, 于是存在一个包含在 $\bar{S}(x_1, r_1)$ 内的闭球 $\bar{S}(x_2, r_2)$, 它不含 $K_2$ 中的点. 设半径 $r_2$ 满足: $0<r_2<\frac{1}{2}$. 依此类推, 我们便得到一个闭球列 $\{\bar{S}(x_n, r_n)\}$ 满足

$$\bar{S}(x_1, r_1)\supset\bar{S}(x_2, r_2)\supset\cdots\supset\bar{S}(x_n, r_n)\supset\cdots,$$

其中 $r_n$ 满足：$0<r_n<\frac{1}{n}$. 因此 $\{r_n\}\to 0$. 再由 $\bar{S}(x_n, r_n)$ 的作法，对每个 $n$，$\bar{S}(x_n, r_n)$ 不含集合 $K_1, K_2, \cdots, K_n$ 中的点. 另一方面，由定理 3.2，存在 $X$ 中的点 $y_0$，它含于所有球 $\bar{S}(x_n, r_n)$ 中. 显然，$y_0$ 不属于任一集合 $K_n$，因此

$$y_0 \overline{\in} \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = X.$$

与 $y_0\in X$ 矛盾. 这个矛盾说明 $X$ 为第二类型的集. 证毕.

### 3.3 距离空间的完备化

我们已经指出，实数域的完备性在古典分析中起着重要作用. 对于一般的距离空间来说，它的完备性同样在很多方面起着重要作用. 例如在 §6 中，我们将看到它在证明方程解的存在性、唯一性以及近似解的收敛性等方面起着重要作用. 在第八章中，我们还将看到它在一系列重要定理如开映射定理、共鸣定理中同样起着重要作用. 但是另一方面，确实存在着许多不完备的距离空间，这一点在前面已经指出. 因此通过一定的途径将非完备的距离空间加以完备化就十分必要了. 这一段的目的就是详细讨论这一问题.

设 $X$、$X_1$ 都是距离空间，如果存在一个由 $X$ 到 $X_1$ 上的映射 $T$，使得对一切 $x, y\in X$ 有

$\rho_1(Tx, Ty)=\rho(x, y)$ （$\rho$、$\rho_1$ 分别表示 $X$、$X_1$ 上的距离），则称 $T$ 是 $X$ 到 $X_1$ 上的等距映射. 如果存在一个由 $X$ 到 $X_1$ 上的等距映射，则称 $X$ 与 $X_1$ 等距.

显然，等距映射一定是同胚映射.

从等距的角度看，如果问题只涉及元素之间的距离，如收敛性、可分性、完备性以及 §4 将要讨论的列紧性等等，那么两个等距的距离空间可以看成是同一的.

**定理 3.5** 对于每个距离空间 $X$，必存在一个完备的距离空间 $X_0$，使得 $X$ 等距于 $X_0$ 中的一个稠密子空间 $X_0'$，除去等距不计外，$X_0$ 还是唯一确定的.

**证** 由于证明较长，我们将它分成五步.

第一步，考察空间 $X$ 中所有可能的基本点列. 对任意两个基本点列 $\{x_n\}$ 和 $\{x_n'\}$，如果满足

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,x_n')=0,$$

就称 $\{x_n\}$ 与 $\{x_n'\}$ 等价，记成 $\{x_n\}\sim\{x_n'\}$. 容易证明这样定义的等价满足等价关系的三个条件：

(i) **自反性** $\{x_n\}\sim\{x_n\}$；

(ii) **对称性** 若 $\{x_n\}\sim\{x_n'\}$，则 $\{x_n'\}\sim\{x_n\}$；

(iii) **传递性** 若 $\{x_n\}\sim\{x_n'\}$，$\{x_n'\}\sim\{x_n''\}$，则 $\{x_n\}\sim\{x_n''\}$.

利用 (i)、(ii)、(iii)，我们可以将距离空间 $X$ 中的一切基本点列分成等价类，彼此等价的基本点列都属于同一类，而每一个基本点列必定属于且只属于某一确定的等价类. 这些等价类用符号 $\xi$、$\eta$ 等表示. 将每个等价类作为一个元素看待，这些元素组成一个新的集合，这个集合用 $X_0$ 表示.

第二步. 在 $X_0$ 中定义距离如下：

$$\rho(\xi,\eta)=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n), \tag{7}$$

其中 $\{x_n\}\in\xi$，$\{y_n\}\in\eta$.

首先应当证明 (7) 式右端的极限存在. 事实上，由于 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 都是基本点列，故

$$\begin{aligned}&|\rho(x_m,y_m)-\rho(x_n,y_n)|\\ \leqslant&|\rho(x_m,y_m)-\rho(x_n,y_m)|+|\rho(x_n,y_m)-\rho(x_n,y_n)|\\ \leqslant&\rho(x_m,x_n)+\rho(y_m,y_n)\to 0\quad(m,n\to\infty),\end{aligned}$$

因此 $\{\rho(x_n,y_n)\}$ 是由实数组成的基本序列，它存在有限的极限.

其次还需证明，如果将$\{x_n\}$、$\{y_n\}$分别换成与它们等价的基本点列，则$\rho(\xi,\eta)$的值不变．事实上，设$\{x'_n\}\sim\{x_n\}$、$\{y'_n\}\sim\{y_n\}$，则

$$\begin{aligned}&|\rho(x_n,y_n)-\rho(x'_n,y'_n)|\\ \leqslant&|\rho(x_n,y_n)-\rho(x'_n,y_n)|+|\rho(x'_n,y_n)-\rho(x'_n,y'_n)|\\ \leqslant&\rho(x_n,x'_n)+\rho(y_n,y'_n)\to 0\quad(n\to\infty),\end{aligned}$$

因此，
$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}\rho(x'_n,y'_n).$$

故 $\rho(\xi,\eta)$的值仅仅依赖于$\xi$、$\eta$而与类$\xi$，$\eta$中的基本点列的选择无关．

再证明$\rho$满足距离公理的三个条件．我们只证明三角不等式，其余的留给读者自己验证．除了上面的$\xi$、$\eta$外，再任取$\zeta\in X_0$，并设$\{z_n\}$为$\zeta$中的任一基本点列，则

$$\begin{aligned}\rho(\xi,\eta)&=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)\leqslant\lim_{n\to\infty}[\rho(x_n,z_n)+\rho(z_n,y_n)]\\&=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,z_n)+\lim_{n\to\infty}\rho(z_n,y_n)=\rho(\xi,\zeta)+\rho(\zeta,\eta),\end{aligned}$$

故三角不等式成立．因此$X_0$按照(7)定义的距离是一个距离空间．

第三步．证明在$X_0$中存在稠密子集$X'_0$，使得$X$与$X'_0$等距．

设$x\in X$，将形如$\{x,x,x,\cdots\}$的点列叫做常驻点列．显然任何一个常驻点列都是基本点列，因此必含在某一等价类中．记含有常驻点列的等价类的全体为$X'_0$．作$X$到$X'_0$的对应：对任一$x\in X$，令$x$对应于$X_0$中含有常驻点列$\{x,x,x,\cdots\}$的等价类$\xi$．由于不同的常驻点列必含在不同的等价类中，故上述对应是一对一的．再由距离$\rho(\xi,\eta)$的定义可以看出$X$与$X'_0$是等距的．

现在证明$X'_0$在$X_0$中稠密．任取$\xi\in X_0$，设$\{x_n\}$是$\xi$中的一个基本点列，则对于任给的$\varepsilon>0$，存在$N$，使得当$n$，$m>N$时，$\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$．令$\xi_n$是包含常驻点列$\{x_n,x_n,x_n,\cdots\}$的等价类，则对

每个 $n(n>N)$,

$$\rho(\xi_n, \xi) = \lim_{m\to\infty} \rho(x_n, x_m) \leqslant \varepsilon. \tag{8}$$

故 $X_0'$ 在 $X_0$ 中稠密.

第四步. 证明 $X_0$ 是完备的距离空间. 设 $\{\xi_n\}$ 是 $X_0$ 中的一基本点列. 因为 $X_0'$ 在 $X_0$ 中稠密, 故对每个 $\xi_n$, 存在 $\eta_n \in X_0'$, 使

$$\rho(\xi_n, \eta_n) < \frac{1}{n}, \tag{9}$$

在 $\eta_n$ 中取常驻点列 $\{y_n, y_n, y_n, \cdots\}$, 则

$$\begin{aligned}\rho(y_n, y_m) = \rho(\eta_n, \eta_m) &\leqslant \rho(\eta_n, \xi_n) + \rho(\xi_n, \xi_m) + \rho(\xi_m, \eta_m) \\ &< \frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \rho(\xi_n, \xi_m) \to 0 \quad (m, n\to\infty).\end{aligned}$$

故 $\{y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots\}$ 是 $X$ 中的基本点列, 因此它必属于某个等价类 $\eta$. 再由

$$\rho(\xi_n, \eta) \leqslant \rho(\xi_n, \eta_n) + \rho(\eta_n, \eta) < \frac{1}{n} + \rho(\eta_n, \eta)$$

并将证明(8)的方法应用于 $\rho(\eta_n, \eta)$ 可知, $\rho(\eta_n, \eta)\to 0$, 于是 $\rho(\xi_n, \eta)\to 0$. 故 $X_0$ 完备.

至此定理的第一部分证完. 我们称 $X_0$ 为 $X$ 的完备化空间.

第五步. 证明 $X$ 的完备化空间 $X_0$ 除了等距不计外是唯一确定的. 设 $Y_0$ 是 $X$ 的另一个完备化空间(即 $X$ 等距于完备距离空间 $Y_0$ 的一个稠密子空间). 我们将 $X$ 视为 $X_0$ 的子空间也视为 $Y_0$ 的子空间. 因为 $X$ 在 $X_0$ 中稠密, 故对每个 $x \in X_0$, 必有 $x_n \in X$, 使 $\rho(x_n, x)\to 0$, 所以 $\{x_n\}$ 是 $X$ 中的基本点列, 于是也是 $Y_0$ 中的基本点列, 故在 $Y_0$ 中必收敛于某个点 $y$, 而且当 $x$ 给定时, $y$ 是唯一确定的且与 $\{x_n\}$ 的取法无关. 作 $X_0$ 到 $Y_0$ 的映射 $T: Tx = y$. 今证 $T$ 是满映射. 任取 $y' \in Y_0$, 则有 $x_n' \in X$ 使 $\rho(x_n', y')\to 0$, 因此 $\{x_n'\}$ 是 $X$ 中的因而也是 $X_0$ 中的基本点列, 故 $\{x_n'\}$ 在 $X_0$ 中收敛于某个

点 $x'$. 根据$T$的定义,$y'$ 是 $x'$ 在$T$作用下的象,即$Tx'=y'$. 故$T$是满映射. 再由

$$\rho(Tx, Tx')=\rho(y, y')=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n, x_n')=\rho(x, x')$$

可知,$T$ 是等距的(因而是一对一的). 故 $X_0$ 与 $Y_0$ 等距. 证毕

**例 9** 1° **$\tilde{l}^p$ 的完备化空间** 设 $\tilde{l}^p$ 是由所有形如$\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k, 0, 0, \cdots\}$的序列构成的集,其中 $\xi_j$ 为实(或复)数,$k$ 为任意的自然数. 按照 $l^p$ 的距离,$\tilde{l}^p$ 是 $l^p$ 的子空间,但不完备. 例如序列

$$x_1=\{1, 0, 0, \cdots\},\ x_2=\left\{1, \frac{1}{2}, 0, 0, \cdots\cdots\right\},$$

$$\cdots\cdots,\ x_n=\left\{1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{2^{n-1}}, 0, \cdots\right\}, \cdots$$

是$\tilde{l}^p$中的基本列,但在 $\tilde{l}^p$ 中无极限.

显然 $\tilde{l}^p$ 在 $l^p$ 中稠密而 $l^p$ 完备,故 $l^p$ 是 $\tilde{l}^p$ 的完备化空间.

2° 令$P$表示所有多项式构成的集. 按照 $C[a, b]$的距离, $P$ 是 $C[a, b]$的子空间,但$P$不完备. 例如序列

$$p_1(t)=1,\ p_2(t)=1+\frac{1}{2}t, \cdots,$$

$$p_n(t)=1+\frac{1}{2}t+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}t^{n-1}, \cdots$$

是$P$中的基本列,但在$P$中无极限.

因$P$在$C[a, b]$中稠密且$C[a, b]$完备, 故$C[a, b]$是$P$的完备化空间.

3° $C[a, b]$按照 $L^2[a, b]$中的距离在 $L^2[a, b]$中稠密,因 $L^2[a, b]$是完备的,故 $L^2[a, b]$是 $C[a, b]$的完备化空间(按照 $L^2[a, b]$的距离).

在这一节中,我们引进了空间的完备性、第一、第二类型的集,最后还讨论了空间的完备化. 希望读者注意:

1° 与 § 2 的情形一样, 所有这些概念都离不开预先定义的

距离．因此，若在一个非空集合$X$上定义了两个或两个以上的距离，则$X$按照其中一个距离可以是完备的，而按照其余的距离是不完备的，对于第一、第二类型的集，也有类似的情形；

2° 完备与不完备的距离空间都是存在的；

3° 任何一个不完备的距离空间都可以完备化，而且除了等距不计外，完备化空间是唯一的．今后我们总是将非完备的距离空间看成是它的完备化空间的子空间．

4° 任何完备的距离空间必是第二类型的集．而非完备的距离空间可以是第一类型的集也可以是第二类型的集．

## §4 列紧集及紧集

### 4.1 列紧集及紧集的概念

我们已多次强调，实数域的一个重要特性是它的完备性．这一特性有几个等价命题．例如§3.2提到的区间套定理便是其中之一，而且区间套定理在完备的距离空间中有相应的推广——闭球套定理．实数域完备性的另一个等价命题是实数域中的每一有界无限集至少有一个聚点，这就是所谓实数域中有界无限集的列紧性．

但是在一般的距离空间中即使是完备的距离空间中，并非每一个有界无限集都有聚点．这说明，一般的距离空间远比实数域复杂．在本节中，我们将在一般的距离空间中引进列紧集及紧集的基本概念并研究它们的一些基本特性．所讨论的集合可以是有限集也可以是无限集．现在先引进有界集的概念．

**定义 4.1** 距离空间$X$中的子集$A$称为有界，如果$A$包含在$X$中的某个闭球或开球内．

容易证明，距离空间$X$中的任何收敛点列及任何基本点列都

是有界的.

**定义 4.2** 设 $A$ 是距离空间 $X$ 的子集. 如果 $A$ 中的每个点列都含有子列收敛于 $X$ 中的某一点，则称 $A$ 为列紧的. 如果 $A$ 中的每个点列都含有子列收敛于 $A$ 中的某一点，则称 $A$ 为紧的. 如果空间 $X$ 自身是紧的,则称 $X$ 是紧距离空间.

**例 1** 1° 设 $X=\mathbf{R}$,则 $X$ 非紧. 因为点列 $\{n\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 不含任何收敛子列.

2° 若 $X=\mathbf{R}$, $G=(a,b)$,其中 $a$、$b$ 均为实数且 $a<b$,则 $G$ 为 $X$ 中的列紧集.

3° 若 $X=\mathbf{R}$, $F=[a,b]$,其中 $a$、$b$ 也为实数且 $a<b$,则 $F$ 为 $X$ 中的紧集.

**例 2** $L^2[-\pi,\pi]$ 中的三角函数系

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t,\cdots,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt,\cdots\right\}$$

是有界的,但其中任意两个元素间的距离都等于 $\sqrt{2}$,故不可能存在收敛的子列,因此不是列紧集.

由定义 4.2 可知,任何有限集都是紧的.

### 4.2 列紧集及全有界集

与列紧集密切关联的是全有界集. 利用全有界集，我们可以给出距离空间中列紧集的一个判别准则.

**定义 4.3** 设 $X$ 为距离空间, $A$、$B$ 都是 $X$ 的子集, $\varepsilon$ 为一给定的正数. 如果对于 $A$ 中的任一点 $x$,都有 $B$ 中的一点 $x'$ 使 $\rho(x,x')<\varepsilon$,则称 $B$ 是 $A$ 的一个 $\varepsilon$-网.

例如平面上坐标为整数的一切点组成的集合是平面的一个 1-网. 又如对任给的 $\varepsilon>0$, 距离空间 $X$ 的任一稠密子集必定是它的 $\varepsilon$-网.

根据 $\varepsilon$-网的定义,所谓 $B$ 为 $A$ 的 $\varepsilon$-网，实际上是指 $A$ 的任一

点 $x$ 必含在 $B$ 的某一点 $x'$ 的邻域 $S(x',\varepsilon)$ 中，或者说，以 $B$ 中的点为中心、以 $\varepsilon$ 为半径的所有开球的并包含 $A$.

还应该注意，在定义中并不要求 $B$ 包含在 $A$ 中.

**定义 4.4** 设 $A$ 是距离空间 $X$ 的子集. 如果对于任给的 $\varepsilon>0$，$A$ 总存在有限的 $\varepsilon$-网，则称 $A$ 是全有界的.

全有界集具有下列性质：

1° 全有界集的子集也是全有界的；

显然成立.

2° 设 $A$ 为全有界集，则对任给的 $\varepsilon>0$，我们可以取 $A$ 的一个有限子集作为 $A$ 的 $\varepsilon$-网.

事实上，由于 $A\subset X$ 全有界，对于任给的 $\varepsilon>0$，$A$ 有有限的 $\frac{\varepsilon}{2}$-网 $\{x_1,x_2,\cdots,x_{n_0}\}$，其中 $x_1,x_2,\cdots,x_{n_0}$ 都是距离空间 $X$ 中的点. 不妨设对每个 $k=1,2,\cdots,n_0$, $A\cap S\left(x_k,\frac{\varepsilon}{2}\right)$ 不是空集. 否则，若存在某个 $k_0$ 使 $A\cap S\left(x_{k_0},\frac{\varepsilon}{2}\right)=\varnothing$，将点 $x_{k_0}$ 除去好了. 任取 $\bar{x}_k\in A\cap S\left(x_k,\frac{\varepsilon}{2}\right)(k=1,2,\cdots,n_0)$，则 $\{\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_{n_0}\}$ 包含在 $A$ 中且为 $A$ 的一个有限 $\varepsilon$-网.

**定理 4.1 全有界集是有界的、可分的.**

**证** 设 $X$ 是给定的距离空间，$A\subset X$ 全有界. 于是可设 $B=\{x_1,x_2,\cdots,x_{n_0}\}$ 是 $A$ 的一个 1-网，因此对任一 $x\in A$，有 $x_k\in B(1\leqslant k\leqslant n_0)$ 使

$$\rho(x,x_k)<1.$$

故

$$\begin{aligned}\rho(x,x_{n_0})&\leqslant\rho(x,x_k)+\rho(x_k,x_{n_0})\\&<1+\max_{1\leqslant k\leqslant n_0}\rho(x_k,x_{n_0})-1+K,\end{aligned}$$

其中 $K=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n_0}\rho(x_k,x_{n_0})$. $K$ 是有限数，故 $A$ 有界.

其次，设 $B_n$ 是 $A$ 的有限 $\frac{1}{n}$-网，这里 $n=1,2,3,\cdots$. 因每个 $B_n$ 都是有限集，令

$$B=\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n,$$

则 $B$ 是可列集. 任取 $x\in A$，存在 $x_n\in B_n$，使 $\rho(x,x_n)<\frac{1}{n}$，故 $B$ 中的点列 $\{x_n\}$ 收敛于 $x$. 根据稠密性概念的第三个等价说法（定义 2.4之后），可知 $B$ 在 $A$ 中稠密，故 $A$ 可分. 证毕.

设 $A$ 是距离空间 $X$ 的子集，称 $\sup\limits_{x,y\in A}\rho(x,y)$ 为 $A$ 的直径. 根据这一定义，$X$ 中的开球 $S(x_0,r_0)$ 及闭球 $\overline{S(x_0,r_0)}$ 的直径都不会大于 $2r_0$.

**定理 4.2 设距离空间 $X$ 的子集 $A$ 是列紧的，则 $A$ 是全有界的. 若 $X$ 是完备的距离空间，则当 $A$ 是全有界集时，$A$ 必定是列紧的，因此在完备的距离空间中，列紧性与全有界性等价.**

**证** 证明分两部分.

(1) 设 $A$ 为距离空间 $X$ 中的列紧集. 如果 $A$ 不是全有界的，则必存在某一 $\varepsilon_0>0$，使得 $A$ 没有有限的 $\varepsilon_0$ 网. 于是对任一 $x_1\in A$，必存在 $x_2\in A$ 使 $\rho(x_1,x_2)\geqslant\varepsilon_0$，否则 $\{x_1\}$ 就是 $A$ 的一个有限 $\varepsilon_0$-网. 同理，存在 $x_3\in A$ 使 $\rho(x_i,x_3)\geqslant\varepsilon_0(i=1,2)$，否则 $\{x_1,x_2\}$ 就是 $A$ 的一个有限 $\varepsilon_0$-网. 这个步骤可以一直进行下去. 于是我们得到了一个点列 $\{x_n\}$ 使得当 $m\neq n$ 时，$\rho(x_m,x_n)\geqslant\varepsilon_0$. $\{x_n\}$ 显然没有收敛的子列，与 $A$ 的列紧性矛盾. 这个矛盾说明 $A$ 为全有界的.

(2) 设 $X$ 为完备的距离空间，$A\subset X$ 为全有界集. 任取 $A$ 中的一个点列 $\{x_n\}$. 如果 $\{x_n\}$ 中只有有限个互不相同的元素，则 $\{x_n\}$ 显然含有收敛的子列. 因此可设 $\{x_n\}$ 中有无限多个互不相同的元素，记这些元素构成的集合为 $B_0$. 由定义 4.4 后面的性质 1°，$B_0$

是全有界的，于是$X$中存在有限个以$\frac{1}{2}$为半径的开球使得这些开球的并包含了$B_0$. 因此它们中至少有一个开球包含了$B_0$中无限多个元素，这些元素构成的集合记为$B_1$. $B_1$是$B_0$的子集且$B_1$的直径不大于1. $B_1$本身也是全有界的，将以上的论证应用于$B_1$，则存在$B_1$的子集$B_2$，使$B_2$中含有$B_1$中无限多个元素且$B_2$的直径不大于$\frac{1}{2}$. 依此类推，我们可以找到一系列的集合$B_1, B_2, \cdots, B_k, \cdots$满足如下的条件：

$$B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_k \supset \cdots;$$

$B_k$的直径不大于$\frac{1}{2^{k-1}}$；每个$B_k$均含有$B_{k-1}$中无限多个元素. 注意到每个$B_k$中的所有元素都是$\{x_n\}$中的某些项，对于$k=1$，可取$\{x_n\}$中的一项$x_{n_1}$使$x_{n_1} \in B_1$. 对于$k=2$，可取$\{x_n\}$中的某一项$x_{n_2}$使$x_{n_2} \in B_2$且可设$n_1 < n_2$. 依此类推，便得到$\{x_n\}$的一个子列$\{x_{n_k}\}$使$x_{n_k} \in B_k$. 根据$B_k$的性质，$\{x_{n_k}\}$是基本点列. 因$X$完备，故$\{x_{n_k}\}$在$X$中收敛，于是$A$列紧. 证毕.

**推论** **距离空间$X$中的列紧集是有界的、可分的，特别地，紧集是有界的、可分的.**

**证** 由定理4.1及定理4.2导出.

**定理4.3** **设$X$为完备的距离空间，则$A \subset X$为列紧集的充分必要条件是对任给的$\varepsilon > 0$，$A$有列紧的$\varepsilon$-网.**

**证** 必要性是显然的. 因为当$A$列紧时，$A$自身便是它的一个列紧$\varepsilon$-网. 反之，设对任给的$\varepsilon > 0$，$A$有列紧的$\varepsilon$-网$B$. 因$B$列紧，故有有限的$\varepsilon$-网$C$. $C$显然是$A$的一个有限$2\varepsilon$-网，因此$A$列紧.

### 4.3 紧集

在这一段中，我们讨论紧集的几个性质以及紧集的一个判别

准则.

**定理 4.4** **任一距离空间中的紧集本身是完备的距离空间，特别地，紧空间是完备的.**

**证** 设 $F$ 是距离空间 $X$ 中的紧集，$\{x_n\}$ 是 $F$ 中的一个基本点列. 由 $F$ 的紧性，$\{x_n\}$ 中有收敛于 $F$ 中某一点 $x_0$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$. 再由不等式

$$\rho(x_n, x_0) \leqslant \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x_0)$$

以及当 $n$ 及 $k$ 趋于无穷大时，$\rho(x_n, x_{n_k}) \to 0$，$\rho(x_{n_k}, x_0) \to 0$，可知 $\{x_n\} \to x_0$ 故 $F$ 完备. 证毕.

**定理 4.5** **设 $\{K_n\}$ 为距离空间 $X$ 中的一非空紧集序列，满足**

$$K_1 \supset K_2 \supset \cdots \supset K_n \supset \cdots,$$

**则它们的交 $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ 非空.**

**证** 在每个 $K_n$ 中任取一点 $x_n$，于是得到点列 $\{x_n\}$. 因 $K_1$ 是紧的，点列 $\{x_n\}$ 中存在子列 $\{x_{n_k}\}$ 在 $K_1$ 中收敛于某一点 $x_0$. 对每个给定的 $n$，当 $n_k \geqslant n$ 时，$x_{n_k} \in K_n$. 由于 $K_n$ 闭，故 $x_0 \in K_n$ 因此 $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$，这说明交 $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ 非空. 证毕.

现在讨论紧集的一个判别准则. 大家知道，实数域完备性的另一个等价条件是 Borel 有限覆盖定理. 这一定理对一般距离空间中的有界闭集未必成立，但却是刻划紧集的一个重要准则.

**定义 4.5** 设 $X$ 为距离空间，$A$ 为 $X$ 的子集，$\{G_c\}_{c \in J}$ 是 $X$ 中某些开集组成的族. 如果

$$A \subset \bigcup_{c \in J} G_c,$$

则称 $\{G_c\}_{c \in J}$ 为 $A$ 的一个开覆盖. 如果 $J$ 是有限集，则称 $\{G_c\}_{c \in J}$ 为 $A$ 的一个有限开覆盖.

**定理 4.6** **距离空间 $X$ 的子集 $A$ 为紧集的充分必要条件是在 $A$ 的任一开覆盖中必可选出一有限子覆盖.**

证 必要性. 设 $A$ 为紧集, 并设 $\{G_c\}_{c\in J}$ 是 $A$ 的一个开覆盖. 我们先证明存在 $\varepsilon_0>0$ 使得对一切 $x\in A$, 开球 $S(x,\varepsilon_0)$ 必包含在某个 $G_c$ 中. 设不然, 则对每个自然数 $n$, 存在 $x_n\in A$, 使得开球 $S\left(x_n,\frac{1}{2^n}\right)$ 不包含在任何 $G_c$ 中. 由于 $A$ 紧, 故 $\{x_n\}$ 中有收敛于 $A$ 中某一点 $x_0$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$. 又由于 $\{G_c\}_{c\in J}$ 覆盖 $A$, 故存在 $G_{c_0}$ 使 $x_0\in G_{c_0}$. 于是存在开球 $S(x_0, r_0)$ 使 $S(x_0,r_0)\subset G_{c_0}$. 再取 $k$ 充分大使 $S\left(x_{n_k},\frac{1}{2^{n_k}}\right)\subset S(x_0,r_0)$. 故 $S\left(x_{n_k},\frac{1}{2^{n_k}}\right)\subset G_{c_0}$, 与假设矛盾. 因此确实存在 $\varepsilon_0>0$ 使得对一切 $x\in A$, 开球 $S(x,\varepsilon_0)$ 必包含在某个 $G_c$ 中. 因 $A$ 为紧集, 由定理 4.2, $A$ 全有界. 故从诸 $S(x,\varepsilon_0)$ 中可取出有限个设为 $S(x_1,\varepsilon_0)$, $S(x_2,\varepsilon_0)$, $\cdots$, $S(x_l,\varepsilon_0)$ 使 $\{S(x_j,\varepsilon_0)\}_{j=1}^{l}$ 覆盖 $A$. 将 $\{G_c\}_{c\in J}$ 中包含 $S(x_j,\varepsilon_0)$ 的开集中随便取出一个并记为 $G_j(j=1,2,\cdots,l)$. 于是 $\{G_j\}$ $(j=1,2,\cdots,l)$ 覆盖 $A$. 必要性证毕.

充分性. 设定理的条件成立, 并设 $\{x_n\}$ 是包含在 $A$ 中的一个点列. 如果 $\{x_n\}$ 中没有子列在 $A$ 中收敛, 则对每个 $y\in A$, 存在 $\delta_y>0$ 以及自然数 $n_y$ 使得当 $n\geqslant n_y$ 时, $x_n\notin S(y,\delta_y)$. 显然 $\{S(y,\delta_y): y\in A\}$ 覆盖 $A$. 于是存在 $y_1,y_2,\cdots,y_l\in A$ 使 $\{S(y_j,\delta_{y_j})\}_{j=1}^{l}$ 覆盖 $A$. 另一方面, 当 $n\geqslant\max\{n_{y_1},n_{y_2},\cdots,n_{y_l}\}$ 时, $x_n$ 不属于任何 $S(y_j,\delta_{y_j})$, 因此 $x_n$ 不属于 $A$. 与 $\{x_n\}\subset A$ 矛盾. 这表明 $\{x_n\}$ 必有子列在 $A$ 中收敛, 故 $A$ 为紧集. 证毕.

定理 4.6 又称为有限覆盖定理.

**定义 4.6** 设 $\{F_c\}_{c\in J}$ 是距离空间 $X$ 中的一个集族. 如果其中任一有限子族具有非空的交, 则称族 $\{F_c\}_{c\in J}$ 具有有限交性质.

**定理 4.7** **距离空间 $X$ 的闭子集 $A$ 为紧集的充分必要条件是**

**$A$ 中的每个具有有限交性质的闭子集族 $\{F_c\}_{c\in J}$ 有非空的交.**

**证** 必要性. 设 $A$ 为紧集, $\{F_c\}_{c\in J}$ 为集 $A$ 的一闭子集族, 具有有限交性质. 假定这个族的交是空集. 令 $G_c = X\setminus F_c$, 则 $\{G_c\}_{c\in J}$ 为开集族. 由

$$\bigcup_{c\in J} G_c = \bigcup_{c\in J}(X\setminus F_c) = X\setminus \bigcap_{c\in J} F_c = X$$

可知, $\{G_c\}_{c\in J}$ 覆盖 $A$. $A$ 是紧集, 由定理 4.6, 从 $\{G_c\}_{c\in J}$ 中可选出有限子族 $\{G_{c_j}\}_{j=1}^{l}$ 覆盖 $A$. 于是

$$\bigcap_{j=1}^{l} F_{c_j} = \bigcap_{j=1}^{l}(X\setminus G_{c_j}) = X\setminus \bigcup_{j=1}^{l} G_{c_j}$$

$$\subset X\setminus A.$$

另一方面, 每个 $F_{c_j}$ 均为 $A$ 的子集, 故 $\bigcap_{j=1}^{l} F_{c_j}\subset A$. 于是 $\bigcap_{j=1}^{l} F_{c_j}\subset (X\setminus A)\cap A = \varnothing$. 这与 $\{F_c\}_{c\in J}$ 具有有限交性质矛盾. 必要性成立.

充分性. 设闭集 $A$ 的任一具有有限交性质的闭子集族具有非空的交, 我们证明从 $A$ 的任一开覆盖中可取出一有限子族覆盖 $A$. 设 $\{G_c\}_{c\in J}$ 为 $A$ 的一个开覆盖. 令 $F_c = A\setminus G_c$, 因 $A$ 是闭集, 故 $F_c$ 也是闭集. 由

$$\bigcap_{c\in J} F_c = \bigcap_{c\in J}(A\setminus G_c) = A\setminus \bigcup_{c\in J} G_c = \varnothing$$

可知, $A$ 的闭子集族 $\{F_c\}_{c\in J}$ 不具有有限交性质. 如若不然, 由假设可知, $\bigcap_{c\in J} F_c \neq \varnothing$, 矛盾. 故 $\{F_c\}_{c\in J}$ 不具有有限交性质. 于是存在有限子族 $\{F_{c_j}\}_{j=1}^{l}$ 使得

$$\bigcap_{j=1}^{l} F_{c_j} = \varnothing.$$

对应的开集族$\{G_{c_j}\}_{j=1}^{l}$则满足

$$\bigcup_{j=1}^{l} G_{c_j} \supset \bigcup_{j=1}^{l} (A \setminus F_{c_j}) = A \setminus \bigcap_{j=1}^{l} F_{c_j} = A.$$

这表明从$\{G_c\}_{c \in J}$中确实可取出一个有限子族$\{G_{c_j}\}_{j=1}^{l}$覆盖$A$. 因$\{G_c\}_{c \in J}$是$A$的任一开覆盖，由定理 4.6, $A$是紧的. 证毕.

**4.4 紧集上的连续函数**

现在我们将古典分析中闭区间上连续函数的某些性质推广到一般的紧集上.

**定理 4.8** **设$X$、$Y$为距离空间，$A$为$X$中的紧集，$T$是由$A$到$Y$中的连续映射，则$T$的像$T(A)$是$Y$中的紧集.**

**证** 设$\{y_n\}$为$T(A)$中的一个点列. 则有$A$中的点列$\{x_n\}$使得$y_n = T(x_n)$ $(n=1,2,3,\cdots)$. 由于$A$是紧集，故$\{x_n\}$中有收敛于$A$中某一点$x_0$的子列$\{x_{n_k}\}$. 又因$T$连续，故

$$\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim_{k\to\infty} T(x_{n_k}) = T(x_0).$$

显然，$T(x_0) \in T(A)$. 故$T(A)$是紧集. 证毕.

**推论 1** **设定理 4.8 中的全部条件满足，则$T$在$A$上是一致连续的，即对任给的$\varepsilon>0$，存在仅与$\varepsilon$有关的$\delta>0$，使得对任意的$x$、$y \in A$，当$\rho(x,y)<\delta$时，$\rho_1(Tx,Ty)<\varepsilon$，这里$\rho$、$\rho_1$分别是$X$、$Y$上的距离.**

**证** 用反证法. 设$T$不一致连续，则存在$\varepsilon_0>0$以及点列$\{x_n\}$、$\{y_n\} \subset A$使

$$\rho(x_n, y_n) \to 0, \ \rho_1(Tx_n, Ty_n) \geqslant \varepsilon_0. \tag{1}$$

因$A$是紧集，故$\{x_n\}$含有收敛于$A$中某一点$x_0$的子列$\{x_{n_k}\}$. 由$\rho(y_{n_k}, x_0) \leqslant \rho(y_{n_k}, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x_0)$以及(1)中第一式可知，$\rho(y_{n_k}, x_0) \to 0$. 再由$T$的连续性，当$k\to\infty$时，

$$\rho(Tx_{n_k}, Ty_{n_k}) \leqslant \rho(Tx_{n_k}, Tx_0) + \rho(Ty_{n_k}, Tx_0) \to 0.$$

但由(1)的第二式,对一切 $k$,却有

$$\rho(Tx_{n_k},\ Ty_{n_k})\geqslant\varepsilon_0.$$

矛盾,故 $T$ 一致连续. 证毕.

**推论 2** **设 $X$ 是距离空间, $A$ 是 $X$ 中的紧集, $f$ 是定义在 $A$ 上的连续函数,则 $f$ 有界且可达到其上、下确界.**

**证** 因为 $f(A)$ 是 $\mathbb{R}$ 中的紧集, 故为有界闭集. 于是 $f$ 有界且其上、下确界均属于 $f(A)$,就是说 $f$ 能达到其上、下确界. 证毕.

在这一节中,我们引进了以下三个概念:列紧性、紧性、全有界性, 并研究了它们的若干性质. 然后又引进了开覆盖及有限交性质两个概念. 希望读者注意:

1° 与前几节的情形一样, 所有这些概念都离不开预先定义的距离, 因此在一个非空集合 $X$ 上如果定义了两个或两个以上的距离, 则 $X$ 的子集按照其中一个距离可能是紧集, 而按照其余的距离可能不再是紧集,如此等等;

2° 在一般的距离空间中,紧性强于列紧性,列紧性强于全有界性. 在完备的距离空间中列紧性与全有界性等价;

3° 开覆盖及有限交性质可以用来刻划紧性.

## §5 某些具体空间中集合列紧性的判别法

在这一节中, 我们介绍几个具体的距离空间中集合列紧性的判别法. 由于这些空间都具有各自的特点, 因此在这些空间中集合的列紧性就会出现带有自身特点的新情况. 我们的目的便是研究这些新情况.

**例 1** **空间 $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ 中的任何有界集都是列紧的**

设 $A$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的有界集. 任取 $A$ 中的点列 $\{x^{(m)}\}$, 我们证明从 $\{x^{(m)}\}$ 中可取出收敛的子列. 设 $x^{(m)}=(\xi_1^{(m)},\ \xi_2^{(m)},\ \cdots,\ \xi_n^{(m)})$,

则$\{\xi_1^{(m)}\}$是有界的，由古典分析中的 Bolzano-Weierstrass 定理，它存在收敛的子序列，记为$\{\xi_1^{(m_1)}\}$，这里$\{m_1\}$为一部分自然数组成的序列. 显然$\{\xi_2^{(m_1)}\}$是有界的，故又存在收敛子序列，记为$\{\xi_2^{(m_2)}\}$，此处$\{m_2\}$是$\{m_1\}$的子序列. 于是$\{\xi_1^{(m_2)}\}$，$\{\xi_2^{(m_2)}\}$都是收敛的. 依此类推，我们可以找到由一部分自然数组成的序列$\{m_n\}$，使$\{\xi_1^{(m_n)}\}$，$\{\xi_2^{(m_n)}\}$，…，$\{\xi_n^{(m_n)}\}$都收敛，故$\{x^{(m_n)}\}$在$\mathbb{R}^n$中收敛. 于是$A$是列紧的. 同理，在$\mathbb{C}^n$中，任何有界集都是列紧的.

因此为了判别$\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$中的集合是否列紧，只需判别它是否有界.

**例2　空间$C[a,b]$中集合列紧性的条件**

**定理5.1　集合$A\subset C[a,b]$列紧的充分必要条件是下列两条件成立：**

(i) **集合$A$是有界的，即存在常数$K$，使对一切$x\in A$，有**$|x(t)|\leqslant K\ (t\in[a,b])$；

(ii) **集合$A$是等度连续的，即对任给的**$\varepsilon>0$，**存在**$\delta=\delta(\varepsilon)>0$，**使得对任意的**$t'$、$t''\in[a,b]$，**只要**$|t'-t''|<\delta$，**就有**

$$|x(t')-x(t'')|<\varepsilon$$

**对一切**$x\in A$**成立.**

**证**　必要性　设$A$是列紧集，由定理4.2的推论，$A$有界，故(i)成立.

现在证明$A$的等度连续性. 任给$\varepsilon>0$，由于$A$列紧，故存在有限的$\frac{\varepsilon}{3}$-网$\{x_j\}_{j=1}^{n_0}$. 因为$x_j(t)\ (j=1,2,\cdots,n_0)$在$[a,b]$上连续，故必一致连续. 又因为$x_j(t)\ (j=1,2,\cdots,n_0)$共有有限个，因此对于上述$\varepsilon$，存在$\delta=\delta(\varepsilon)>0$，只要$|t'-t''|<\delta$，$(t',t''\in[a,b])$，就有

$$|x_j(t')-x_j(t'')|<\frac{\varepsilon}{3},$$

对于 $j=1,2,\cdots,n_0$ 同时成立. 任取 $x\in A$, 因 $\{x_j\}_{j=1}^{n_0}$ 是 $A$ 的 $\frac{\varepsilon}{3}$-网, 存在某个 $x_{j_0}(1\leqslant j_0\leqslant n_0)$ 使 $\rho(x,x_{j_0})<\frac{\varepsilon}{3}$. 因此

$$|x(t)-x_{j_0}(t)|<\frac{\varepsilon}{3}\quad(t\in[a,b]).$$

于是当 $|t'-t''|<\delta$ 时,

$$|x(t')-x(t'')|\leqslant|x(t')-x_{j_0}(t')|+|x_{j_0}(t')-x_{j_0}(t'')|$$
$$+|x_{j_0}(t'')-x(t'')|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

$\varepsilon$ 是任给的,而 $\delta=\delta(\varepsilon)$ 又只依赖于 $\varepsilon$,故 $A$ 等度连续.

充分性 设 $A$ 有界且等度连续. 根据等度连续性的含义, 对于任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 对于 $[a,b]$ 中的任意两点 $t'$、$t''$, 只要 $|t'-t''|<\delta$ 就有

$$|x(t')-x(t'')|<\frac{\varepsilon}{3}\tag{1}$$

对一切 $x\in A$ 成立. 取自然数 $n$ 使 $\frac{b-a}{n}<\delta$, 再将 $[a,b]$ 分成 $n$ 等份,分点为 $t_0=a<t_1<t_2<\cdots<t_n=b$,这时只要 $t'$, $t''$ 同时属于某个区间 $[t_k,t_{k+1}]$,就有不等式(1)成立.

作 $n+1$ 维Euclid 空间 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的点集:

$$\hat{A}=\{(x(t_0),x(t_1),\cdots,x(t_n)):x\in A\}.$$

由于 $A$ 有界, 故 $\hat{A}$ 在 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中有界. 由例 1, $\hat{A}$ 在 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中列紧. 故存在点 $x_1,x_2,\cdots,x_k\in A$ 使得点集

$$\{(x_j(t_0),x_j(t_1),\cdots,x_j(t_n))\}_{j=1}^{k}$$

组成 $\hat{A}$ 的 $\frac{\varepsilon}{3}$-网. 现在证明集合 $\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$ 组成 $A$ 的一个 $\varepsilon$-网. 任取 $x\in A$, 则点 $(x(t_0),x(t_1),\cdots,x(t_n))\in\hat{A}$, 于是存在 $j_0$ $(1\leqslant j_0\leqslant k)$ 使

$$\left(\sum_{i=0}^{n}|x(t_i)-x_{j_0}(t_i)|^2\right)^{1/2}<\frac{\varepsilon}{3}.$$

因此对每个 $i$，有$|x(t_i)-x_{j_0}(t_i)|<\frac{\varepsilon}{3}$. 今任取 $t\in[a,b]$,则存在某个 $i$ 使 $t\in[t_i,t_{i+1}]$，于是

$$
\begin{aligned}
|x(t)-x_{j_0}(t)| &\leqslant |x(t)-x(t_i)|+|x(t_i)-x_{j_0}(t_i)| \\
&+|x_{j_0}(t_i)-x_{j_0}(t)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.
\end{aligned}
$$

故 $\rho(x,x_{j_0})<\varepsilon$,这表明$\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$确为 $A$ 的 $\varepsilon$-网. 所以 $A$ 列紧. 证毕.

定理 5.1 的充分性部分称为 Arzela-Ascoli 定理.

**例 3　空间 $L^p[a,b]$($1<p<+\infty$)中集合 $A$ 列紧性的条件**

我们先作一些准备工作. 对于任意的 $x\in L^p[a,b]$，作相应的函数 $x_h(t)$:

$$
x_h(t)=\frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h}x(s)ds \quad (t\in[a,b],h>0).
$$

右端的积分用到函数 $x(t)$在$[a,b]$之外的值. 为此，我们规定当 $t\overline{\in}[a,b]$时，$x(t)=0$. $x_h(t)$显然在$[a,b]$上连续，故 $x_h\in L^p[a,b]$. 现在证明

$$
\int_a^b|x_h(t)|^pdt\leqslant\int_a^b|x(t)|^pdt. \tag{2}
$$

设 $q$ 是 $p$ 的相伴数,则

$$
\begin{aligned}
\int_a^b|x_h(t)|^pdt &\leqslant\int_a^b\left(\frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h}|x(s)|ds\right)^pdt \\
&\leqslant\int_a^b\frac{1}{(2h)^p}\left(\int_{t-h}^{t+h}ds\right)^{\frac{p}{q}}\left(\int_{t-h}^{t+h}|x(s)|^pds\right)dt \\
&=\frac{1}{2h}\int_a^b\left(\int_{t-h}^{t+h}|x(s)|^pds\right)dt \\
&=\frac{1}{2h}\int_a^b\left(\int_{-h}^{h}|x(t+s)|^pds\right)dt
\end{aligned}
$$

$$=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\left(\int_a^b |x(t+s)|^p dt\right)ds$$

$$\leqslant\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)ds=\int_a^b |x(t)|^p dt.$$

故(2)成立. 在(2)中,将 $x(t)$ 换成 $x(t)-y(t)$, $x_h(t)$ 换成 $x_h(t)-y_h(t)$,则有

$$\int_a^b |x_h(t)-y_h(t)|^p dt\leqslant\int_a^b |x(t)-y(t)|^p dt,$$

或者

$$\rho(x_h, y_h)\leqslant\rho(x, y), \tag{3}$$

这里 $\rho(x,y)=\left(\int_a^b |x(t)-y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$.

有了以上的准备,现在可以证明

**定理 5.2 空间 $L^p[a, b]$($1<p<+\infty$)中集合 $A$ 列紧的充分必要条件是下列两条件满足:**

**(i) $A$ 是有界的,即存在常数 $K>0$,使对任意的 $x\in A$,有**

$$\int_a^b |x(t)|^p dt\leqslant K^p;$$

**(ii) 对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$,只要 $0<h<\delta$,就有**

$$\rho(x_h, x)=\left(\int_a^b |x_h(t)-x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon$$

**对一切 $x\in A$ 成立.**

**证** 必要性 $A$ 的有界性显然. 现在证明条件(ii). 根据 $A$ 为列紧集的假定,对于任给的 $\varepsilon>0$, $A$ 有有限的 $\frac{\varepsilon}{3}$-网 $B$. 由于对每个函数 $x\in L^p[a, b]$, 可以找到连续函数 $\varphi(t)$ 使得 $\varphi$ 与 $x$ 在 $L^p[a, b]$ 的距离意义下任意地接近, 并且 $\varphi(t)$ 可以取成满足条件 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$, 后面这个条件在于使得 $\varphi(t)$ 可连续地延拓到 $[a,b]$ 之外,而在 $[a,b]$ 之外, 函数值处处等于零. 于是不妨假定 $B$

就是由这样的连续函数组成，我们将这些函数记为

$$\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_{n_0}(t).$$

由于每个 $\varphi_k(t)$ $(k=1,2,\cdots,n_0)$ 都是连续函数，故当 $h\to 0$ 时，

$$(\varphi_k(t))_h=\frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h}\varphi_k(s)ds=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\varphi_k(t+s)ds$$

$$=\varphi_k(t+\theta h)\to\varphi_k(t)\quad(0\leqslant|\theta|<1)$$

关于 $t\in[a,b]$ 一致地成立．因此当 $h\to 0$ 时，$(\varphi_k)_h$ 按 $L^p[a,b]$ 的距离收敛于 $\varphi_k$，即

$$\rho((\varphi_k)_h,\varphi_k)\to 0\quad(h\to 0).\tag{4}$$

由于 $\{\varphi_k\}_{k=1}^{n_0}$ 是有限集，由(4)，对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得当 $0<h<\delta$ 时，

$$\rho((\varphi_k)_h,\varphi_k)<\frac{\varepsilon}{3}\tag{5}$$

对于 $k=1,2,\cdots,n_0$ 同时成立．

任取 $x\in A$，则存在某个 $\varphi_k\in B$ $(1\leqslant k\leqslant n_0)$ 使 $\rho(x,\varphi_k)<\frac{\varepsilon}{3}$．故当 $0<h<\delta$ 时，由不等式(3)与(5)，得着

$$\rho(x_h,x)\leqslant\rho(x_h,(\varphi_k)_h)+\rho((\varphi_k)_h,\varphi_k)+\rho(\varphi_k,x)$$

$$\leqslant 2\rho(x,\varphi_k)+\rho((\varphi_k)_h,\varphi_k)<\frac{2}{3}\varepsilon+\frac{1}{3}\varepsilon=\varepsilon.$$

条件(ii)的必要性成立．

充分性　利用条件(i)可以证明：对每个固定的 $h$，$A$ 内的元素 $x$ 所对应的函数 $x_h$ 组成的集合 $A_h$ 是等度连续的．其实，对任意的 $t',t''\in[a,b]$，有(不妨设 $t'<t''$)

$$|x_h(t'')-x_h(t')|=\frac{1}{2h}\left|\int_{t''-h}^{t''+h}x(s)ds-\int_{t'-h}^{t'+h}x(s)ds\right|$$

$$=\frac{1}{2h}\left|\int_{t'+h}^{t''+h}x(s)ds-\int_{t'-h}^{t''-h}x(s)ds\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2h}\left(\int_{t'+h}^{t''+h}|x(s)|ds+\int_{t'-h}^{t''-h}|x(s)|ds\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{2h}\cdot 2|t''-t'|^{\frac{1}{q}}\left(\int_a^b|x(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant \frac{K}{h}|t''-t'|^{\frac{p-1}{p}},$$

由于$p>1$,故对于每个固定的 $h$, $A_h$ 确实是等度连续的.

现在证明,对于每个固定的 $h$, $A_h$ 在 $C[a, b]$中是有界的. 事实上

$$|x_h(t)|\leqslant \frac{1}{2h}\left(\int_{t-h}^{t+h}|x(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{t-h}^{t+h}ds\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\left(\frac{1}{2h}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{t-h}^{t+h}|x(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{2h}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b|x(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\frac{1}{2h}\right)^{\frac{1}{p}}K.$$

因此集合 $A_h$ 满足定理 5.1 中的条件(i)、(ii),故对于给定的 $h>0$, 集合 $A_h$ 在 $C[a,b]$中列紧. 由于 $C[a,b]$中的点列按 $C[a, b]$的距离收敛必然导致它按 $L^p[a,b]$的距离收敛, 故 $A_h$ 在 $L^p[a,b]$中也是列紧的. 由条件(ii), 当 $h>0$ 充分小时, $A_h$ 是 $A$ 的一个 $\varepsilon$-网. 再由本章定理 4.3, $A$ 列紧. 证毕.

## §6 不动点定理

大家知道, 在微分方程、积分方程以及其他各类方程的理论中, 解的存在性、唯一性以及近似解的收敛性等都是很重要的课题. 为了证明一个微分方程、积分方程或其他类型的方程解的存在性, 我们可以将它转换成求某一映射的不动点. 为了阐明这一

观点，我们以大家熟悉的一阶常微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{1}$$

为例来说明．求微分方程(1) 满足初始条件 $y|_{x_0}=y_0$ 的解与求解积分方程

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,y(t))dt \tag{2}$$

等价．而为了求解积分方程(2)，我们可以根据 $f(x,y)$ 所满足的解析条件适当地选取一个距离空间，并在这个距离空间中作映射

$$(T\varphi)(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))dt,$$

于是求方程(2) 的解就转化为求出 $\varphi$ 使它满足 $T\varphi=\varphi$．这种 $\varphi$ 称为映射 $T$ 的不动点．因此求解方程(1)就变成求映射 $T$ 的不动点．

在本节中，我们介绍一种比较简单但又比较基本的不动点定理——压缩映射原理．

**定理 6.1** **设 $X$ 是完备的距离空间，$T$ 是由 $X$ 到 $X$ 自身的映射，并且对于任意的 $x$、$y\in X$，不等式**

$$\rho(Tx,Ty)\leqslant\theta\rho(x,y) \tag{3}$$

**成立，其中 $\theta$ 是满足 $0\leqslant\theta<1$ 的一个定数．那么 $T$ 在 $X$ 中存在唯一的不动点，即存在唯一的 $\bar{x}\in X$，使 $T\bar{x}=\bar{x}$．$\bar{x}$ 可以用迭代法求得．**

**证** 在 $X$ 中任意取定一点 $x_0$，并令

$$x_1=Tx_0,\ x_2=Tx_1,\ \cdots,\ x_{n+1}=Tx_n,\ \cdots.$$

我们证明 $\{x_n\}$ 是 $X$ 中的一个基本点列．事实上

$$\rho(x_1,x_2)=\rho(Tx_0,Tx_1)\leqslant\theta\rho(x_0,x_1)=\theta\rho(x_0,Tx_0);$$

$$\rho(x_2,x_3)=\rho(Tx_1,Tx_2)\leqslant\theta\rho(x_1,x_2)\leqslant\theta^2\rho(x_0,Tx_0);$$

……………………………………………

一般地可以证明

$$\rho(x_n,x_{n+1})\leqslant\theta^n\rho(x_0,Tx_0)\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

于是

$$\rho(x_n, x_{n+p}) \leqslant \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2})$$
$$+\cdots+\rho(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leqslant (\theta^n + \theta^{n+1}$$
$$+\cdots+\theta^{n+p-1})\rho(x_0, Tx_0)$$
$$=\frac{\theta^n(1-\theta^p)}{1-\theta}\rho(x_0, Tx_0) \leqslant \frac{\theta^n}{1-\theta}\rho(x_0, Tx_0). \tag{4}$$

根据假定，$0\leqslant\theta<1$，故 $\theta^n\to 0$，于是$\{x_n\}$是基本点列. 由于 $X$ 完备，$\{x_n\}$在 $X$ 中收敛于某一点 $\bar{x}$. 由不等式(3)，$T$ 是连续映射，在 $x_{n+1}=Tx_n$ 中，令 $n\to\infty$，有

$$\bar{x}=T\bar{x},$$

因此 $\bar{x}$ 是 $T$ 的一个不动点.

现在证明不动点的唯一性. 设另有 $\bar{y}$，使 $\bar{y}=T\bar{y}$，则

$$\rho(\bar{x},\bar{y})=\rho(T\bar{x},T\bar{y})\leqslant\theta\rho(\bar{x},\bar{y}),$$

由于 $0\leqslant\theta<1$，故 $\rho(\bar{x},\bar{y})=0$，即 $\bar{x}=\bar{y}$. 唯一性成立. 证毕.

满足条件(3)的映射称为压缩映射.

**注** 关于定理 6.1，有三个值得注意的方面：

1° 由证明可以看出，为了获得不动点 $\bar{x}$，可以从 $X$ 中的任一点出发，这无疑是很方便的；

2° 方程 $Tx=x$ 的不动点 $\bar{x}$ 在大多数情况下实际上不易求得，因此往往用 $x_n$ 作为其近似值. 这样就需要估计 $x_n$ 与 $\bar{x}$ 的误差. 要做到这一点，只需在 $\rho(x_n, x_{n+p})$ 中令 $p\to\infty$，由(4)得

$$\rho(x_n, \bar{x})\leqslant\frac{\theta^n}{1-\theta}\rho(x_0, Tx_0), \tag{5}$$

这就是误差估计式；

3° 定理 6.1 的条件可以适当放宽，即不必要求(3)式在整个空间$X$中满足，而只需它在以零次近似$x_0$为中心的某个闭球 $\bar{S}(x_0, r)$内满足. 但需假设

$$\rho(x_0, x_1)\leqslant(1-\theta)r,$$

其中 $x_1=Tx_0$, $\theta$ 是(3)中的数.

其实,已知 $x_1=Tx_0$,再令 $x_2=Tx_1,\cdots,x_{n+1}=Tx_n,\cdots$, 我们用归纳法可以证明:所有的$x_n$都在球$\bar{S}(x_0,r)$内. 显然, $x_1\in\bar{S}(x_0,r)$. 今设 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$ 都在球 $\bar{S}(x_0,r)$内,由于

$$\rho(x_2,x_1)\leqslant\theta\rho(x_1,x_0)\leqslant\theta(1-\theta)r,$$
$$\rho(x_3,x_2)\leqslant\theta\rho(x_2,x_1)\leqslant\theta^2(1-\theta)r,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

故 $$\rho(x_n,x_0)\leqslant\rho(x_n,x_{n-1})+\rho(x_{n-1},x_{n-2})+\cdots+\rho(x_1,x_0)$$
$$\leqslant(\theta^{n-1}+\theta^{n-2}+\cdots+1)(1-\theta)r=(1-\theta^n)r<r,$$

因此, $x_n$ 在球 $\bar{S}(x_0,r)$内. 于是所有的 $x_n$ 都在球 $S(x_0,r)$内. 这样, 定理 6.1 的证明步骤对这里的点列$\{x_n\}$ $(n=0,1,2,\cdots)$都适用. 于是$\{x_n\}$ 收敛于某一点 $\bar{x}$, $\bar{x}\in\bar{S}(x_0,r)$. 在等式 $x_{n+1}=Tx_n$ 中,令 $n\to\infty$并注意到 $T$ 在 $\bar{S}(x_0,r)$内连续,便有

$$\bar{x}=T\bar{x}.$$

因此$\bar{x}$是$T$的不动点. $\bar{x}$ 的唯一性与定理 6.1 中的证法完全相同. 因此定理 6.1 的结论全部成立.

**例1 微分方程解的存在性和唯一性** 考察微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),\quad y|_{x_0}=y_0 \tag{6}$$

其中 $f(x,y)$在整个平面内连续(这个条件较强,但我们的目的是介绍方法,而不是追求条件的完美),此外还设 $f(x,y)$关于 $y$ 满足李普希兹条件:

$$|f(x,y)-f(x,y')|\leqslant K|y-y'|,$$

则通过点$(x_0,y_0)$微分方程(6)有一条且只有一条积分曲线.

微分方程(6) 加上初始条件 $y|_{x_0}=y_0$ 便等价于下面的积分方程

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,y(t))dt.$$

我们取 $\delta>0$，使 $K\delta<1$，用 $C[x_0-\delta, x_0+\delta]$ 表示在区间 $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ 上的全部连续函数组成的空间。在 $C[x_0-\delta, x_0+\delta]$ 内定义映射 $T$：

$$(Ty)(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,y(t))dt.$$

$$\rho(Ty_1, Ty_2)=\max_{|x-x_0|\leqslant\delta}\left|\int_{x_0}^{x}[f(t,y_1(t))-f(t, y_2(t))]dt\right|$$

$$\leqslant\max_{|x-x_0|\leqslant\delta}\left|\int_{x_0}^{x}K|y_1(t)-y_2(t)|dt\right|$$

$$\leqslant K\delta\max_{|t-x_0|\leqslant\delta}|y_1(t)-y_2(t)|=K\delta\rho(y_1,y_2).$$

因 $K\delta<1$，由定理 6.1，存在唯一的连续函数 $y_0(x)$ $(x\in[x_0-\delta, x_0+\delta])$ 使

$$y_0(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,y_0(t))dt.$$

由这个式子还可以看出，$y_0(x)$ 是连续可微的，且 $y=y_0(x)$ 就是微分方程(6)通过 $(x_0,y_0)$ 的积分曲线，但只定义在 $[x_0-\delta,x_0+\delta]$ 上。考虑初始条件 $y|_{x_0\pm\delta}=y_0(x_0\pm\delta)$ 再次利用定理 6.1，便可将解延拓到 $[x_0-2\delta,x_0+2\delta]$ 上。依此类推，于是可将解延拓到整个数直线上。

**例 2　积分方程解的存在性和唯一性**　设有线性积分方程

$$x(t)=f(t)+\lambda\int_a^b K(t,s)x(s)ds, \tag{7}$$

其中 $f\in L^2[a,b]$ 为一给定的函数，$\lambda$ 为参数，核 $K(t, s)$ 是定义在 $a\leqslant t\leqslant b, a\leqslant s\leqslant b$ 内的可测函数，满足

$$\int_a^b\int_a^b|K(t,s)|^2dtds<+\infty,$$

则方程(7)对绝对值充分小的参数 $\lambda$ 有唯一的解 $x\in L^2[a,b]$。

令 $$(Tx)(t)=f(t)+\lambda\int_a^b K(t,s)x(s)ds.$$

由

$$\int_a^b\left|\int_a^b K(t,s)x(s)ds\right|^2 dt\leqslant\int_a^b\left[\int_a^b |K(t,s)|^2 ds\int_a^b |x(s)|^2 ds\right]dt$$

$$=\int_a^b\int_a^b |K(t,s)|^2 dsdt\int_a^b |x(s)|^2 ds$$

及 $T$ 的定义可知，$T$ 是由 $L^2[a,b]$到其自身的映射. 取$|\lambda|$充分小使

$$\theta=|\lambda|\left[\int_a^b\int_a^b |K(t,s)|^2 dsdt\right]^{\frac{1}{2}}<1,$$

于是

$$\rho(Tx,Ty)=|\lambda|\left(\int_a^b\left|\int_a^b K(t,s)(x(s)-y(s))ds\right|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant|\lambda|\left(\int_a^b\int_a^b |K(t,s)|^2 dtds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot\left(\int_a^b |x(s)-y(s)|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=|\lambda|\left(\int_a^b\int_a^b |K(t,s)|^2 dtds\right)^{\frac{1}{2}}\rho(x,y)=\theta\rho(x,y).$$

故 $T$ 为压缩映射. 由定理 6.1，方程 (7) 在 $L^2[a,b]$内存在唯一的解.

有时映射 $T$ 不满足(3)中的条件，于是定理 6.1 不适用，例如下面将要介绍的 Volterra 积分方程就是这样. 因此有必要将定理 6.1 加以拓广，以便可以讨论更多的方程解的存在性、唯一性问题. 下面介绍定理 6.1 的一种推广.

对 $x\in X$，记 $T^2x=T(Tx)$，依此类推，设已定义了 $T^{n-1}$，令 $T^nx=T(T^{n-1}x)$. 于是对任何自然数 $n$，$T^n$ 都有定义.

**定理 6.2 设 $T$ 是由完备距离空间 $X$ 到其自身的映射，如果**

存在常数 $\theta: 0\leqslant\theta<1$ 以及自然数 $n_0$ 使得

$$\rho(T^{n_0}x, T^{n_0}y)\leqslant\theta\rho(x,y)\qquad(x,y\in X),\tag{8}$$

则 $T$ 在 $X$ 中存在唯一的不动点.

**证** 由(8), $T^{n_0}$ 满足定理 6.1 的条件, 故 $T^{n_0}$ 存在唯一的不动点 $x_0$. 我们证明 $x_0$ 也是映射 $T$ 的唯一的不动点. 其实,

$$T^{n_0}(Tx_0)=T^{n_0+1}(x_0)=T(T^{n_0}x_0)=Tx_0,$$

故 $Tx_0$ 是映射 $T^{n_0}$ 的不动点. 由 $T^{n_0}$ 不动点的唯一性, 可得 $Tx_0=x_0$, 故 $x_0$ 是映射 $T$ 的不动点. 若 $T$ 另有不动点 $x_1$, 则由

$$T^{n_0}x_1=\underbrace{TT\cdots T}_{n_0\text{个}}x_1=\cdots=x_1$$

可知, $x_1$ 也是 $T^{n_0}$ 的不动点. 再由 $T^{n_0}$ 的不动点的唯一性, 得 $x_1=x_0$. 证毕.

作为定理 6.2的一个应用, 我们考察 Volterra 积分方程解的存在性与唯一性.

**例 3** 设 $K(t,s)$ 是定义在 $a\leqslant t\leqslant b, a\leqslant s\leqslant t$ 上的连续函数, 则 Volterra 积分方程

$$x(t)=\lambda\int_a^t K(t,s)x(s)ds+f(t)\tag{9}$$

对任何 $f\in C[a,b]$ 以及任何常数 $\lambda$ 存在唯一的解 $x_0\in C[a,b]$.

**证** 作 $C[a,b]$ 到其自身的映射 $T$:

$$(Tx)(t)=\lambda\int_a^t K(t,s)x(s)ds+f(t),$$

则对任意的 $x_1, x_2\in C[a,b]$, 有

$$\begin{aligned}|(Tx_1)(t)-(Tx_2)(t)|&=|\lambda|\left|\int_a^t K(t,s)[x_1(s)-x_2(s)]ds\right|\\&\leqslant|\lambda|M(t-a)\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x_1(t)-x_2(t)|\\&=|\lambda|M(t-a)\rho(x_1,x_2),\end{aligned}$$

其中 $M$ 表示 $|K(t,s)|$ 在 $a\leqslant t\leqslant b$, $a\leqslant s\leqslant t$ 上的最大值, $\rho$ 表示

$C[a,b]$中的距离．今用归纳法证明

$$|T^n x_1(t) - T^n x_2(t)| \leqslant (|\lambda|^n M^n (t-a)^n / n!) \rho(x_1, x_2). \quad (10)$$

当 $n=1$ 时，不等式(10) 已经证明．现设 $n=k$ 时，不等式(10)成立，则当$n=k+1$时，有

$$|T^{k+1}x_1(t) - T^{k+1}x_2(t)| = |\lambda| \left| \int_a^t K(t,s)[T^k x_1(s) - T^k x_2(s)] ds \right|$$

$$\leqslant (|\lambda|^{k+1} M^{k+1} / k!) \left| \int_a^t (s-a)^k ds \right| \times \rho(x_1, x_2)$$

$$= (|\lambda|^{k+1} M^{k+1} \times (t-a)^{k+1} / (k+1)!) \rho(x_1, x_2),$$

故不等式(10)对 $n=k+1$ 也成立，于是对一切自然数 $n$ 成立．由(10)，

$$\rho(T^n x_1, T^n x_2) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |T^n x_1(t) - T^n x_2(t)|$$

$$\leqslant (|\lambda|^n M^n (b-a)^n / n!) \rho(x_1, x_2).$$

对任何常数 $\lambda$，总可以选取足够大的 $n$ 使

$$|\lambda|^n M^n (b-a)^n / n! < 1.$$

因此 $T^n$ 满足定理 6.2 的条件，故方程(9)在 $C[a, b]$中存在唯一的解．

# §7 拓扑空间大意

## 7.1 拓扑空间的基本概念与性质

在 §1 中，我们引进了距离空间，其中的收敛概念可以概括古典分析中的许多收敛概念(如一致收敛、$p$ 次平均收敛、测度收敛等)，但是还不能概括全部，例如函数列的处处收敛就是一种．这说明距离空间仍有一定的局限性，因此需要将距离空间的概念加以拓广，使之能概括更多的客观事物．本节的目的就是对距离空

间的拓广——拓扑空间作一简单介绍.

大家知道,距离空间 $X$ 中的开集具有下列性质:

(i) 空间 $X$ 及空集都是开集;

(ii) 任意多个开集的并是开集;

(iii) 有限多个开集的交是开集.

我们将距离空间中开集的这些性质抽象出来，便可以在任一非空集合上引进拓扑的概念.

**定义 7.1** 设 $X$ 是一个非空的集合, $\tau$ 是 $X$ 中某些子集组成的集族,如果满足下面三个条件:

(i) $X$ 及空集都属于 $\tau$;

(ii) $\tau$ 中任意多个集的并仍属于 $\tau$;

(iii) $\tau$ 中任意有限个集的交仍属于 $\tau$,

则称 $\tau$ 为 $X$ 上的一个拓扑,而称 $X$ 是以 $\tau$ 为拓扑的拓扑空间,简称为拓扑空间. $\tau$ 中的集称为 $X$ 中的开集.

集合 $X$ 上赋以拓扑 $\tau$ 而成为拓扑空间后，往往记为 $(X, \tau)$. 在不会引起混淆的情况下，仍简记为 $X$. 一个空间上的拓扑常记为 $\tau$、$\sigma$ 等等.

**例 1** 设 $X$ 是一个以 $\rho$ 为距离的距离空间. 令 $\tau$ 为 $X$ 中全部开集组成的集族，则 $\tau$ 满足定义 7.1 中的全部条件，故 $\tau$ 是 $X$ 上的一个拓扑，称它是由距离 $\rho$ 诱导出来的拓扑. 我们说以 $\rho$ 为距离的距离空间 $X$ 是一个拓扑空间，总是指赋以由 $\rho$ 诱导出来的拓扑 $\tau$ 后所成的拓扑空间.

**例 2** 设 $X$ 是一个非空集合，取 $\tau$ 为 $X$ 的一切子集组成的集族,则 $\tau$ 显然满足定义 7.1 的全部条件，因此 $\tau$ 为 $X$ 上的一个拓扑,称它为 $X$ 上的离散拓扑，而称 $X$ 为离散的拓扑空间. 不难看出,由离散距离空间(见 § 1)上的距离诱导出来的拓扑就是离散拓扑,这是因为离散距离空间中的任一子集都是开集.

**例3** 设 $X$ 是一非空的集，取 $\tau$ 只含 $X$ 及空集，则 $\tau$ 也满足定义 7.1 的全部条件，故 $\tau$ 为 $X$ 上的一个拓扑，称 $\tau$ 为平凡的拓扑，而称 $X$ 为平凡的拓扑空间.

**例4** 设 $X$ 只含 0 与 1 两个点，$\tau$ 是由下面的集合

$$\varnothing, \{0\}, \{0,1\}$$

组成的集族，则 $\tau$ 满足定义 7.1 的全部条件，故 $\tau$ 为 $X$ 上的一个拓扑，$X$ 按照 $\tau$ 成为一个拓扑空间.

例 2、例 3 说明，在任何一个非空集合上都可以定义拓扑，而且定义拓扑的方式不是唯一的，这些均与距离空间的情形类似.

**例5** 设 $X$ 由 0、1、2 三点组成. $\tau_1$ 是由下面的集合

$$\varnothing, \{0\}, \{0,1\}, \{0,1,2\}$$

组成的集族，$\tau_2$ 是由下面的集合

$$\varnothing, \{0\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{0,1,2\}$$

组成的集族，则 $\tau_1, \tau_2$ 都是 $X$ 上的拓扑，它们是 $X$ 上两个不同的拓扑.

仿照距离空间，在拓扑空间中，可以定义邻域、内点、外点、接触点、聚点以及闭集、闭包等概念. 譬如内点邻域、接触点、闭包、闭集等可定义如下：

内点邻域：设 $X$ 为一拓扑空间，$x\in X$，$G\subset X$，如果存在 $G$ 的开子集 $G'$ 使 $x\in G'$，则称 $x$ 是 $G$ 的内点，而称 $G$ 是 $x$ 的一个邻域.

接触点：设 $A\subset X$，若对 $x$ 的任一邻域 $U$，$U\cap A$ 非空，则称 $x$ 为 $A$ 的接触点.

闭包：$A$ 的全部接触点组成的集叫做 $A$ 的闭包，记为 $\bar{A}$.

闭集：如果 $A=\bar{A}$，则称 $A$ 为闭集.

关于闭包，下列定理成立：

**定理 7.1** **设 $X$ 为一拓扑空间，$A$、$B$ 为 $X$ 的子集，则**

(i) $A\subset\bar{A}$;

(ii) $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$;

(iii) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$;

(iv) $\overline{\varnothing}=\varnothing$.

证法与§2定理2.2完全类似,故从略.

容易证明 $A$ 为闭集的充分必要条件是 $X\backslash A$ 为开集,故由开集的性质(见定义7.1),立即可得:

**定理 7.2** **设 $X$ 为一拓扑空间,则**

**(i) $X$ 及空集都是闭集;**

**(ii) 任意多个闭集的交仍为闭集;**

**(iii) 有限多个闭集的并仍为闭集.**

在拓扑空间中,一般应当考虑半序点列,而不能只考虑通常的点列.

**定义 7.2** 设$\mathscr{A}$是一半序集, 其中的半序为$\prec$. 称$\mathscr{A}$是定向的,如果对任意的 $\alpha$、$\alpha'\in\mathscr{A}$, 存在 $\alpha''\in\mathscr{A}$ 使 $\alpha\prec\alpha''$, $\alpha'\prec\alpha''$.

**定义 7.3** 设 $X$ 为一拓扑空间, $\mathscr{A}$是定向半序集. 若对每个 $\alpha\in\mathscr{A}$,有 $X$ 中的点 $x_\alpha$ 与之对应, 则称$\{x_\alpha:\ \alpha\in\mathscr{A}\}$是 $X$ 中的一个半序点列.

当$\mathscr{A}$是由全部自然数按照由小到大的顺序组成的序集时, $\{x_n:\ n\in\mathscr{A}\}$就是通常的点列.

设 $X$ 是一拓扑空间, $\{x_\alpha:\ \alpha\in\mathscr{A}\}$是 $X$ 中的一半序点列, $x_0\in X$. 如果对于 $x_0$ 的任一邻域 $U$, 存在$\mathscr{A}$中的元素 $\alpha_0$, 使得当 $\alpha_0\prec\alpha$ 时,有 $x_\alpha\in U$,则称半序点列$\{x_\alpha:\ \alpha\in\mathscr{A}\}$收敛于 $x_0$,而称 $x_0$ 为$\{x_\alpha:\ \alpha\in\mathscr{A}\}$ 的极限,记为

$$\lim_{\alpha\in\mathscr{A}} x_\alpha=x_0 \text{ 或 } \{x_\alpha\}\to x_0, \text{有时也简记为 } x_\alpha\to x_0.$$

**定理 7.3** **设 $X$ 是拓扑空间,则 $x\in\overline{A}$ 的充分必要条件是存在 $A$ 中的半序点列$\{x_\alpha:\ \alpha\in\mathscr{A}\}$使得$\{x_\alpha:\alpha\in\mathscr{A}\}$收敛于 $x$.**

**证** 必要性 设 $x\in\bar{A}$. $x$ 的一切邻域组成的集族用 $\tau(x)$ 表示,在 $\tau(x)$ 中定义如下的半序: 对 $U$、$V\in\tau(x)$, 当 $V\subset U$ 时,规定 $U\prec V$, 则 $\tau(x)$ 按照"$\prec$"是一个定向半序集. 对于每个 $U\in\tau(x)$, 由于 $U\cap A$ 非空,可取 $x_U\in U\cap A$, 则 $\{x_U: U\in\tau(x)\}$ 成为 $A$ 中的半序点列. 对任一 $U\in\tau(x)$, 当 $U\prec V$ 时,显然有 $x_V\in V\subset U$, 故 $x_U\to x$.

充分性 设 $A$ 中有半序点列 $\{x_\alpha: \alpha\in\mathscr{A}\}$ 收敛于 $x$, 则对 $x$ 的任一邻域 $U$, 存在 $\alpha_0\in\mathscr{A}$ 使得当 $\alpha_0\prec\alpha$ 时, $x_\alpha\in U$, 故 $U\cap A$ 非空, 因此 $x\in\bar{A}$.

### 7.2 分离公理

距离空间的一个重要性质是收敛点列的极限是唯一的. 这一性质对一般的拓扑空间未必成立. 例如设 $X$ 是 0 与 1 组成的集, 对 $X$ 赋以平凡的拓扑, 则 $X$ 中的半序点列 $\{x_\alpha: \alpha\in\mathscr{A}\}$ (所有 $x_\alpha=1$) 既收敛于 1 也收敛于 0. 因此为了保证拓扑空间中收敛的半序点列极限的唯一性, 对拓扑空间应当补充一些条件.

**定义 7.4** 设 $X$ 为一拓扑空间.

$T_0$-公理: 如果对 $X$ 中任意两点 $x$、$y$, 其中至少有一点(可能是 $x$ 也可能是 $y$), 存在它的一个邻域不含另一点, 则称 $X$ 满足 $T_0$-公理, 而称 $X$ 为 $T_0$-型空间.

$T_1$-公理: 如果对 $X$ 的任意两点 $x$, $y$, 必有 $x$ 的某个邻域 $U_x$ 不含 $y$, 也必有 $y$ 的某个邻域 $U_y$ 不含 $x$, 则称 $X$ 满足 $T_1$-公理, 而称 $X$ 为 $T_1$-型空间.

$T_2$-公理: 如果对 $X$ 的任意两点 $x$, $y$, 必有 $x$ 的某个邻域 $U_x$ 及 $y$ 的某个邻域 $U_y$ 使 $U_x\cap U_y=\varnothing$, 则称 $X$ 满足 $T_2$-公理, 或称 $X$ 为 $T_2$-型空间, 或称 $X$ 为 Hausdorff 空间.

**例 6** 设 $X$ 是 0 与 1 组成的集, $\tau$ 是由

$$\varnothing, \{0\}, \{0, 1\}$$

组成的集族, 则以 $\tau$ 为拓扑的拓扑空间 $X$ 满足 $T_0$-公理, 但不满

足 $T_1$-公理.

**例 7** 设 $X=\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}$. 规定 $\tau$ 由空集以及 $X$ 中最多除去有限个元后所得的集组成，则 $\tau$ 是 $X$ 上的一个拓扑，$X$ 以 $\tau$ 为拓扑而成的拓扑空间满足 $T_1$-公理，但不满足 $T_2$-公理.

**定理 7.4** **设 $X$ 为一拓扑空间，则 $X$ 为 $T_1$ 型空间的充分必要条件是 $X$ 中的每个点组成的单元素集都是闭集.**

**证** 必要性 设 $X$ 为 $T_1$-型空间. 任取 $x_0 \in X$，对 $X$ 中的每个 $x \neq x_0$，必有 $x$ 的邻域 $U_x$ 使 $x_0 \overline{\in} U_x$，于是

$$\{x_0\} = X \setminus \bigcup_{\substack{x \neq x_0 \\ x \in X}} U_x,$$

右端为 $X$ 中的闭集，故 $\{x_0\}$ 为闭集.

充分性 设 $X$ 中的每个点组成的单元素集都是闭集，任取 $x, y \in X$，则 $X \setminus \{x\}$ 为 $y$ 的一个邻域，它不含 $x$，$X \setminus \{y\}$ 为 $x$ 的一个邻域，它不含 $y$，故 $X$ 满足 $T_1$ 公理.

**定理 7.5** **设 $X$ 为一拓扑空间，则 $X$ 为 Hausdorff 空间的充分必要条件是 $X$ 中的每个收敛半序点列有唯一的极限.**

**证** 必要性. 设 $X$ 为 Hausdorff 空间，且设 $X$ 中有一半序点列 $\{x_\alpha: \alpha \in \mathscr{A}\}$ 既收敛于 $x$ 又收敛于 $y$. 如果 $x \neq y$，则有 $x$、$y$ 的邻域 $U_x$、$U_y$ 使 $U_x \cap U_y = \varnothing$. 但是这时存在 $\alpha_1$，使得当 $\alpha_1 \prec \alpha$ 时，$x_\alpha \in U_x$，同时又存在 $\alpha_2$，使得当 $\alpha_2 \prec \alpha$ 时，$x_\alpha \in U_y$. 因为 $\mathscr{A}$ 是定向半序集，故存在 $\alpha_0$ 使 $\alpha_1 \prec \alpha_0$，$\alpha_2 \prec \alpha_0$，于是当 $\alpha_0 \prec \alpha$ 时，$x_\alpha \in U_x$ 且 $x_\alpha \in U_y$，这显然不可能，故 $x = y$.

充分性. 设拓扑空间 $X$ 中的每个收敛半序点列的极限是唯一的，但 $X$ 不是 Hausdorff 空间. 则存在 $x$、$y \in X$，使得 $x$ 的任一邻域 $U$ 与 $y$ 的任一邻域 $V$ 的交非空. 我们令 $\mathscr{A}$ 为所有集偶 $\alpha = \{U, V\}$ 组成的集，这里 $U$ 是 $x$ 的任一邻域，$V$ 是 $y$ 的任一邻域. 在

$\mathscr{A}$中规定半序如下：当$U\subset U_1, V\subset V_1$时，$\{U_1, V_1\}\prec\{U,V\}$. 那么$\mathscr{A}$为一定向半序集. 对每个$\alpha=\{U,V\}$，任取一点$x_\alpha\in U\cap V$，则$\{x_\alpha, \alpha\in\mathscr{A}\}$为一半序点列. 现在证明$\{x_\alpha, \alpha\in\mathscr{A}\}$既收敛于$x$又收敛于$y$. 任取$x$的邻域$U$，再取$y$的邻域$V$，则当$\{U, V\}\prec\alpha$时，$x_\alpha\in U$，故$\{x_\alpha, \alpha\in\mathscr{A}\}$收敛于$x$. 同样地$\{x_\alpha, \alpha\in\mathscr{A}\}$收敛于$y$，与原设矛盾，故$X$为Hausdorff空间.

拓扑空间有着丰富的内容，例如拓扑空间上的连续映射及其性质，紧性，拓扑空间的距离化、紧化等等. 由于本节的目的是介绍拓扑空间最基本的知识，故都从略了.

## 第六章 习 题

§1. §2.

1. 设$R^n$是$n$维向量组成的集，在$R^n$中定义距离如下：

$$\rho_1(x,y)=\max_{1\leq k\leq n}|\xi_k-\eta_k|,$$

其中$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$，证明$R^n$按$\rho_1$是距离空间.

2. 证明：

(i) 设$X$是距离空间，$A\subset X$，则$A$是闭集的充分必要条件是$X\backslash A$为开集；

(ii) 距离空间中的闭集为可列个开集的交；

(iii) 距离空间中的开集为可列个闭集的并.

3. 设$X$为距离空间，$A\subset X$. 证明$A$的一切内点组成的集必为开集.

4. 设$X$是可分的距离空间，$\{G_c\}(c\in J)$为$X$的一个开覆盖，则从$\{G_c\}(c\in J)$中能取出可列个集组成$X$的一个开覆盖.

5. 设$X$按照距离$\rho$为距离空间，$A\subset X$非空，令

$$f(x)=\inf_{y\in A}\rho(x,y)\qquad(x\in X).$$

求证$f(x)$是$X$上的连续函数.

6. 设$X$为距离空间，$F_1$、$F_2$为$X$中不相交的闭集. 证明存在$X$上的连续函数$f(x)$，使得当$x\in F_1$时，$f(x)=0$；当$x\in F_2$时，$f(x)=1$.

7. 设$X$为距离空间，$F_1$，$F_2$为$X$中不相交的闭集. 证明存在开集$G_1$、

$G_2$，使得 $G_1\cap G_2=\varnothing$、$G_1\supset F_1$、$G_2\supset F_2$.

8. 设 $f(x)$ 是由距离空间 $X$ 到距离空间 $X_1$ 中的连续映射，$A$ 在 $X$ 中稠密，证明 $f(A)$ 在 $f(X)$ 中稠密.

9. 设 $C^k[a,b]$ 表示在 $[a,b]$ 上具有直到 $k$ 阶连续导数的一切函数构成的集. 对于 $x$、$y\in C^k[a,b]$，令

$$\rho(x,y)=\sum_{j=0}^{k}\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x^{(j)}(t)-y^{(j)}(t)|\ (\text{这里规定}x^{(0)}=x,\ y^{(0)}=y).$$

证明：

(a) $C^k[a,b]$ 按照 $\rho$ 是距离空间；

(b) 多项式的全体按照 $\rho$ 在 $C^k[a,b]$ 中稠密.

10. 设 $C^\infty[a,b]$ 表示在 $[a,b]$ 上无穷次可微函数构成的集. 对 $x$、$y\in C^\infty[a,b]$，令

$$\rho(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x^{(n)}(t)-y^{(n)}(t)|}{1+\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x^{(n)}(t)-y^{(n)}(t)|}.$$

证明：

(a) $C^\infty[a,b]$ 按照 $\rho$ 是距离空间；

(b) 多项式的全体按照 $\rho$ 在 $C^\infty[a,b]$ 中稠密.

11. 设 $X$ 是距离空间，$\rho$ 是其上的距离，令

$$\bar{\rho}(x,y)=\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}.$$

证明：

(a) $\bar{\rho}$ 也是 $X$ 上的一个距离；

(b) $(X,\rho)$ 与 $(X,\bar{\rho})$ 同胚.

12. 设 $f$ 是定义在距离空间 $X$ 上的实函数，证明 $f$ 连续的充分必要条件是下列条件之一成立：

(a) 对任何实数 $\alpha$，$\{x:f(x)>\alpha\}$ 及 $\{x:f(x)<\alpha\}$ 均为开集；

(b) 对任何实数 $\alpha$，$\{x:f(x)\geqslant\alpha\}$ 及 $\{x:f(x)\leqslant\alpha\}$ 均为闭集.

13. 证明区间 $(a,b)$ 与 $(-\infty,\infty)$ 同胚，$(a,b)$，$(-\infty,\infty)$ 上的距离均由下式定义

$$\rho(x,y)=|x-y|\ (x,y\in(a,b)\ \text{或}\ x,y\in(-\infty,\infty)).$$

14. 设 $X$、$Y$、$Z$ 均为距离空间，$f$ 是 $X$ 到 $Y$ 中的映射，$g$ 是 $Y$ 到 $Z$ 中的映射，证明：

(a) 若 $f$、$g$ 连续，则复合映射 $(g\circ f)(x)=g(f(x))$ 连续；

(b) 若 $f$、$g$ 是一对一的，则 $g\circ f$ 也是一对一的. 反之，若 $g\circ f$ 是一对一的，则 $f$ 是一对一的. 举例说明，此时 $g$ 未必是一对一的. 试找出 $g\circ f$ 是一对一的一个充分必要条件；

(c) $f$、$g$ 是同胚映射，则 $g\circ f$ 也是同胚映射.

§ 3.

15. 证明 § 1 例 5 中 $l^p$ 是完备、可分的距离空间.

16. 证明 § 3 例 5 的空间 $s$ 是完备的.

17. 证明 § 3 例 6 的空间 $L^\infty[a,b]$ 是完备的.

18. 证明习题 9、习题 10 中的 $C^k[a,b]$、$C^\infty[a,b]$ 按照各自的距离是完备的距离空间.

19. 设 $X$ 为距离空间，$A\subset X$. 如果 $A$ 按照 $X$ 的距离是完备的距离空间，证明 $A$ 是闭集. 若 $X$ 是完备的距离空间，$A\subset X$ 是闭的，则 $A$ 按照 $X$ 的距离是完备的距离空间.

20. 设 $X$ 是完备的距离空间，$\{F_n\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 为 $X$ 中的一列闭集：

$$F_1\supset F_2\supset\cdots\supset F_n\supset\cdots,$$

并且 $F_n\neq\varnothing$，$\lim\limits_{n\to\infty}d(F_n)=0$ （$d(F_n)$ 表 $F_n$ 的直径，直径的定义见 § 4 定理 4.1 后面），则 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n\neq\varnothing$. 举例说明条件 $\lim\limits_{n\to\infty}d(F_n)=0$ 不能去掉.

21. 设 $R$ 是实数域，在 $R$ 上定义距离

$$\rho_2(x,y)=|e^x-e^y|,$$

则 $R$ 按照 $\rho_2$ 是一个距离空间但不完备.

22. 设 $X$ 是距离空间，$A\subset B\subset X$. 若 $B$ 是第一类型的集，则 $A$ 也是第一类型的集. 若 $A$ 是第二类型的集，则 $B$ 也是第二类型的集.

23. 设 $X$ 是距离空间，$A\subset X$ 是闭子集. 如果 $A$ 是第二类型的，则 $A$ 包含 $X$ 中的某个闭球.

24. 设 $X$ 是完备的距离空间，$G\subset X$ 是非空开集，则 $G$ 是第二类型的.

25. 设 $X$ 是完备的距离空间，$A\subset X$ 是可列子集. 问 $A$ 是否必为第一类型的集？如果是，请给出证明，如果不是，请举出例子.

26. 设 $X_1$ 是以 $\rho$ 为距离的距离空间，$X_2\subset X_1$ 是真子集. $X_2$ 按照 $\rho$ 的完备化空间是否一定为 $X_1$ 按照 $\rho$ 的完备化空间的真子空间？举例说明之.

§4. §5.

27. 证明列紧集为紧集的充分必要条件是它为闭的.

28. 证明列紧集的闭包是紧集.

29. 证明列紧集的任何子集是列紧的,紧集的任何闭子集是紧的.

30. 举例说明全有界集不一定是列紧的.

31. 设$\{F_n\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$是紧空间$X$中的一列闭集:

$$F_1\supset F_2\supset\cdots\supset F_n\supset\cdots,$$

并且$F_n\neq\varnothing$,则$\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n\neq\varnothing$

32. 证明如果$F_1$、$F_2$是距离空间$X$中的紧集,则存在$x_0\in F_1$,$y_0\in F_2$使

$$\rho(F_1,F_2)=\rho(x_0,y_0),$$

其中$\rho(F_1,F_2)=\inf\limits_{\substack{x\in F_1\\ y\in F_2}}\rho(x,y)$. 若$\rho(F_1,F_2)=0$,则$F_1\cap F_2\neq\varnothing$.

33. 设$F_1$、$F_2$是距离空间$X$的子集,其中一个是闭集另一个是紧集. 如果$\rho(F_1,F_2)=0$,则$F_1\cap F_2\neq\varnothing$.

34. 证明$l^p$中的子集$A$列紧的充分必要条件是:

(i) 存在$K>0$, 使得对一切$x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}\in A$,有

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p<K,$$

(ii) 对任给的$\varepsilon>0$,存在$N>0$, 使得当$m>N$时,对一切$x\in A$有

$$\sum_{n=m}^{\infty}|\xi_n|^p<\varepsilon. \quad (x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\})$$

35. 证明空间$s$中的子集$A$列紧的充分必要条件是对每个$n$ $(n=1, 2, 3,\cdots)$,存在$C_n>0$,使得对一切$x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}\in A$,有

$$|\xi_n|\leqslant C_n \quad (n=1,2,3,\cdots).$$

36. 在数轴上添加无穷远点$-\infty$, $+\infty$, 得到的集记为$\mathbf{R}'$,试在$\mathbf{R}'$中适当地定义距离$\rho$,使$\mathbf{R}'$按照$\rho$是紧空间.

37. 在数轴上添加一个无穷远点$\infty$,得到的集记为$\mathbf{R}''$,试在$\mathbf{R}''$中适当地定义距离$\rho_1$, 使$\mathbf{R}''$按照$\rho_1$是紧空间.

38. 任何可分完备距离空间最多是$\aleph_0$个紧子集的并.

39. 设实函数$f(x)$,$f_n(x)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 在紧空间 $X$ 上连续. 对每个

$x\in X$，有 $\{f_n(x)\}\to f(x)$，则当 $f_n(x)\leqslant f_{n+1}(x)$ 或 $f_n(x)\geqslant f_{n+1}(x)$ 对一切 $n$ 以及一切 $x\in X$ 成立时，$\{f_n(x)\}$ 于 $X$ 上一致收敛于 $f(x)$

§ 6.

40. 设 $f\in C[0,1]$，求出方程

$$x(t)=f(t)+\lambda\int_0^t x(s)\,ds \quad (t\in[0,1])$$

的连续解.

41. 设 $T$ 为完备距离空间 $X$ 到它自身的映射，如果

$$\alpha_0=\inf_n \sup_{x\neq y}\frac{\rho(T^n x,T^n y)}{\rho(x,y)}<1,$$

则 $T$ 存在唯一的不动点.

42. 设 $X$ 是以 $\rho$ 为距离的紧空间，$T$ 是 $X$ 到它自身的映射. 若对任何 $x$、$y\in X$，当 $x\neq y$ 时，有

$$\rho(Tx,Ty)<\rho(x,y),$$

则 $T$ 有唯一的不动点.

43. 设 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 为一组数，满足

$$\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}-\delta_{ij}|^2<1,$$

其中

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & 若\ i=j;\\ 0, & 若\ i\neq j.\end{cases}$$

那么线性方程组

$$Ax=b$$

有唯一的解，其中 $A=(a_{ij})$，$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ 为未知元，$b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$ 是给定的.

§ 7.

44. 在非空集合 $X$ 上给出两个拓扑 $\tau_1$ 与 $\tau_2$，$\tau_1\subset\tau_2$. $A\subset X$. 证明：$A$ 在拓扑 $\tau_2$ 意义下的闭包必包含在 $A$ 在拓扑 $\tau_1$ 意义下的闭包中.

45. 设 $X$ 是无限集. $X$ 上的拓扑由 $X$ 的有限子集的余集及空集组成. 证明：$X$ 的任一无限子集在 $X$ 中稠密，即对任一 $x\in X$ 及 $x$ 的任一邻域 $U$，$U$

中必含有这个无限子集中的点.

46. 设在非空集 $X$ 上给出拓扑 $\tau_1$、$\tau_2$、$\tau_3$, $\tau_3\subset\tau_1$, $\tau_3\subset\tau_2$ 且 $\tau_3$ 满足 $T_2$-公理. 证明: 如果半序点列 $\{x_n\}$ 按拓扑 $\tau_1$ 收敛于 $a$, 按拓扑 $\tau_2$ 收敛于 $b$, 则 $a=b$.

# 第七章　赋范线性空间与内积空间

## §1　赋范线性空间的基本概念

泛函分析研究的对象之一是数学和物理中提炼出来的大量线性或非线性问题. 为了有效地研究这些问题,仅有距离空间的概念是不够的. 例如我们经常使用的 $C[a,b]$,它不仅是距离空间，而且它关于连续函数通常的线性运算是封闭的. 又如 $\mathbf{R}^n$,它关于 $n$ 维向量通常的线性运算也是封闭的. 空间 $L^p[a,b]$ 也有类似的情形. 正是由于 $C[a,b]$, $\mathbf{R}^n$、$L^p[a,b]$ 以及许多其他将要学习的空间都具有这类特性，当着我们为了研究某些线性或非线性问题而除了需要收敛概念外还需要用到元素的线性运算时，它们就比一般的距离空间显示出更大的优越性. 因此，引入线性空间的概念并在线性空间中引进适当的收敛概念就成为很必要的了. 这一节的目的就是要先介绍线性空间的概念以及有关性质，然后介绍赋范线性空间的概念及有关性质，最后再介绍有限维赋范线性空间的一些性质.

### 1.1　线性空间的基本概念

线性空间的概念在第五章 § 1 中已扼要地提到过，现在给出确切的定义.

**定义 1.1**　设 $E$ 是一个非空集合, $K$ 是实(或复)数域，如果下列条件成立,则称 $E$ 是一个实(或复)的线性空间:

(i) $E$ 是一个加法群，即 $E$ 中任意两个元素 $x$、$y$ 对应于 $E$ 中一个叫做 $x$ 与 $y$ 的和的元素，记为 $x+y$,满足

(a) $x+y=y+x$;

(b) $(x+y)+z=x+(y+z)$;

(c) $E$ 中存在元素 $\theta$ 使对任一 $x\in E$, $\theta+x=x$,称 $\theta$ 为$E$的零元素;

(d) 对任何 $x\in E$,存在加法逆元素 $-x$ 使 $x+(-x)=\theta$.

(ii) 任何 $x\in E$ 以及任何数 $\alpha\in K$ 对应于$E$中一个叫做 $\alpha$ 与 $x$ 的积的元素,记为 $\alpha x$,满足

(a) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$;

(b) $1\cdot x=x$;

(c) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$;

(d) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$.

今后,在不会引起混淆的情况下,实(或复)线性空间简称为线性空间,实(或复)数域$K$简称为数域,而实(或复)数简称为数.

例如 $C[a,b]$、$\mathbf{R}^n$、$L^p[a,b]$都是线性空间.

为了避免重复,我们将在介绍了赋范线性空间的概念以后,再对以上几个空间作比较详细的讨论.

线性空间中的元素又称为向量,元素的相加以及数与元素的相乘统称为线性运算.

由线性空间的定义可直接导出下列推论:

1° $0\cdot x=\theta$. 事实上

$x=1\cdot x=(1+0)x=1\cdot x+0\cdot x=x+0\cdot x$,

故 $0\cdot x=\theta$.

2° $(-1)x=-x$,事实上

$$(-1)x+x=(-1+1)x=0\cdot x=\theta,$$

故$(-1)x=-x$.

3° $\alpha\cdot\theta=\theta$. 其实

$\alpha\cdot\theta=\alpha(x+(-x))=\alpha x+(-\alpha)x=(\alpha-\alpha)x=0\cdot x=\theta$.

比 1°、3° 更强的结果是

4° $\alpha x=\theta$ 充分必要条件是 $\alpha=0$ 或 $x=\theta$.

充分性就是 1° 及3°. 现在证明必要性. 设$\alpha x=\theta$, 但$\alpha\neq 0$, 则

$$x=1\cdot x=\left(\frac{1}{\alpha}\alpha\right)x=\frac{1}{\alpha}(\alpha x)=\frac{1}{\alpha}\theta=\theta,$$

故 $\alpha$ 与 $x$ 中至少有一个是零.

对于线性空间, 以下几个概念是常用的:

1° 线性相关与线性无关　设 $x_1, x_2, \cdots, x_n(n\geqslant 1)$是线性空间$E$ 中的元素, 如果存在不全为零的数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 使

$$c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n=\theta,$$

就称 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 线性相关, 或称集合$\{x_1, \cdots, x_n\}$线性相关. 反之, 若由

$$c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n=\theta$$

必然导致 $c_1=c_2=\cdots=c_n=0$, 则称 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 线性无关, 或称集合$\{x_1, \cdots, x_n\}$线性无关.

2° 线性组合或线性表示　设 $x\in E$, 如果存在数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 使

$$x=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \quad (x_k\in E, k=1, 2, \cdots, n),$$

则称 $x$ 是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的线性组合或称 $x$ 可用 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 线性表示.

容易看出, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 线性相关的充分必要条件是其中某个元素可用其余 $n-1$ 个元素线性表示.

若 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 线性无关, 则其中任意 $k(1\leqslant k\leqslant n)$个元素也是线性无关的. 这一性质等价于: 若 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中某 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 个元素线性相关, 则 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 必线性相关.

3° 设$A$是$E$的一个子集, 如果$A$中任意有限个元素都是线性无关的, 则称$A$线性无关.

4° 子空间　设 $E_0$ 是线性空间$E$的一个子集, 若 $E_0$ 中任何

两个元素 $x$、$y$ 的和 $x+y$ 属于 $E_0$，任何一个数 $\alpha$ 与元素 $x\in E_0$ 的相乘也属于 $E_0$，不难证明 $E_0$ 按照 $E$ 中的线性运算也是一个线性空间，我们称 $E_0$ 是 $E$ 的线性子空间或简称为子空间.

$E$ 与 $\{\theta\}$ 都是 $E$ 的子空间. $E$ 中不同于 $E$ 的子空间称为 $E$ 的真子空间.既不同于 $E$ 也不同于 $\{\theta\}$ 的子空间则称为 $E$ 的非平凡子空间.

**5°** 子集张成的子空间 设 $L$ 是线性空间 $E$ 的一个子集. 作所有可能的线性组合 $\sum_{k=1}^{n} c_k x_k$，其中数 $c_k$，元素 $x_k\in L(k=1,2,\cdots,n)$ 以及自然数 $n$ 都是任意的. 容易验证，所有这些线性组合构成的集是 $E$ 的一个子空间，称它为 $L$ 张成的子空间，记为 $\operatorname{span}L$.

容易证明下面的事实：设 $M$ 是 $L$ 张成的子空间，则 $M$ 是包含 $L$ 的最小子空间，即若 $N$ 是包含 $L$ 的另一子空间，则 $N\supset M$. 因此，$M$ 是包含 $L$ 的一切子空间的交. 今证前一结论，后一结论显然.

其实，任取 $x_k\in L(k=1,2,\cdots,n)$，则 $x_k\in N$，故 $\sum_{k=1}^{n} c_k x_k\in N$，但 $M$ 是形如 $\sum_{k=1}^{n} c_k x_k$ 的一切线性组合组成的集，故 $M\subset N$.

**6°** 线性空间的同构 设 $E$、$E_1$ 都是线性空间，如果存在一个从 $E$ 到 $E_1$ 的双映射 $T$ 使

$$T(x+y)=Tx+Ty;$$
$$T(\alpha x)=\alpha Tx,$$

(这里 $x$、$y\in E$，$\alpha$ 为数)，则称 $E$ 与 $E_1$ 同构.

**7°** 直接和 设 $E$ 是线性空间，$L_1, L_2, \cdots, L_n$ 是 $E$ 的子空间，如果任一元 $x\in E$ 可以唯一地表成：

$$x=x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

其中 $x_k\in L_k(k=1,2,\cdots,n)$，则称 $E$ 是 $L_1, L_2, \cdots, L_n$ 的直接和，记

为

$$E=L_1\oplus L_2\oplus\cdots\oplus L_n \text{ 或 } E=\sum_{k=1}^{n}\oplus L_k. \tag{1}$$

容易证明，如果$E$是$L_1,L_2,\cdots,L_n$的直接和，在$L_k(k=1,2,\cdots,n)$中任意取出非零元素$x_k$,则$x_1,x_2,\cdots,x_n$是线性无关的.

其实，若有数$c_1,c_2,\cdots,c_n$,使

$$c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n=\theta,$$

由零元素$\theta$表示法的唯一性，可知$c_1=c_2=\cdots=c_n=0$，故$x_1,x_2,\cdots,x_n$线性无关.

在很多情况下，我们往往需要从已知的线性空间$L_1,L_2,\cdots,L_n$出发作出它们的直接和.考虑所有的有序组$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$构成的集合$E$，这里$x_k\in L_k(k=1,2,\cdots,n)$. 在$E$中定义元素$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与元素$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$的和以及数$\alpha$与$x$的相乘如下：

$$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n);$$

$$\alpha x=(\alpha x_1,\alpha x_2,\cdots,\alpha x_n).$$

不难证明$E$关于这样定义的线性运算是一个线性空间.令$E_k(k=1,2,\cdots,n)$是$E$中形如$(0,\cdots,0,x_k,0,\cdots,0)$的元素的集合，则$E_k$是$E$的子空间且与$L_k$同构，故可将它们视为同一. 容易看出，$E$是$E_1,E_2,\cdots,E_n$的直接和. 于是我们也称$E$是$L_1,L_2,\cdots,L_n$的直接和，并且仍记成

$$E=L_1\oplus L_2\oplus\cdots\oplus L_n. \text{ 或} E=\sum_{k=1}^{n}\oplus L_k.$$

### 1.2 赋范线性空间的基本概念及例

以上我们引入了线性空间以及有关的几个概念，但是为了研究从数学或物理中提炼出来的线性或非线性问题，在线性空间中还需引入适当的收敛概念，而且在引入时应当与线性运算结合在一起考虑.将收敛概念与线性运算结合在一起考虑可以有多种途

径．本节中，我们先介绍其中一种，即在线性空间中引入范数．然后在§5中介绍另一种．

**定义1.2** 设$E$是实（或复）线性空间，如果对于$E$中每个元素$x$，都有一实数与之对应，此实数记为$\|x\|$，满足：

(i) $\|x\|\geqslant 0$，$\|x\|=0$ 的充分必要条件是 $x=\theta$；

(ii) $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$，这里$\alpha$是实（或复）数；

(iii) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$，

则称$E$为实（或复）赋范线性空间，$\|x\|$称为元素$x$的范数．

与线性空间的情形类似，这里的"实（或复）"等词也往往略去．

对于赋范线性空间$E$，我们可以用下面的等式

$$\rho(x,y)=\|x-y\| \qquad (x、y\in E) \tag{2}$$

定义元素$x$与$y$之间的距离．容易证明，这样定义的距离满足第六章§1定义1.1中距离公理的全部条件，因此$E$按照距离(2)是一个距离空间．

$E$既是距离空间，自然就有收敛概念．按照距离空间中收敛概念的定义，$E$中点列$\{x_n\}$在$E$中收敛于点$x$，是指

$$\rho(x_n,x)=\|x_n-x\|\to 0(n\to\infty). \tag{3}$$

由(3)，我们自然而然地称$\{x_n\}$依范数收敛于$x$，有时也称$\{x_n\}$强收敛于$x$，记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x(\text{强})\text{或}\{x_n\}\xrightarrow{\text{强}}x(n\to\infty).$$

在不会引起混淆的情况下，简记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x、\{x_n\}\to x \text{ 或 } x_n\to x.$$

利用范数的第二、第三两个条件可以证明下面几个性质：

1° 范数$\|x\|$是$x\in E$的连续函数．其次，若$\{x_n\}\subset E$依范数收敛于$x\in E$，则$\{\|x_n\|\}$有界．

其实，由范数的第三个条件可以证明

$$|\|x\|-\|y\||\leqslant\|x-y\| \quad (x、y\in E),$$

因此对$E$中的元素$x_n(n=1,2,3,\cdots,)$及$x$，有

$$|\|x_n\|-\|x\||\leqslant\|x_n-x\|,$$

故当$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$时，$\|x_n\|\to\|x\|$. 因此范数$\|x\|$是$x$的连续函数. 第一个结论成立. 由$\|x_n\|\to\|x\|$可知，$\{\|x_n\|\}$有界. 第二个结论成立.

2° 设$x_n$、$y_n(n=1,2,3,\cdots)$；$x$、$y$都是$E$中的元素且

$$x_n\to x、y_n\to y,$$

则

$$x_n+y_n\to x-y.$$

这由不等式

$$\|x_n+y_n-(x+y)\|\leqslant\|x_n-x\|+\|y_n-y\|$$

立即可得.

3° 设数列$\{\alpha_n\}\to\alpha$，$x_n(n=1,2,3,\cdots)$及$x$都是$E$中的元素且$\{x_n\}\to x$，则

$$\{\alpha_n x_n\}\to\alpha x.$$

这由不等式

$$\begin{aligned}\|\alpha_n x_n-\alpha x\|&\leqslant\|\alpha_n x_n-\alpha_n x\|+\|\alpha_n x-\alpha x\|\\&=|\alpha_n|\|x_n-x\|+|\alpha_n-\alpha|\|x\|\end{aligned}$$

以及$\{|\alpha_n|\}$的有界性，$\|x_n-x\|\to0$、$|\alpha_n-\alpha|\to0$立即可得.

性质2°、3°表明，线性运算关于$E$中的收敛概念是连续的. 前面所说的应将收敛概念与线性运算结合在一起考虑，指的就是这个连续性. 亦称它为范数与线性运算的相容性.

现在介绍几个实例. 从例2开始，均假定所讨论的空间可以是实的也可以是复的，以后的例子中，如不作特别的声明，均作如是假定.

**例1** $n$维Euclid空间$\mathbf{R}^n$ 在$\mathbf{R}^n$中定义元素$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$与$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$的相加以及数$\alpha$与元素$x$的相乘如下：

$$x+y=(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\cdots,\xi_n+\eta_n);$$

$$\alpha x=(\alpha\xi_1,\alpha\xi_2,\cdots,\alpha\xi_n),$$

则 $\mathbb{R}^n$ 是一个线性空间. 再在 $\mathbb{R}^n$ 中令

$$\|x\|=\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4}$$

则 $\|\cdot\|$ 满足范数的全部条件. 因此 $\mathbb{R}^n$ 是一个赋范线性空间. 由范数(4) 导出的距离就是第六章 § 1.1 例 1 中的距离, 因此 $\mathbb{R}^n$ 中依范数收敛等价于按坐标收敛.

在 $\mathbb{C}^n$ 中可以像 $\mathbb{R}^n$ 那样定义加法、数乘以及元素的范数, 这样 $\mathbb{C}^n$ 也是一个赋范线性空间,在 $\mathbb{C}^n$ 中依范数收敛也等价于按坐标收敛.

**例 2 连续函数空间 $C[a,b]$** 在 $C[a,b]$中定义元素 $x$ 与 $y$ 的相加以及数 $\alpha$ 与 $x$ 的相乘如下(即通常函数的线性运算):

$$(x+y)(t)=x(t)+y(t);$$

$$(\alpha x)(t)=\alpha x(t),$$

则 $C[a,b]$成为一个线性空间,再在 $C[a,b]$中令:

$$\|x\|=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)| \qquad (x\in C[a,b]), \tag{5}$$

则 $\|\cdot\|$ 满足范数的全部条件,因此 $C[a,b]$是一个赋范线性空间.由范数(5) 导出的距离就是第六章 § 1.1 例 2 中的距离,因此 $C[a,b]$中依范数收敛等价于一致收敛.

**例 3 空间 $L^p[a,b](1\leqslant p<+\infty)$** 在 $L^p[a,b]$中, 凡几乎处处相等的函数视为同一元素. 线性运算的定义与例 2 相同, 于是 $L^p[a,b]$成为一个线性空间. 再在 $L^p[a,b]$中令

$$\|x\|=\left(\int_a^b|x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (x\in L^p[a,b]). \tag{6}$$

则在第五章中已经指出, $\|\cdot\|$ 满足范数的全部条件, 因此 $L^p[a,b]$ 是一个赋范线性空间. 由范数(6) 导出的距离就是第六章 § 1.1 例 3 中的距离, 因此 $L^p[a,b]$ 中依范数收敛就是 $p$ 幂平均收敛.

**例 4　空间 $l^p(1\leqslant p<\infty)$**　在第六章 §1.1例 5 中已经证明，若 $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}$ 及 $y=\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots\}$ 均属于 $l^p$，则序列 $\{\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\cdots,\xi_n+\eta_n,\cdots\}$ 也属于 $l^p$. 今定义元素 $x$ 与 $y$ 的和如下：

$$x+y=\{\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\cdots,\xi_n+\eta_n,\cdots\},\tag{7}$$

于是 $x+y\in l^p$. 再定义数 $\alpha$ 与元素 $x$ 的数乘如下：

$$\alpha x=\{\alpha\xi_1,\alpha\xi_2,\cdots,\alpha\xi_n,\cdots\},\tag{8}$$

显然 $\alpha x\in l^p$. $l^p$ 按照以上定义的线性运算是一个线性空间. 再令

$$\|x\|=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p\right)^{1/p}.\tag{9}$$

由 Minkowski 不等式可知，$\|\cdot\|$满足范数的条件(iii). 至于范数的条件(i)及(ii)，则显然满足. 因此 $l^p$ 是一个赋范线性空间.

同理，对空间 $l^\infty$，如果用(7)及(8)两式定义其中的线性运算则 $l^\infty$ 成为一个线性空间. 再令

$$\|x\|=\sup_{1\leqslant n<\infty}|\xi_n|\tag{10}$$

其中 $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}\in l^\infty$. 则$\|\cdot\|$满足范数的全部条件，因此 $l^\infty$ 是一个赋范线性空间.

**例 5　空间 $L^\infty[a,b]$**　在 $L^\infty[a,b]$中，凡几乎处处相等的函数视为同一个元素. 线性运算的定义与例 2 相同，于是 $L^\infty[a,b]$成为一个线性空间. 再令

$$\|x\|=\inf_{\substack{mE_0=0\\E_0\subset[a,b]}}\left[\sup_{t\in[a,b]\setminus E_0}|x(t)|\right]\tag{11}$$

$$=\operatorname*{vraisup}_{t\in[a,b]}|x(t)|\qquad(x\in L^\infty[a,b]),\tag{12}$$

则$\|\cdot\|$满足范数的全部条件，因此 $L^\infty[a,b]$ 是一个赋范线性空间. 由范数(12)导出的距离就是第六章 §1.1 例 4 中的距离，因此 $L^\infty$

$[a,b]$中依范数收敛等价于几乎一致收敛.

**例6　空间 $C^k[a, b]$**　在第六章习题第 9 题中已经定义了 $C^k[a,b]$. 它是由在区间$[a,b]$上具有直到 $k$ 阶连续导数的一切函数构成的集合. $C^k[a,b]$中线性运算的定义与例 2 相同,于是$C^k[a,b]$成为一线性空间. 再令

$$\|x\| = \sum_{j=0}^{k} \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x^{(j)}(t)| \qquad (x \in C^k[a,b]) \tag{13}$$

则$\|\cdot\|$满足范数的全部条件, 于是 $C^k[a,b]$是一个赋范线性空间. 而且 $C^k[a,b]$中点列$\{x_n\}$依范数收敛于 $x \in C^k[a, b]$等价于 $x_n(t)$ 的直到 $k$ 阶导数分别一致收敛于 $x(t)$的相应阶导数.

赋范线性空间按照它的范数导出的距离(见(2)) 成为距离空间时,将会出现两种情形:一种情形是它完备; 另一种情形是不完备. 我们将完备的赋范线性空间称为 Banach 空间.

上面介绍的空间 $\mathbf{R}^n$、$\mathbf{C}^n$、$C[a,b]$、$L^p[a, b]$ $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$、$l^p$ $(1 \leqslant p < +\infty)$都是完备的,这在第六章中已经证明或已经说明,因此都是 Banach 空间.

现在证明 $C^k[a,b]$也是 Banach 空间.

设$\{x_n\}$是 $C^k[a,b]$中的一个基本点列,于是对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$,使得当 $m$、$n > N$ 时, $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$,即

$$\sum_{j=0}^{k} \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x_m^{(k)}(t) - x_n^{(k)}(t)| < \varepsilon.$$

因此对于每个 $j(0 \leqslant j \leqslant k)$,不等式

$$|x_m^{(j)}(t) - x_n^{(j)}(t)| < \varepsilon \quad (m, n > N)$$

关于 $t \in [a,b]$一致地成立. 由古典分析可知, $\{x_n^{(j)}(t)\}$一致收敛于某个连续函数 $y_j(t)(0 \leqslant j \leqslant k)$, 而且 $y_{j+1}(t)$是 $y_j(t)$ 的导数 $(0 \leqslant j \leqslant k-1)$. 由此可知$y_0(t)$有直到 $k$ 阶的连续导数且 $y_0^{(j)}(t) = y_j(t)$. 于是$\{x_n\}$ 依 $C^k[a,b]$中的范数收敛于 $y_0$, 故 $C^k[a,b]$完

备，因而是Banach空间.

应当注意，不完备的赋范线性空间确实存在. 例如在第六章§ 3.1 例7 中已经指出，$C[a,b]$按照距离

$$\rho_1(x,y)=\left(\int_a^b |x(t)-y(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} (x、y\in C[a,b])$$

是不完备的.

对于不完备的赋范线性空间也有完备化问题. 为此先引进等距同构的概念.

**定义 1.3** 设$E$、$E_1$都是赋范线性空间，如果满足下面的条件，就称$E$、$E_1$等距同构:

(i) $E$、$E_1$作为线性空间是同构的，从$E$到$E_1$的同构映射用$T$表示;

(ii) $E$、$E_1$在同构映射$T$之下是等距的，即对任何$x、y\in E$，有

$$\|Tx-Ty\|_1=\|x-y\|,$$

这里$\|\cdot\|$、$\|\cdot\|_1$分别表示$E$、$E_1$中的范数.

现在设$E$是一个给定的赋范线性空间. $E$作为距离空间有完备化的距离空间$E_0$. 我们证明在$E_0$中可以定义线性运算及范数使之成为Banach空间.

任取数$\alpha$、$\beta$及元素$x$、$y\in E_0$，则有$E$中的基本点列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$使

$$x_n\to x,\ y_n\to y.$$

显然$\{\alpha x_n+\beta y_n\}$也是$E$中的基本点列，于是有$z\in E_0$使$\{\alpha x_n+\beta y_n\}\to z$. 我们规定

$$z=\alpha x+\beta y.$$

不难证明$z$与$\{x_n\}$、$\{y_n\}$的选择无关. 于是$E_0$是一个线性空间. 在$E_0$中再定义

$$\|x\|=\lim_{n\to\infty}\|x_n\|，这里\ x_n\in E,\ x\in E_0,\ \lim_{n\to\infty}x_n=x,$$

则$\|\cdot\|$是$E_0$上的范数. 由于$E_0$完备，故为Banach空间. 所以，

对任何赋范线性空间$E$，都存在 Banach 空间$E_0$，使$E_0$是$E$的完备化赋范线性空间，而且除去等距同构不计外，$E_0$是唯一的。

### 1.3 商空间

设$E$是一给定的线性空间，$L$是$E$的子空间。利用子空间$L$，我们可以在$E$上定义等价关系。称$x、y\in E$是等价的，若$x-y\in L$，记为$x\sim y$。由于$L$是线性空间，这样定义的等价确实满足等价关系的三个条件：

1° 自反性 $x\sim x$；

2° 对称性 若$x\sim y$，则$y\sim x$；

3° 传递性 若$x\sim y, y\sim z$，则$x\sim z$。

由性质1°、2°、3°，可以在$E$中定义等价类。对于$E$中的任意两个元素$x$、$y$，若$x\sim y$，则将$x、y$归于同一等价类。等价类常用记号$\xi、\eta、\zeta$等表示。容易证明$E$中任意一个元素必属于某一个等价类，任何两个不同的等价类没有公共元素。于是空间$E$被划分为若干个等价类。对于给定的等价类$\xi$，任取$x\in\xi$，则集合$x+L$就是$\xi$，这里$x+L$表示集合$\{x+y; y\in L\}$。因此等价类又可用$x+L$、$y+L$、$z+L$等表示。

用$\hat{E}$表示$E$中等价类的全体，在$\hat{E}$中可以定义线性运算。设$\xi、\eta\in\hat{E}$，任取$x\in\xi, y\in\eta$，我们规定$\xi$与$\eta$的和$\xi+\eta$是下面的等价类：

$$x+y+L,$$

即$\xi+\eta=x+y+L$。再规定数$\alpha$与等价类$\xi$的乘积$\alpha\xi$是下面的等价类：

$$\alpha x+L,$$

即$\alpha\xi=\alpha x+L$。

需要证明的是和$\xi+\eta$与$x\in\xi$、$y\in\eta$的选择无关，数乘$\alpha\xi$与$x\in\xi$的选择无关。我们仅以和$\xi+\eta$为例证明这种无关性。

除了 $x\in\xi$, $y\in\eta$ 外,再任取 $x'\in\xi, y'\in\eta$. 需要证明的是 $x'+y'+L$ 与 $x+y+L$ 是同一个等价类. 由于 $x'$ 及 $x$ 同属于 $\xi$, $y'$ 及 $y$ 同属于 $\eta$, 故 $x'-x\in L, y'-y\in L$. 因此

$$\begin{aligned} x'+y'+L &= x+(x'-x)+y+(y'-y)+L \\ &= x+y+(x'-x)+(y'-y)+L = x+y+L. \end{aligned}$$

这表明 $x'+y'+L$ 与 $x+y+L$ 是同一个等价类, 故 $\xi+\eta$ 是一意确定的, 而与 $x\in\xi$ 及 $y\in\eta$ 的选择无关. 同理 $\alpha\xi$ 也是一意确定的, 而与 $x\in\xi$ 的选择无关.

在 $\hat{E}$ 中定义了线性运算后, 可以证明 $\hat{E}$ 按照这样的线性运算是一个线性空间, 称它为 $E$ 关于 $L$ 的商空间. 除了记号 $\hat{E}$ 外, $E$ 关于 $L$ 的商空间有时也记为 $E/L$.

**例7** 对于大家已经很熟悉的空间 $L^p[a,b]$ $(1\leqslant p<\infty)$, 我们常常规定其中任意两个对等的函数为同一元素. 严格说来, $L^p[a,b]$ 是一个商空间. 事实上, 令

$$\tilde{L}=\{g: g=0 \text{ 在}[a,b]\text{上几乎处处成立}\}.$$

那么 $L^p[a,b]$ 中的元素实际上是形如 $f+\tilde{L}$ 的等价类, 其中 $f$ 满足

$$\int_a^b |f|^p dt<\infty.$$

因此 $L^p[a, b]$ 实际上是 $[a, b]$ 上全部 $p$ 幂可积函数构成的线性空间关于 $\tilde{L}$ 的商空间.

现设 $E$ 是赋范线性空间, $L$ 是 $E$ 的子空间. $L$ 按照 $E$ 的范数显然是一个赋范线性空间. 如果 $L$ 按照由这个范数导出的距离在 $E$ 中是闭的, 则称 $L$ 是 $E$ 的闭子空间.

当 $L$ 是 $E$ 的闭子空间时, 在商空间 $E/L$ 中可以引进范数. 事实上, 对任一 $\xi\in E/L$, 令

$$|||\xi||| = \inf_{x\in\xi}\|x\|. \tag{14}$$

可以证明, 由(14) 定义的 $|||\cdot|||$ 满足范数的全部条件. 因此 $E/L$ 按

照(14) 定义的范数是一个赋范线性空间. 还可以证明当 $E$ 是 Banach 空间且 $L$ 是 $E$ 的闭子空间时, $E/L$ 也是 Banach 空间(第七章习题第 9 题).

**1.4 赋范线性空间的直接和**

设 $L_1, L_2, \cdots, L_n$ 都是赋范线性空间, $E$ 是 $L_1, L_2, \cdots, L_n$ 的直接和, 即

$$E = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_n.$$

在 $E$ 中定义范数如下:

$$\|x\| = \|x_1\| + \|x_2\| + \cdots + \|x_n\|, \tag{15}$$

这里 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in E$, $x_k \in L_k (k = 1, 2, \cdots, n)$. 不难证明, 由(15)定义的 $\|\cdot\|$ 满足范数的全部条件. 因此 $E$ 按照(15) 定义的范数是一个赋范线性空间.

在 $E$ 中还可以定义其他的范数. 例如, 可以令

$$\|x\|_1 = \max\{\|x_1\|, \|x_2\|, \cdots, \|x_n\|\}; \tag{16}$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2\right)^{1/2} \tag{17}$$

等等. 不难证明 $\|\cdot\|_1$、$\|\cdot\|_2$ 均为 $E$ 上的范数, 因此 $E$ 按照这些范数也是赋范线性空间. 如果 $L_1, L_2, \cdots, L_n$ 都是 Banach空间, 则 $E$ 按照(15)、(16)或者(17)定义的范数也是 Banach 空间.

在这一节中, 我们引进了线性空间、赋范线性空间、Banach 空间、商空间以及线性空间的直接和等概念, 希望读者注意:

1° 线性空间中的线性运算是代数概念, 在线性空间中既无距离可言也无范数可言. 因而没有收敛概念, 也无开集、闭集、稠密性、可分性等概念;

2° 在某些线性空间中可以引进范数使之成为赋范线性空间, 这在本节中已经讨论过. 我们还可以引进距离, 于是得到线性距离空间, 关于线性距离空间, 本书不准备涉及. 但是希望读者特

别注意，当我们在线性空间中引进距离时，应当要求线性运算关于所引进的距离是连续的，称为线性运算与距离的相容性．更一般地，在某些线性空间中还可以引进拓扑，从而得到线性拓扑空间．同样地，在引进拓扑时，必需保证线性运算关于拓扑的连续性，这称为线性运算与拓扑的相容性．在本章 § 5 中将对线性拓扑空间作一简单介绍；

3° 赋范线性空间可以是完备的也可以是不完备的．完备的赋范线性空间叫做 Banach 空间，不完备的赋范线性空间可以完备化而成为 Banach 空间；

4° 商空间与直接和都是代数概念．但是当着我们考虑赋范线性空间或 Banach 空间的商空间与直接和时，可以对商空间（这时子空间 $L$ 需假定为闭的）与直接和赋以范数使它们成为赋范线性空间或 Banach 空间．

# § 2 具有基的Banach空间

## 2.1 具有基的 Banach 空间

这一节讨论一类特殊的 Banach 空间——具有基的 Banach 空间及其特例——有限维赋范线性空间．我们先定义线性空间维数的概念．

**定义 2.1** 若在线性空间 $E$ 中存在 $n(n\geqslant 1)$ 个元素 $e_1, e_2, \cdots, e_n$，使得任意的 $x\in E$ 可以唯一地表成

$$x=\sum_{k=1}^{n} c_k e_k, \tag{1}$$

则称 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 $E$ 的一个基，称 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是 $x$ 关于基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 的坐标．称 $n$ 为 $E$ 的维数，而称 $E$ 为 $n$ 维线性空间．如果 $E$ 只含零元素，则称 $E$ 为零维线性空间．所有 $n$ 维线性空间（$n=$

$0,1,2,\cdots$)统称为有限维线性空间，非有限维的线性空间称为无限维线性空间。

在线性代数中已经证明，有限维线性空间的维数不随基的变化而变化。

Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 是一个 $n$ 维线性空间，若$e_1=(1,0,\cdots,0)\cdots$，$e_n=(0,\cdots,0,1)$，则$\{e_1,\cdots,e_n\}$是 $\mathbb{R}^n$ 的一个基. $C[a,b]$是一个无限维线性空间. 这是因为对任何自然 $n$, $C[a,b]$中都有 $n$ 个线性无关的元素存在. 例如$\{t^k\}$ $(k=0,1,2,\cdots;t\in[a,b])$就是$C[a,b]$中一个线性无关的函数系. 如果 $C[a,b]$是有限维的，维数为 $n$，那么$\{t^k\}$中任何 $n+1$ 个元素都是线性相关的，这不可能，故 $C[a,b]$是无限维的.

**定义 2.2** 设$E$是一个无限维的 Banach 空间，$E$ 中的点列$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$称为$E$的一个 Schauder 基或简称为基，如果$E$中的任一元素 $x$ 可唯一地表成

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n e_n,$$

其中 $\xi_n$ 为数，仅与$x$ 有关，而右端的级数依 $E$ 中的范数收敛. $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$有时简记为$\{e_n\}$.

**例 1** 设 $E=l^p(1\leqslant p<\infty)$. 令

$$\begin{aligned}
&e_1=\{1,0,0,0,\cdots\},\\
&e_2=\{0,1,0,0,\cdots\},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&e_n=\{\underbrace{0,\cdots,0,1}_{n\text{ 项}},0\cdots\},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,
\end{aligned}$$

则$\{e_n\}$是 $l^p$ 的一个基. 其实，设 $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}\in l^p$，则

$$\|x-\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i\|=\|\{\underbrace{0,0,\cdots,0}_{n\text{项}},\xi_{n+1},\cdots\}\|$$

$$=\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{1/p}\longrightarrow 0.$$

故

$$x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i e_i.$$

其次，如果 $x$ 还可表成

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\xi'_i e_i,$$

其中右端的级数按 $l^p$ 中的范数收敛．于是，对于任给的自然数 $n$，由不等式

$$\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i-\sum_{i=1}^{n}\xi'_i e_i\|\leqslant\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i-x\|+\|x-\sum_{i=1}^{n}\xi'_i e_i\|$$

可知，当 $n\to\infty$ 时，$\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i-\sum_{i=1}^{n}\xi'_i e_i\|\longrightarrow 0$，即

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\xi'_i|^p\right)^{1/p}\longrightarrow 0.$$

因 $\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\xi'_i|^p\right)^{1/p}$ 是非负上升数列，故 $\xi_i=\xi'_i$ 必成立 $(i=1,2,3,\cdots)$，表示是唯一的．因此 $\{e_n\}$ 确为 $l^p$ 的一个基．

容易看出，如果空间 $E$ 有基，则 $E$ 是可分的．其实，设 $\{e_n\}$ 是 $E$ 的一个基，则所有形如 $\sum_{i=1}^{n}r_i e_i$ 的元素构成的集合 $A$ 在 $E$ 中稠密，这里 $n$ 是任意的自然数，$r_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为任意的有理数．

$A$ 显然是可列集，故 $E$ 可分. 但是任一可分 Banach 空间是否存在基则是一个长期没有解决的问题. 直到 1973 年，才有数学家构造了一个不具有基的可分 Banach 空间的例子.

### 2.2 有限维赋范线性空间

先引进赋范线性空间拓扑同构的概念.

**定义 2.3** 设 $E$、$E_1$ 都是赋范线性空间. 如果满足下面的条件，就称 $E$、$E_1$ 拓扑同构:

(i) $E$、$E_1$ 作为线性空间是同构的，从 $E$ 到 $E_1$ 的同构映射用 $T$ 表示；

(ii) $T$ 及 $T^{-1}$ 都是连续映射.

显然，等距同构是拓扑同构的特殊情形，而拓扑同构则是同胚的特殊情形.

现在开始讨论有限维赋范线性空间的性质.

**定理 2.1** 设 $E$ 是一个 $n$ 维赋范线性空间，$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 $E$ 的一个基，则存在正数 $M$ 及 $M'$，使得对一切

$$x=\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k\in E,$$

下列不等式成立:

$$M\|x\|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant M'\|x\|. \tag{2}$$

**证** 对任一 $x\in E$，有

$$\begin{aligned}\|x\|=\left\|\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k\right\|&\leqslant\sum_{k=1}^{n}\|e_k\|\,|\xi_k|\\&\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}\|e_k\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\&=m\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned} \tag{3}$$

这里 $m=\left(\sum_{k=1}^{n}\|e_k\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

再任取 $y=\sum_{k=1}^{n}\eta_k e_k\in E$，由不等式(3)，有

$$\|x-y\|\leqslant m\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k-\eta_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4}$$

于是更有

$$|\|x\|-\|y\||\leqslant m\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k-\eta_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

将 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 看成 $\mathbf{R}^n$（当 $E$ 是实空间时）或 $\mathbf{C}^n$（当 $E$ 是复空间时）中的点. 不等式(5)表明 $\|x\|$ 作为 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in\mathbf{R}^n$ 或 $\mathbf{C}$ 的函数是连续的，记

$$f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=\|x\|,$$

并在 $\mathbf{R}^n$ 或 $\mathbf{C}^n$ 中的单位球面 $S$: $\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}=1$ 上考虑这个函数的性质. 由于 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 线性无关并注意到 $S$ 作为 $\mathbf{R}^n$ 或 $\mathbf{C}^n$ 中的有界闭集是紧的且不含零元素，故函数 $f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 在 $S$ 中的任一点处的值都大于零，从而在 $S$ 上有正的下确界 $m'$. 于是

$$f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\geqslant m' \text{ 或 } \|x\|\geqslant m'.$$

任取 $x\in E$，设 $x\neq\theta$，令

$$x'=x\Big/\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

则 $\|x'\|\geqslant m'$，故

$$\|x\|=\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\|x'\|\geqslant m'\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{6}$$

在(3)中令 $M=\frac{1}{m}$, 在(6)中令 $M'=\frac{1}{m'}$, 便得到不等式(2). 证毕.

**推论 1 任一 $n$ 维赋范线性空间 $E$ 必与 $\mathbf{R}^n$ 或 $\mathbf{C}^n$ 拓扑同构.**

**证** 任取 $E$ 中的一个基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 设

$$x=\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k\in E,$$

将 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 看成 $\mathbf{R}^n$ 或 $\mathbf{C}^n$ 中的点, 作 $E$ 到 $\mathbf{R}^n$ 或 $\mathbf{C}^n$ 的映射 $T$: $Tx=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$. 显然 $T$ 是由 $E$ 到 $\mathbf{R}^n$ 或 $\mathbf{C}^n$ 上的同构映射. 于是 $T^{-1}$ 存在. 由不等式 (2) 不难看出, 对任何 $x$、$y\in E$, 有

$$M\|x-y\|\leqslant\|Tx-Ty\|\leqslant M'\|x-y\|. \tag{7}$$

今设 $\{x_m\}\subset E$ 收敛于 $x_0\in E$. 由(7)中第二个不等式, 得到

$$\|Tx_m-Tx_0\|\leqslant M'\|x_m-x_0\|,$$

故 $\{Tx_m\}$ 收敛于 $Tx_0$, 即 $T$ 连续. 由(7)中第一个不等式可证 $T^{-1}$ 也连续. 故 $E$ 与 $\mathbf{R}^n$ 或 $\mathbf{C}^n$ 拓扑同构.

**推论 2 任一 $n$ 维赋范线性空间必为 Banach 空间. 任一赋范线性空间 $E$ 的有限维子空间也必为 Banach 空间, 因而是 $E$ 的闭子空间.**

**证** 第一个结论由推论 1 导出, 第二个结论由第一个结论导出.

下面介绍在赋范线性空间理论中很有用的一条引理, 通常称为 Riesz 引理.

**引理 设 $E_0$ 是赋范线性空间 $E$ 的真闭子空间, 那么对于任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $x_0\in E$, $\|x_0\|=1$, 使不等式 $\|x_0-x\|\geqslant 1-\varepsilon$ 对一切 $x\in E_0$ 成立.**

**证** 因 $E_0$ 是 $E$ 的真子空间, 故存在 $x_1\in E\setminus E_0$. 令

$$d=\inf_{x\in E_0}\|x_1-x\|.$$

因 $E_0$ 是 $E$ 的闭子空间，故 $d>0$. 任取 $\varepsilon$ 满足：$0<\varepsilon<1$，于是 $\frac{d}{1-\varepsilon}>d$，故存在 $x_1'\in E_0$ 使 $\|x_1-x_1'\|<\frac{d}{1-\varepsilon}$. 再令 $x_0=\frac{x_1-x_1'}{\|x_1-x_1'\|}$，则 $\|x_0\|=1$. 对任一 $x\in E_0$，我们有

$$\|x-x_0\|=\left\|x-\frac{x_1-x_1'}{\|x_1-x_1'\|}\right\|=\frac{1}{\|x_1-x_1'\|}\|(\|x_1-x_1'\|x+x_1')-x_1\|,$$

由于 $\|x_1-x_1'\|x+x_1'\in E_0$，故 $\|(\|x_1-x_1'\|x+x_1')-x_1\|\geqslant d$，于是

$$\|x-x_0\|\geqslant\frac{d}{\|x_1-x_1'\|}>1-\varepsilon.$$

证毕.

如果赋范线性空间 $E$ 中的任一有界闭集是紧的，则称 $E$ 是局部紧的.

**定理 2.2 赋范线性空间 $E$ 是有限维的充分必要条件是 $E$ 为局部紧的.**

**证** 必要性. 设 $E$ 是有限维的且设维数是 $n$. 由定理 2.1 推论1，$E$ 与 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{C}^n$ 拓扑同构，利用不等式(7)可以证明，$E$ 中的有界闭集映成 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{C}^n$ 中的有界闭集，反之亦然. 而 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{C}^n$ 中的任一有界闭集是紧的(见第六章§5例1及该章习题第27题)，再由第六章定理 4.8 可知，$E$ 中的任一有界闭集是紧的. 故 $E$ 是局部紧的.

充分性. 用反证法. 设 $E$ 是无限维的，但它的任一有界闭子集是紧的. 令 $S$ 是 $E$ 的单位球面：$S=\{x:\|x\|=1\}$. 则 $S$ 是 $E$ 中的紧集. 任取 $x_1\in S$，记 $E_1$ 为 $x_1$ 张成的子空间，则 $E_1$ 是 $E$ 的有限维真子空间. 由定理2.1 推论 2，$E_1$ 是闭的，再由Riesz 引理，存在 $x_2\in S$ 使 $\|x_2-x\|\geqslant\frac{1}{2}$ 对一切 $x\in E_1$ 成立，特别地，有 $\|x_2-x_1\|\geqslant\frac{1}{2}$. 记 $E_2$ 为 $x_1$，$x_2$ 张成的子空间，则 $E_2$ 也是 $E$ 的有限维真子空间，因此也是闭的. 仍由Riesz 引理，存在 $x_3\in S$，使 $\|x_3-x\|\geqslant\frac{1}{2}$ 对一切 $x\in E_2$ 成

立，特别地，有即$\|x_3-x_k\|\geqslant\frac{1}{2}(k=1,2)$．依此类推，由于$E$是无限维的，可以得到$S$中的一系列元素$x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots$，使得对任何$k\geqslant1$、$l\geqslant1$，当$k\neq l$时，$\|x_k-x_l\|\geqslant\frac{1}{2}$．显然$\{x_k\}$不存在收敛的子列，这与$S$的紧性矛盾．故$E$是有限维的．

在这一节中，我们对具有基的 Banach 空间作了简单介绍，然后对有限维的赋范线性空间作了较详细的讨论，希望读者注意：

1° 本节只对一类很特殊的赋范线性空间——有限维的赋范线性空间定义了维数，这是一个代数概念．至于非有限维的赋范线性空间，我们将它们纳入同一类并将它们统一地称为无限维赋范线性空间．实际上，对于无限维的赋范线性空间也可定义维数，但这已超出本书范围，故不详细讨论；

2° Riesz 引理是赋范线性空间（包括 Banach 空间）中一条很重要的引理，不少地方都需运用它，希望读者充分予以注意．

## §3 内积空间的基本概念与性质

早在泛函分析成为一门独立的学科前，Hilbert 在研究积分方程的求解与特征值理论时，就已经利用了满足条件

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2<+\infty$$

的序列$\{\xi_1,\xi_2,\xi_3,\cdots\}$．他的具体做法是利用一个标准直交系$\{x_n(t)\}$作出积分方程中未知函数的傅立叶级数，于是将第二类线性积分方程化成一个与之等价的无穷代数方程组．因此当时在事实上已经引用了我们现在所熟知的空间$l^2$．后来由于抽象距离空间的出现以及一系列与之相关的概念诸如完备性、列紧性、可分性的引入，人们开始结合这些概念来讨论空间$l^2$，接着发现了函数空间$L^2$具有与$l^2$相同的几何性质，后来又证明了$L^2$与$l^2$是同构

的. 至此 Hilbert 空间理论的要点已大体完成. 因此问题在于如何定义抽象的 Hilbert 空间. 在二维及三维 Euclid 空间中有两个基本概念——长度与角度. 赋范线性空间中元素的范数便是长度概念的推广，但角度概念在赋范线性空间中没有相应的反映. 在二维及三维 Euclid 空间中，重要等式 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|\cos\theta$ 建立了内积与角度间的关系，这里 $\theta$ 是二维或三维向量 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$ 的夹角. 因此为了将角度以及与角度有紧密联系的一些重要概念诸如直交性、直交投影、直交分解等等推广到更加广泛的情形中，比较合适的办法是先将内积的概念推广到更加广泛的情形，然后利用内积反过来定义直交等概念. 在泛函分析中，人们就是循着这样的思想逐步深入的. 至于一般的角度概念，由于很少用到，而本书则完全没有涉及，故不详细讨论.

## 3.1 内积空间的定义及例

**定义 3.1** 设 $U$ 为实(或复)数域 $K$ 上的线性空间，若 $U$ 内任意一对元素 $x$、$y$ 恒对应于 $K$ 中一个数，记为 $(x,y)$ 满足：

(i) $(\alpha x,y)=\alpha(x,y)$；

(ii) $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$，这里 $z\in U$；

(iii) $(x,y)=(y,x)$，当 $K$ 为实数域；

$(x,y)=\overline{(y,x)}$，当 $K$ 为复数域；

(iv) $(x,x)\geqslant 0$，且 $(x,x)=0$ 的充分必要条件是 $x=\theta$.

那末就称 $U$ 为实(或复)内积空间，简称为内积空间，$(x,y)$ 称为元素 $x$ 与 $y$ 的内积.

由内积的定义，不难证明下列事实：

1° 当 $K$ 是实数域时，$(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2,\ y)=\alpha_1(x_1,\ y)+\ \alpha_2(x_2,\ y)$，$(x,\alpha_1y_1+\alpha_2y_2)=\alpha_1(x,y_1)+\alpha_2(x,y_2)$，故 $(x,y)$ 关于 $x$、$y$ 都是线性的.

当 $K$ 是复数域时，$(x,y)$ 关于 $x$ 是线性的，关于第二个变元，则

有$(x, \alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2)=\bar{\alpha}_1(x, y_1)+\bar{\alpha}_2(x, y_2)$. 我们称$(x, y)$关于$y$是反线性的或共轭线性的.

2° 当$x$、$y$中有一个等于零时,$(x, y)=0$.

例如,设$y=\theta$,则$(x, y)=(x, 0y)=0(x, y)=0$.

3° 对任何$x\in\mathfrak{U}$, 令$\|x\|=\sqrt{(x, x)}$,则$\mathfrak{U}$按$\|\cdot\|$是一个实(或复)的赋范线性空间.

只需证明$\|\cdot\|$满足范数的全部条件. 作为例子,我们证明

$$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\| \quad (x, y\in\mathfrak{U}).$$

为此, 先证明下面的Schwarz不等式:

$$|(x, y)|\leqslant\|x\|\|y\| \quad (x, y\in\mathfrak{U}). \tag{1}$$

为明确起见,设$\mathfrak{U}$是复内积空间. 取复数$\lambda$,则

$$(x+\lambda y, x+\lambda y)\geqslant 0$$

即
$$(x, x)+\bar{\lambda}(x, y)+\lambda(y, x)+|\lambda|^2(y, y)\geqslant 0.$$

当$y=\theta$时,由性质2°,$(x, y)=0$,故(1)显然成立. 现设$y\neq\theta$, 令$\lambda=-\dfrac{(x, y)}{(y, y)}$,则

$$(x, x)-\frac{2|(x, y)|^2}{(y, y)}+\frac{|(x, y)|^2}{(y, y)^2}(y, y)\geqslant 0.$$

因此
$$(x, x)-\frac{|(x, y)|^2}{(y, y)}\geqslant 0,$$

或
$$|(x, y)|^2\leqslant(x, x)(y, y),$$

两边开平方,便得到不等式(1).

由(1),对$x, y\in\mathfrak{U}$,有

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2&=|(x+y, x+y)|=|(x+y, x)+(x+y, y)|\\&\leqslant|(x+y, x)|+|(x+y, y)|\leqslant\|x+y\|\|x\|+\\&\quad+\|x+y\|\|y\|\end{aligned}$$

故
$$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|.$$

因此$\mathfrak{U}$按照$\|\cdot\|$是一个赋范线性空间．我们称$\|\cdot\|$是由$\mathfrak{U}$的内积导出的范数．今后我们说内积空间$\mathfrak{U}$是赋范线性空间，如不特别声明，均指按照$\mathfrak{U}$的内积导出的范数$\|\cdot\|$而言．

4° 内积$(x,y)$是$x$、$y$的连续函数．

设$\{x_n\}$、$\{y_n\}$是$\mathfrak{U}$中的点列分别依范数收敛于$x$、$y\in\mathfrak{U}$，由

$$
\begin{aligned}
&|(x_n,y_n)-(x,y)|\\
\leqslant&|(x_n,y_n)-(x,y_n)|+|(x,y_n)-(x,y)|\\
\leqslant&\|x_n-x\|\|y_n\|+\|x\|\|y_n-y\|\longrightarrow 0
\end{aligned}
$$

可知，$(x,y)$是$x$、$y$的连续函数．注意，证明中用到了$\{\|y_n\|\}$有界这一显然的事实．

5° 内积与范数有下列基本关系：

$$(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)，当K为实数域时；\tag{2}$$

$$(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2)，$$

当$K$为复数域时．(2′)

通过直接验算可以证明这两个关系．有了这两个关系，当我们获得了关于范数的某些结论时，往往可以容易地将它们转化到内积上去．(2)及(2′)均称为极化恒等式．

内积空间$\mathfrak{U}$作为赋范线性空间，如果是无限维且完备，则称它为Hilbert空间，如果$\mathfrak{U}$作为赋范线性空间不完备，则由第七章§1.2，$\mathfrak{U}$有完备化空间，记为$\mathfrak{U}_0$．$\mathfrak{U}_0$是一个Banach空间．在$\mathfrak{U}_0$中可以适当地定义内积使它成为Hilbert空间．其实对任何$x$、$y\in\mathfrak{U}_0$，有$\mathfrak{U}_0$中的基本点列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$使$\{x_n\}\to x$、$\{y_n\}\to y$．利用类似于4°中的方法，不难证明$\{(x_n,y_n)\}$是基本序列，故有有限极限，记

$$(x,y)=\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n).\tag{3}$$

可以证明$(x,y)$的值与$\{x_n\}$、$\{y_n\}$的选择无关且$(\cdot,\cdot)$满足内积的全

部条件，因此，$\mathfrak{U}_0$按照(3)定义的内积$(\cdot,\cdot)$是一个内积空间。又因$\mathfrak{U}_0$完备，故为Hilbert空间。所以，对任何内积空间$\mathfrak{U}$，都存在Hilbert空间$\mathfrak{U}_0$，使$\mathfrak{U}_0$是$\mathfrak{U}$的完备化内积空间，而且除去等距同构不计外，$\mathfrak{U}_0$是唯一的。

如果$\mathfrak{U}$是无限维非完备的内积空间，则称它为准Hilbert空间。以后凡提到内积空间时，均指它可以是完备的，也可以是不完备的。

下面介绍几个常见的内积空间。

**例1** 酉空间$\mathbf{C}^n$。关于$\mathbf{C}^n$我们已多次讨论过。在$\mathbf{C}^n$中定义内积：

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{n}\xi_k\bar{\eta}_k, \tag{4}$$

其中$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$。容易证明，由(4)定义的$(\cdot,\cdot)$满足内积的全部条件。故$\mathbf{C}^n$按照(4)定义的内积$(\cdot,\cdot)$是一个内积空间。按照线性代数常用的术语，称$\mathbf{C}^n$为酉空间。由(1)导出的范数是$\|x\|=\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\right)^{1/2}$。

**例2** 空间$l^2$ 在第六章中，作为例子，我们曾经研究了空间$l^p(1\leqslant p<\infty)$。现在设$p=2$，于是得到空间$l^2$，它是由满足

$$\|x\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^2<\infty \tag{5}$$

的一切序列$x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}$构成的集合。$l^2$按照由(5)定义的范数$\|\cdot\|$是一个可分的Banach空间（见第六章习题第15题及本书第81页）。现在在$l^2$中引入内积。任取$l^2$中的元素$x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}$，$y=\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots\}$。由Schwarz不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n\eta_n|\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\eta_n|^2\right)^{1/2}$$

可知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\eta_n$ 绝对收敛．我们规定 $x$ 与 $y$ 的内积为

$$(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\eta_n. \tag{6}$$

因右端的级数绝对收敛，$(x,y)$ 为有限数．其次不难验证，$(\cdot,\cdot)$ 满足内积的全部条件，因此 $l^2$ 按照 $(\cdot,\cdot)$ 是一个内积空间．又因 $l^2$ 是无限维、完备、可分的，故它是一个可分的 Hilbert 空间．

**例 3　空间 $L^2[a,b]$**　在第五章中，我们已对空间 $L^p[a,b]$ $(1\leqslant p<\infty)$ 作了详细讨论，后来在第六章中作为例子又多次引用．今设 $p=2$，于是得到空间 $L^2[a,b]$，它是由满足

$$\|x\|^2=\int_a^b|x(t)|^2dt<\infty \tag{7}$$

的一切函数 $x(\cdot)$ 构成的集合，而且 $L^2[a,b]$ 按照由(7)定义的范数 $\|\cdot\|$ 是一个可分的 Banach 空间．现在在 $L^2[a,b]$ 中引入内积．任取 $L^2[a,b]$ 中的函数 $x(\cdot)$、$y(\cdot)$．由 Schwarz 不等式

$$\int_a^b|x(t)\overline{y(t)}|dt\leqslant\left(\int_a^b|x(t)|^2dt\right)^{1/2}\left(\int_a^b|y(t)|^2dt\right)^{1/2}$$

可知，$x(t)\overline{y(t)}$ 于 $E$ 上是可积的．我们规定 $x$ 与 $y$ 的内积为

$$(x,y)=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt. \tag{8}$$

于是 $(x,y)$ 是有限数且 $(\cdot,\cdot)$ 满足内积的全部条件，因此 $L^2[a,b]$ 按照 $(\cdot,\cdot)$ 是一个内积空间，又因 $L^2[a,b]$ 是无限维、完备、可分的，故它是一个可分的 Hilbert 空间．

**例 4　空间 $L^2([a,b];\omega(\cdot))$**．设 $\omega(\cdot)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的正值可测函数，$x(\cdot)$ 是定义在 $[a,b]$ 上且满足下列条件的复值可测函数：

$$\|x\|^2=\int_a^b\omega(t)|x(t)|^2dt<\infty. \tag{9}$$

我们称 $x(\cdot)$ 是以 $\omega(\cdot)$ 为权的平方可积函数. 将 $[a,b]$ 上以 $\omega(\cdot)$ 为权的一切平方可积函数构成的集合记为 $L^2([a, b]; \omega(\cdot))$. 任取 $L^2([a,b];\omega(\cdot))$ 中的函数 $x(\cdot)$、$y(\cdot)$, 则下面的广义 Schwarz 不等式成立:

$$\int_a^b \omega(t)|x(t)\overline{y(t)}|dt$$

$$\leqslant\left(\int_a^b\omega(t)|x(t)|^2dt\right)^{1/2}\left(\int_a^b\omega(t)|y(t)|^2dt\right)^{1/2}$$

(其实, 只需对函数 $x^0(t)=[\omega(t)]^{1/2}x(t)$ 及 $y^0(t)=[\omega(t)]^{1/2}\cdot y(t)$ 运用Schwarz 不等式就行了). 由广义 Schwarz 不等式可知, $\omega(t)x(t)\overline{y(t)}$ 可积. 我们规定 $x$ 与 $y$ 的内积为

$$(x,y)_\omega=\int_a^b \omega(t)x(t)\overline{y(t)}dt. \tag{10}$$

于是 $(x,y)_\omega$ 是有限数且 $(\cdot,\cdot)_\omega$ 满足内积的全部条件. 因此 $L^2([a, b];\omega(\cdot))$ 按照(10)定义的内积 $(\cdot,\cdot)_\omega$ 是一个内积空间. 还可以证明 $L^2([a,b];\omega(\cdot))$ 按照范数 $\|x\|_\omega=\sqrt{(x,x)_\omega}$ 所导出的距离是完备的, 因此它是 Hilbert 空间(第七章习题第 20 题).

### 3.2 内积空间的特征

设 $\mathfrak{U}$ 为内积空间. 我们已经指出, $\mathfrak{U}$ 按照由它的内积导出的范数是一个赋范线性空间. 自然要问: 任给一赋范线性空间, 它的范数 $\|\cdot\|$ 应具有甚么特征, 才能使它成为内积空间, 而且范数 $\|\cdot\|$ 就是由该内积空间的内积导出.

**引理** 设 $f(\cdot)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的实函数, 连续且对任意的 $\alpha_1$、$\alpha_2\in\mathbb{R}$, 有 $f(\alpha_1+\alpha_2)=f(\alpha_1)+f(\alpha_2)$. 则对任何 $\alpha\in\mathbb{R}$, $f(\alpha)=\alpha f(1)$.

**证** 由假设, 对任何自然数 $n$ 及任何实数 $\alpha$, 有

$$f(n\alpha)=nf(\alpha).$$

取 $\alpha=\dfrac{1}{n}$, 有

$$f(1)=nf\left(\frac{1}{n}\right)\quad 或\quad f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}f(1).$$

于是对任何正有理数$\frac{n}{m}$，有

$$f\left(\frac{n}{m}\right)=\frac{n}{m}f(1).$$

又因 $f(0)=f(2\cdot 0)=2f(0)$，故 $f(0)=0$. 由 $f(\alpha)+f(-\alpha)=f(0)=0$ 可知 $f(-\alpha)=-f(\alpha)$. 于是对任何有理数 $\frac{n}{m}$，有

$$f\left(\frac{n}{m}\right)=\frac{n}{m}f(1).$$

由于 $f$ 连续，故对一切实数 $\alpha$，$f(\alpha)=\alpha f(1)$. 证毕.

**定理 3.1　设 $E$ 是内积空间，则由 $E$ 中内积导出的范数 $\|\cdot\|$ 满足**

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2, \tag{11}$$

**其中 $x$、$y$ 是 $E$ 中任意两个元素. 反之，设 $E$ 是赋范线性空间，如果 $E$ 中的范数满足(11)式，则在 $E$ 中可以定义内积 $(\cdot,\cdot)$ 使 $E$ 成为内积空间且 $E$ 中原来的范数就是由内积 $(\cdot,\cdot)$ 导出的.**

**注**　(11)式称为中线公式或平行四边形公式.

**证**　设 $E$ 是内积空间，由内积的几个条件，有

$$\begin{aligned}
&\|x+y\|^2+\|x-y\|^2\\
&=(x+y,x+y)+(x-y,x-y)\\
&=(x,x+y)+(y,x+y)+(x,x-y)+(-y,x-y)\\
&=[(x,x+y)+(x,x-y)]+[(y,x+y)-(y,x-y)]\\
&=2\|x\|^2+2\|y\|^2
\end{aligned}$$

必要性成立.

今证逆命题. 我们只讨论 $E$ 是复赋范线性空间的情形. 由内积与范数的关系(2′)，要在 $E$ 中定义内积，自然应该令

$$(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2), \quad (12)$$

其中 $x$、$y\in E$. 关键在于验证$(\cdot,\cdot)$满足内积的全部条件. 由(11), 对 $x$、$y$、$z\in E$, 有

$$\begin{aligned}
&(x,z)+(y,z)\\
&=\frac{1}{4}(\|x+z\|^2-\|x-z\|^2+i\|x+iz\|^2-i\|x-iz\|^2)\\
&\quad+\frac{1}{4}(\|y+z\|^2-\|y-z\|^2+i\|y+iz\|^2-i\|y-iz\|^2)\\
&=\frac{1}{2}\left(\left\|\frac{x+y}{2}+z\right\|^2-\left\|\frac{x+y}{2}-z\right\|^2\right)\\
&\quad+\frac{i}{2}\left(\left\|\frac{x+y}{2}+iz\right\|^2-\left\|\frac{x+y}{2}-iz\right\|^2\right)\\
&=2\left(\frac{x+y}{2},z\right). \qquad (13)
\end{aligned}$$

由(12), $(\theta,z)=0$, 在(13)中, 令$y=\theta$, 得到

$$(x,z)=2\left(\frac{x}{2},z\right).$$

再将其中的 $x$ 换成 $x+y$, 有

$$(x+y,z)=2\left(\frac{x+y}{2},z\right).$$

与(13)比较, 可得

$$(x,z)+(y,z)=(x+y,z), \quad (14)$$

故内积的条件(ii)成立.

现在令 $f(\alpha)=(\alpha x,y)$($\alpha$ 为实数). 由(14)可知, 对任意两个实数 $\alpha_1$, $\alpha_2$, $f(\alpha_1+\alpha_2)=f(\alpha_1)+f(\alpha_2)$. 由等式(12), $(x,y)$ 关于 $x$ 是连续的, 故 $f$ 连续. 由引理, 对任何实数 $\alpha$, $f(\alpha)=\alpha f(1)$, 因此

$$(\alpha x,y)=\alpha(x,y). \quad (15)$$

由性质$\|ix\|=\|x\|$，可得

$$
\begin{aligned}
(ix,y)&=\frac{1}{4}(\|ix+y\|^2-\|ix-y\|^2+i\|ix+iy\|^2-i\|ix-iy\|^2)\\
&=\frac{1}{4}(\|x-iy\|^2-\|x+iy\|^2+i\|x+y\|^2-i\|x-y\|^2)\\
&=\frac{i}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2)\\
&=i(x,y).
\end{aligned}
\tag{16}
$$

于是当$\alpha$是复数时，(15)仍成立．故内积的条件(i)成立．类似地，我们还可以证明

$$(x,y)=\overline{(y,x)};$$

$$(x,x)=\|x\|^2.$$

故内积的条件(iii)、(iv)成立．因此$E$按照(12)定义的内积是一个内积空间．不难验证，由内积(12)导出的范数就是$E$原来的范数．证毕．

**注**　如果$E$是实赋范线性空间且满足(11)，只要令

$$(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2),\tag{17}$$

便可以证明$E$按照(17)是一个实内积空间，而且由内积(17)导出的范数就是$E$原来的范数．

并非任一赋范线性空间的范数都能由内积导出．

**例5**　空间$C[a,b]$中的范数由等式$\|x\|=\max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)|$给出($x\in C[a,b]$)．由于$\|\cdot\|$不满足(11)，故它不能由内积导出．

本节引进并讨论了内积空间的基本概念与基本性质，希望读者注意：

1°　内积空间是空间$\mathbf{R}^n$、$\mathbf{C}^n$的推广，但这种推广是重要的、有意义的．由于内积的引进，一方面可以由它导出满足等式(11)的范数，使得内积空间成为一类特殊的赋范线性空间．另一方

面可以利用它定义直交．这就使得内积空间保留并继承了空间 $\mathbb{R}^n$、$\mathbb{C}^n$ 以及一般赋范线性空间很多有用的性质；

2° 非完备的内积空间都可以完备化而成为 Hilbert 空间，而且除去等距同构不计外，完备化后获得的 Hilbert 空间是唯一的；

3° 并非任一赋范线性空间的范数都能由内积导出，故研究范数可以由内积导出的条件是有意义的．作为例子，本节提出了一个充分必要条件．

## §4 内积空间中的直交与直交系

### 4.1 直交与直交分解

利用内积可以引进直交．这一段的目的就是要引进这一概念，并讨论Hilbert空间的一个重要特性——直交分解．

**定义 4.1** 内积空间 $\mathfrak{U}$ 中的元素 $x$、$y$ 叫做直交，是指 $x$ 与 $y$ 的内积等于零，即 $(x,y)=0$，记为 $x\perp y$．设 $M$ 是 $\mathfrak{U}$ 的一个子集，若 $x$ 与 $M$ 内的任一元素直交，则称 $x$ 与 $M$ 直交，记为 $x\perp M$．设 $N$ 也是 $\mathfrak{U}$ 的一个子集，如果对任意的 $x\in M$，任意的 $y\in N$，有 $x\perp y$，则称 $M$ 与 $N$ 直交，记为 $M\perp N$．$\mathfrak{U}$ 中与 $M$ 直交的元素的全体叫做 $M$ 的直交余，记为 $M^{\perp}$．

由定义 4.1 容易证明：

1° 设 $\mathfrak{U}$ 中的元素 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 相互直交．记 $x=x_1+x_2+\cdots+x_n$，则

$$\|x\|^2=\|x_1\|^2+\|x_2\|^2+\cdots+\|x_n\|^2,$$

这是勾股定理在内积空间中的推广；

2° 若 $\mathfrak{U}$ 中的元素 $x$ 与 $\mathfrak{U}$ 中一个稠密子集 $L$ 直交，则 $x=\theta$；

3° 对任何子集 $M\subset\mathfrak{U}$，其直交余 $M^{\perp}$ 是 $\mathfrak{U}$ 的闭子空间；

我们只证明 2°、3°，而将 1°留给读者作为练习.

性质 2° 的证明. 因 $L$ 在 $\mathfrak{U}$ 中稠密，故存在点列 $\{x_n\}\subset L(n=1,2,3,\cdots)$收敛于 $x$，由内积的连续性，有

$$(x,x)=\lim_{n\to\infty}(x,x_n)=0,$$

故 $x=\theta$.

性质 3° 的证明. 设 $x,y\in M^{\perp}$，则对任何 $z\in M$，

$$(\alpha x+\beta y,z)=\alpha(x,z)+\beta(y,z)=0,$$

故 $\alpha x+\beta y\in M^{\perp}$. 现在设 $x$ 属于 $M^{\perp}$ 的闭包，则存在点列 $\{x_n\}\subset M^{\perp}$收敛于 $x$. 由内积的连续性，有

$$(x,z)=\lim_{n\to\infty}(x_n,z)=0.$$

故 $x\in M^{\perp}$，$M^{\perp}$是 $\mathfrak{U}$ 的闭子空间. 证毕.

设 $E$ 是内积空间 $\mathfrak{U}$ 的一个子集，$x\in\mathfrak{U}$ 为给定的元素. 如果 $E$ 中存在元素 $y$ 使

$$\|x-y\|=\inf_{z\in E}\|x-z\|,$$

则称 $y$ 是 $x$ 在 $E$ 中的一个最佳逼近元.

仍设 $E$ 是 $\mathfrak{U}$ 的一个子集，如果对任意的 $y_1$、$y_2\in E$ 以及满足 $0\leqslant\alpha\leqslant1$ 的任意实数 $\alpha$，元素 $\alpha y_1+(1-\alpha)y_2$ 仍属于 $E$，则称 $E$ 是 $\mathfrak{U}$中的凸集. 如果 $E$ 既是凸集又是闭集，则称 $E$ 是 $\mathfrak{U}$ 中的凸闭集.

Hilbert 空间中的凸闭集有下述重要特性.

**定理 4.1** **设 $E$ 是 Hilbert 空间 $\mathfrak{U}$ 中的凸闭集，则 $\mathfrak{U}$ 中的任一元素 $x$ 在 $E$ 中存在唯一的最佳逼近元.**

**证** 令

$$\alpha=\inf_{z\in E}\|x-z\|,$$

则存在点列 $\{y_n\}\subset E$ 使 $\|x-y_n\|\to\alpha$. 由于 $E$ 是凸集，故

$\dfrac{y_n+y_m}{2}\in E$，因此

$$\left\|x-\frac{y_n+y_m}{2}\right\|\geqslant\alpha.$$

在中线公式(§3式(11))中将 $x$ 换成 $y_m-x$，将 $y$ 换成 $x-y_n$，则有

$$\begin{aligned}\|y_m-y_n\|^2&=\|y_m-x+x-y_n\|^2\\&=2\|y_m-x\|^2+2\|x-y_n\|^2-4\left\|x-\frac{y_n+y_m}{2}\right\|^2\\&\leqslant 2\|y_m-x\|^2+2\|x-y_n\|^2-4\alpha^2.\end{aligned}$$

因为当 $m$、$n\to\infty$时，$\|y_m-x\|\to\alpha$，$\|x-y_n\|\to\alpha$，故

$$\|y_m-y_n\|\to 0\ (m、n\to\infty).$$

因此$\{y_n\}$是基本点列，它在 $\mathscr{U}$ 中有极限，设为 $y$. 因$E$是闭集，故 $y\in E$. 由等式

$$\|x-y\|=\lim_{n\to\infty}\|x-y_n\|=\alpha$$

可知，$y$ 是 $x$ 在 $E$ 中的最佳逼近元. 最佳逼近元的存在性得证.

现在证明唯一性. 设 $y'$ 也是 $x$ 在 $E$ 中的最佳逼近元. 仍由中线公式，有

$$\begin{aligned}0\leqslant\|y-y'\|^2&=\|y-x+x-y'\|^2\\&=2\|y-x\|^2+2\|x-y'\|^2-4\left\|x-\frac{y+y'}{2}\right\|^2\\&\leqslant 2\alpha^2+2\alpha^2-4\alpha^2=0.\end{aligned}$$

故 $y-y'=\theta$ 即 $y=y'$. 最佳逼近元唯一. 证毕.

由定理 4.1 可以得到下面重要的直交分解定理.

**定理 4.2** **设$M$是 Hilbert 空间 $\mathscr{U}$ 的闭子空间，则对 $\mathscr{U}$ 中任一元素 $x$，有下列唯一的直交分解:**

$$x=y+z,\ \text{其中}\ y\in M,\ y\in M^{\perp}. \tag{1}$$

**$y$ 称为 $x$ 在$M$中的直交投影.**

**证** 由假设，$M$ 是 $\mathscr{U}$ 的闭子空间，故为凸闭集. 由定理 4.1，$x$ 在$M$中存在唯一的最佳逼近元 $y$. 记 $\alpha=\|x-y\|=\inf\limits_{u\in M}\|x-u\|$.

由于$y\in M$，于是对任一数$\lambda$以及任一元素$u\in M$，$y+\lambda u\in M$，故

$$\begin{aligned}\alpha^2&\leqslant\|x-(y+\lambda u)\|^2\\&=\|x-y\|^2-\bar{\lambda}(x-y,u)-\lambda(u,x-y)+|\lambda|^2\|u\|^2.\end{aligned}$$

取 $\lambda=\dfrac{(x-y,u)}{\|u\|^2}$并注意到$\|x-y\|=\alpha$，得

$$\alpha^2\leqslant\alpha^2-\frac{|(x-y,u)|^2}{\|u\|^2}.$$

于是

$$|(x-y,u)|^2\leqslant 0.$$

显然只有当$(x-y,u)=0$时，上式才能成立。注意到$u$是$M$中任一元素，故$x-y\perp M$。令$z=x-y$，便有

$$x=y+z,\text{其中 } y\in M,z\in M^{\perp}.$$

直交分解的存在性得到证明。

现证直交分解的唯一性。设另有分解$x=y'+z'$，其中$y'\in M$，$z'\in M^{\perp}$，由

$$y+z=y'+z'$$

可得$y-y'=z'-z$。由于$y-y'\in M$，$z'-z\in M^{\perp}$，故$(y-y',y-y')=(y-y',z'-z)=0$，因此$y=y'$，由此有$z=z'$。所以分解是唯一的。证毕。

### 4.2 内积空间中的标准直交系

在§4.1中，我们利用内积引进了直交概念。有了直交概念，便可以进而引入直交系，它是Euclid空间中直角坐标系的一种推广。在这一段中，我们先讨论内积空间中标准直交系的一些基本性质，然后在下段中讨论Hilbert空间中标准直交系的存在性。为简单起见，我们限于讨论最多只含可列个元素的直交系，至于一般情形读者可以参考其他著作，但从方法上来说两者并无本质的差别。

**定义 4.2** 内积空间 $\mathfrak{U}$ 中的元素列 $\{e_n\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 如果满足

$$(e_m, e_n)=\begin{cases}0, m\neq n;\\1, m=n,\end{cases}\tag{2}$$

则称 $\{e_n\}$ 是 $\mathfrak{U}$ 中的一个标准直交系. 对任一元素 $x\in\mathfrak{U}$, 称 $c_n=(x,e_n)$ 为 $x$ 关于 $\{e_n\}$ 的第 $n$ 个 Fourier 系数, 或简称为 Fourier 系数. 而称 $\{(x,e_n)\}$ 为 $x$ 关于 $\{e_n\}$ 的 Fourier 系数集.

**例 1** $L^2[0,2\pi]$ 内的函数族 $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}\right\}$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 是 $L^2[0,2\pi]$ 中的一个标准直交系.

**例 2** $l^2$ 中的元素列 $\{e_n\}$:

$$e_n=\{(\underbrace{0,\cdots,0}_{n\text{个}},1,0,\cdots)\}\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

是 $l^2$ 中的一个标准直交系.

**例 3** $L^2\left([-1,1];\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)$ 中的标准直交系. 考察函数系

$$T_n(t)=\cos(n\arccos t)\quad(t\in[-1,1], n=1,2,3\cdots)$$

下面证明 $T_n(t)$ 是 $n$ 次多项式, 我们称它为第一类 Chebyshev 多项式. 易见 $T_0(t)=1, T_1(t)=t$. 在等式

$$\cos n\theta+\cos(n-2)\theta=2\cos\theta\cos(n-1)\theta$$

中, 令 $\theta=\arccos t$ $(t\in[-1,1])$ 可知, Chebyshev 多项式满足下列递推公式:

$$T_n(t)=2tT_{n-1}(t)-T_{n-2}(t)\quad(n=2,3,\cdots).\tag{3}$$

由(3), 我们有

$$T_2(t)=2t^2-1;$$

$$T_3(t)=4t^3-3t;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

故 $T_n(t)$ 确为 $n$ 次多项式. 注意到 $t=\cos\theta$, 我们有

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_n(t)T_m(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt=\int_0^{\pi}\cos n\theta\cos m\theta d\theta=0\ (n\neq m);$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_n^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt=\int_0^{\pi}\cos^2 n\theta d\theta=\frac{\pi}{2}\quad(n\neq 0);$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_0^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt=\int_{-1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\int_0^{\pi}d\theta=\pi.$$

记

$$\check{T}_n(t)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{1}{\pi}}T_n(t),\ n=0;\\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}T_n(t),\ n\neq 0.\end{cases}$$

那么$\{\check{T}_n\}$ $(n=0,1,2,\cdots)$便是$L^2([-1,1];\ \frac{1}{\sqrt{1-t^2}})$中的一个标准直交系.

**定理 4.3** **设$\{e_n\}$是内积空间 H 中的一个标准直交系，则对任意的$x\in H$，不等式**

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(x,e_n)|^2\leqslant\|x\|^2 \tag{4}$$

**成立**

**证** 令$c_n=(x,e_n)$ $(n=1,2,3,\cdots)$. 由以下一系列等式

$$\left\|x-\sum_{k=1}^{n}c_ke_k\right\|^2=\left(x-\sum_{k=1}^{n}c_ke_k,x-\sum_{k=1}^{n}c_ke_k\right)$$

$$=\|x\|^2-\sum_{k=1}^{n}c_k(e_k,x)-\sum_{k=1}^{n}\bar{c}_k(x,e_k)+\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2$$

$$=\|x\|^2-\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2 \tag{5}$$

及$\left\|x-\sum_{k=1}^{n}c_ke_k\right\|\geqslant 0$，可得

$$\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2\leqslant\|x\|^2.$$

令 $n\to\infty$ 可知，(4)式成立．证毕．

(4)式称为 Bessel 不等式．由这一不等式，$\mathfrak{U}$ 中的任一元素 $x$ 关于 $\{e_n\}$ 的 Fourier 系数组成的序列 $\{c_n\}$ 必属于 $l^2$．反之，对 $l^2$ 中的任一序列 $\{c_n\}$，是否存在 $\mathfrak{U}$ 中的元素使得 $\{c_n\}$ 恰好是这个元素关于 $\{e_n\}$ 的 Fourier 系数集？下面的 Riesz-Fischer 定理给这个问题以肯定的回答，但需假定内积空间 $\mathfrak{U}$ 是完备的，即需假定 $\mathfrak{U}$ 是 Hilbert 空间．

**定理 4.4 (Riesz-Fisher)** 设 $\{e_n\}$ 是 Hilbert 空间 $\mathfrak{U}$ 中的一个标准直交系，数列 $(c_n)\in l^2$．那么存在 $\mathfrak{U}$ 中唯一的元素 $x$，使得 $c_n$ 是 $x$ 关于 $\{e_n\}$ 的Fourier 系数且等式

$$\|x\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2 \tag{6}$$

成立．

**证** 令 $x_n=\sum_{k=1}^{n}c_ke_k$．设自然数 $m$、$n$ 满足 $m>n$．利用等式(2)及定义 4.1 后面的性质 1°，有

$$\|x_m-x_n\|^2=\left\|\sum_{k=n+1}^{m}c_ke_k\right\|^2=\sum_{k=n+1}^{m}|c_k|^2. \tag{7}$$

由于当 $m$、$n\to\infty$ 时，$\sum_{k=n+1}^{m}|c_k|^2\to0$，故 $\|x_m-x_n\|\to0$，因此 $\{x_n\}$ 是 $\mathfrak{U}$ 中的基本点列．由 $\mathfrak{U}$ 的完备性，存在元 $x\in\mathfrak{U}$ 使 $\{x_n\}\to x$.

现设 $k$ 为任一给定的自然数．由内积的连续性，有

$$(x_n,e_k)\to(x,e_k)\quad(n\to\infty).$$

另一方面，当 $n>k$ 时，$(x_n,e_k)=c_k$，故

$$c_k=(x,e_k).$$

为清楚计，将式中的 $k$ 换成 $n$，可得 $(x,e_n)=c_n$. 因此 $c_n$ 是 $x$ 关于 $\{e_n\}$ 的 Fourier 系数.

再由 $\|x_n\|^2=\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2$ 及 $\|x_n\|\to\|x\|$ 可知，$\|x\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2$. 等式(6)成立. 证毕.

等式(6)称为 Parseval 公式或封闭公式，由定理 4.3 可知，不论内积空间 $\mathfrak{U}$ 是否完备也不论标准直交系 $\{e_n\}$ 是怎样给出的，Bessel 不等式始终成立. 但 Parseval 公式则未必总是成立. 这是因为 $\{e_n\}$ 中的元素"不是足够多"的缘故. 如果 $\{e_n\}$ 中的元素"足够多"，那么 Parseval 公式就有可能对一切元素 $x\in\mathfrak{U}$ 都成立. 当这种情形出现时，我们称 $\{e_n\}$ 是完备的. 具体说，有下面的定义:

**定义 4.3** 设 $\{e_n\}$ 是内积空间 $\mathfrak{U}$ 中的一个标准直交系，如果对每个 $x\in\mathfrak{U}$，Parseval 公式

$$\|x\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|(x,e_n)|^2$$

成立，则称 $\{e_n\}$ 是完备的.

与完备性密切相关的是完全性.

**定义 4.4** 设 $\{e_n\}$ 是内积空间 $\mathfrak{U}$ 中的一个标准直交系，$x\in\mathfrak{U}$. 如果由 $(x,e_n)=0$ 对一切 $n$ 成立可以导出 $x=\theta$，则称 $\{e_n\}$ 是完全的.

**定理 4.5** 设 $\{e_n\}$ 是Hilbert空间 $\mathfrak{U}$ 中的一个标准直交系，则下列性质等价:

(i) $\{e_n\}$ 是完备的;

(ii) 对 $\mathfrak{U}$ 中任一元素 $x$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n$ 在 $\mathfrak{U}$ 中收敛于 $x$;

(iii) 对 $\mathfrak{U}$ 中任意两个元素 $x$、$y$，有

$$(x, y)=\sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)\overline{(y, e_n)};\tag{8}$$

(iv) $\{e_n\}$ **是完全的.**

证 我们采用路线"(i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(iv)⇒(i)"来证明定理.

(i)⇒(ii). 由定理 4.3 中的等式(5)并注意到 $c_k=(x, e_k)$，有

$$\left\|x-\sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k\right\|^2=\|x\|^2-\sum_{k=1}^{n}|(x, e_k)|^2.$$

因$\{e_n\}$完备，故 Parseval 公式$\|x\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|(x, e_k)|^2$成立，或者说

$$\|x\|^2=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|(x, e_k)|^2.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x-\sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k\right\|^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\|x\|^2-\sum_{k=1}^{n}|(x, e_k)|^2\right)=0.$$

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n$在 H 中收敛于 $x$. (ii)成立.

(ii)⇒(iii). 设 $x$、$y$ 为 H 中任意两个元素. 令

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k,\ y_n=\sum_{k=1}^{n}(y, e_k)e_k,$$

于是
$$(x_n, y_n)=\sum_{k=1}^{n}(x, e_k)\overline{(y, e_k)}.$$

由(ii)中的假设，则有

$$\{x_n\}\to x,\ \{y_n\}\to y.$$

再由内积的连续性，

$$(x,y)=\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)\overline{(y,e_k)}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)\overline{(y,e_k)}.$$

(iii)⇒(iv)．设 $x\in H$ 且 $(x,\ e_n)=0$ 对一切 $n$ 成立．由等式(8)，对任何 $y\in H$，有

$$(x,y)=0,$$

故 $x=\theta$.

(iv)⇒(i)．设 $x$ 为 $H$ 中一给定的元素．由 Bessel 不等式，$\{(x,e_n)\}\in l^2$．再由定理 4.4，存在 $y\in H$ 使 $(x,\ e_n)$ 为 $y$ 关于 $\{e_n\}$ 的Fourier 系数且

$$\|y\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|(x,e_n)|^2.$$

注意到 $(x,e_n)$ 也是 $x$ 关于 $\{e_n\}$ 的 Fourier 系数，故 $x-y$ 关于 $\{e_n\}$ 的 Fourier 系数是 $(x,e_n)-(x,e_n)=0$．由(iv)中的假设，有 $x-y=\theta$．因此

$$\|x\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|(x,e_n)|^2,$$

Parseval 公式成立．证毕．

**注** 容易看出，对于未必完备的内积空间来说，定理 4.5 中的(i)、(ii)及(iii)也是等价的．论证(i)⇒(ii)⇒(iii)与 $H$ 完备的情形完全一样，无须作任何改变．至于(iii)⇒(i)，只需在(iii)中令 $x=y$ 便能得到(i)．注意到这些，便可得下面的推论．

**推论** 设内积空间 $\mathfrak{U}$ 中存在完备的标准直交系，则 $\mathfrak{U}$ 是可分的.

**证** 设 $\{e_n\}$ 是 $\mathfrak{U}$ 中的完备标准直交系. 由以上的注，定理4.5 (ii)成立，故 $\{e_n\}$ 张成的子空间在 $\mathfrak{U}$ 中稠密，因此诸 $e_n$ 以有理数为系数的所有可能的线性组合构成的集 $L$ 在 $\mathfrak{U}$ 中也稠密. 但 $L$ 可列，故 $\mathfrak{U}$ 可分. 证毕.

**例5** 1° 函数族 $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}\right\}$ (见例1)是 $L^2[-\pi,\pi]$ 中的一个完备标准直交系，这是因为由三角多项式族张成的子空间在 $L^2[-\pi,\pi]$ 中稠密，因此该直交系是完全的，故完备.

2° $l^2$ 中的元素 $\{e_n\}$ (见例2) 是 $l^2$ 中的一个完备标准直交系. 这是因为对每个 $x=\{c_n\}\in l^2$，有 $\|x\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2$. 注意到 $c_n$ $(=(x,e_n))$ 就是 $x$ 关于 $\{e_n\}$ 的 Fourier 系数，因此 Parseval 公式成立，故完备.

3° 多项式族 $\{\check{T}_n(\cdot)\}$ (见例3)是 $L^2\left([-1,1];\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)$ 中的一个完备标准直交系. 我们将证明扼要叙述于下：用 $M$ 表示 $L^2[-\pi,\pi]$ 中一切偶函数构成的子空间. 显然 $M$ 是闭的且函数族 $\{\cos n\theta\}$ $(n=0,1,2,\cdots,\theta\in[-\pi,\pi])$ 张成的子空间在 $M$ 中稠密. 因此当 $\theta\in[0,\pi]$ 时，函数族 $\{\cos n\theta\}$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 张成的子空间在 $L^2[0,\pi]$ 中稠密，这是因为 $L^2[0,\pi]$ 中的每一个函数可以延拓成 $[-\pi,\pi]$ 上的偶函数，因而属于 $M$.

现在再考察 $L^2[0,\pi]$ 与 $L^2\left([-1,1];\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)$ 之间的关系. 作由变量 $\theta$ 到变量 $t$ 的映射：

$$t=\cos\theta \quad (\text{即 } \theta=\arccos t),$$

这里 $\theta\in[0,\pi]$，$t\in[-1,1]$. 由此可以证明空间 $L^2[0,\pi]$ (其中的

函数以 $\theta$ 为自变量）与空间 $L^2\left([-1,1];\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)$（其中的函数以 $t$ 为自变量）等距同构. 由 $T_n(t)$、$\check{T}_n(t)$ 与 $\cos n\theta$ 间的关系（见例 3）可知，由 $\{T_n(t)\}$，因而由 $\{\check{T}_n(t)\}$ 张成的子空间在 $L^2\left([-1,1],\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)$ 中稠密. 例 3 中已经证明 $\{\check{T}_n(t)\}$ 是 $L^2\left([-1,1],\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)$ 中的标准直交系. 由稠密性可知 $\{\check{T}_n(t)\}$ 在 $L^2\left([-1,1],\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)$ 中是完全的，因此完备.

### 4.3 Schmidt 直交化法

内积空间 $\mathfrak{U}$ 中的任一可列子集均可用 Schmidt 直交化方法把它转化成一个标准直交系.

**定理 4.6 设 $\mathfrak{X}=\{x_n\}$ 是内积空间 $\mathfrak{U}$ 中的一个可列子集，则由 $\mathfrak{X}$ 必可作出一个标准直交系 $\{e_n\}$，使得 $\mathfrak{X}$ 张成的子空间与 $\{e_n\}$ 张成的子空间相同.**

**证** 设 $x_{n_1}$ 是 $\mathfrak{X}$ 中第一个不等于零的元素，令

$$e_1=\frac{x_{n_1}}{\|x_{n_1}\|},$$

则 $e_1$ 的范数 $\|e_1\|=1$. 设 $x_{n_2}$ 是 $\mathfrak{X}$ 中第一个与 $e_1$ 线性无关的元素，令

$$h_2=x_{n_2}-(x_{n_2},e_1)e_1,$$

则 $h_2\neq\theta$（否则将有 $x_{n_2}=(x_{n_2},e_1)e_1$），又因

$$(h_2,e_1)=(x_{n_2},e_1)-(x_{n_2},e_1)(e_1,e_1)=0$$

故 $h_2\perp e_1$. 令

$$e_2=\frac{h_2}{\|h_2\|},$$

则 $e_2$ 的范数 $\|e_2\|=1$. 设 $x_{n_3}$ 是 $\mathfrak{X}$ 中第一个与 $e_1,e_2$ 线性无关的元素，令

$$h_3=x_{n_3}-(x_{n_3},e_1)e_1-(x_{n_3},e_2)e_2,$$

则 $h_3\neq\theta$ 且 $h_3\perp e_j(j=1,2)$，其证法与前面相同．令

$$e_3=\frac{h_3}{\|h_3\|},$$

则$e_3$的范数$\|e_3\|=1$．继续上述步骤，假设已作好了相互直交且范数均为 1 的元素 $e_1,e_2,e_3,\cdots,e_{k-1}$．设 $x_{n_k}$ 是 $\mathscr{X}$ 中第一个与$e_1,e_2,\cdots,e_{k-1}$线性无关的元素，令

$$h_k=x_{n_k}-\sum_{j=1}^{k-1}(x_{n_k},e_j)e_j, \tag{9}$$

则 $h_k\neq\theta$，且 $h_k\perp e_j(j=1,2,\cdots,k-1)$．再令

$$e_k=\frac{h_k}{\|h_k\|}. \tag{10}$$

于是得到有限个相互直交且范数均为 1 的元素 $e_1,\cdots,e_k$．如果 $\mathscr{X}$ 张成的子空间是有限维的，则上述步骤经过有限次就会终止．否则，便可继续进行下去．于是得到可列个相互直交且范数均为 1 的元素：$e_1,e_2,\cdots$．不论那一种情形，我们都能得到标准直交系$\{e_k\}$．$\{e_k\}$是有限集或可列集．

现证明$\{e_k\}$张成的子空间 $L$ 与 $\mathscr{X}$ 张成的子空间 $L'$相同．由建立标准直交系的过程容易看出，$e_1$ 可用 $x_{n_1}$线性表示，$e_2$可用 $x_{n_1}$，$x_{n_2}$线性表示．由(9)、(10)，用归纳法不难证明 $e_k$可用 $x_{n_1},x_{n_2},\cdots,x_{n_k}(k=1,2,3,\cdots)$线性表示，因此 $L\subset L'$．

反之，$x_{n_1}$ 也可以用 $e_1$ 线性表示，$x_{n_2}$可用 $e_1,e_2$ 线性表示，仍由(9)、(10)并用归纳法可以证明，$x_{n_k}$可用 $e_1,\cdots,e_k(k=1,2,\cdots)$线性表示，因此 $L'\subset L$，故 $L=L'$．证毕．

**推论　任何可分 Hilbert 空间 $\mathfrak{U}$ 必存在完备的标准直交系．**

**证**　因 $\mathfrak{U}$ 可分，故 $\mathfrak{U}$ 中有可列的稠密子集$\{x_n\}$．由定理 4.6，利用$\{x_n\}$可建立标准直交系$\{e_n\}$且$\{x_n\}$与$\{e_n\}$张成的子空间相同．而$\{x_n\}$在 $\mathfrak{U}$ 中稠密，故$\{x_n\}$因而$\{e_n\}$张成的子空间在 $\mathfrak{U}$ 中稠密．用

$M$表示这个子空间. 如果$x\in H$且$(x, e_n)=0$对$n=1,2,3,\cdots$均成立，则$x$与$M$直交. 由定义 4.1 后面的性质 2°可知，$x=\theta$. 故$\{e_n\}$完全，由定理 4.5, $\{e_n\}$完备. 证毕.

**例 6** $L^2((-\infty,\infty);e^{-t^2})$中的完备标准直交系.

显然 $1, t, t^2, \cdots, t^n, \cdots$都属于 $L^2((-\infty,+\infty);e^{-t^2})$. 现在我们将函数族$\{1, t, t^2, \cdots\}$直交化. 令

$$\omega(t)=e^{-t^2},$$

则

$$\omega'(t)=-2te^{-t^2}, \omega''(t)=(4t^2-2)e^{-t^2}, \cdots.$$

由数学归纳法可以证明(详细过程从略)

$$\omega^{(n)}(t)=y_n(t)e^{-t^2}, \tag{11}$$

其中 $y_n(t)$是 $t$ 的 $n$ 次多项式，其最高次项的系数是$(-2)^n$. 注意到对任何多项式 $p$, 函数 $e^{-t^2}p(t)$在$(-\infty,\infty)$ 上可积再注意到

$$\lim_{t\to-\infty} e^{-t^2}p(t)=\lim_{t\to+\infty} e^{-t^2}p(t)=0,$$

于是当 $u(t)$是多项式时，我们可以对下述积分实施多次分部积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}y_n(t)u(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\omega^{(n)}(t)u(t)dt$$

$$=\cdots=(-1)^n\int_{-\infty}^{\infty}\omega(t)u^{(n)}(t)dt. \tag{12}$$

故当 $u(t)$的次数小于 $n$ 时，由于$u^{(n)}(t)=0$, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}y_n(t)u(t)dt=0,$$

这表明 $y_n$在 $L^2((-\infty,+\infty);e^{-t^2})$ 中与所有次数低于 $n$ 的多项式直交. 因此$\{y_n\}$ $(n=0,1,2,\cdots)$实际上是函数族$\{1, t, t^2, \cdots\}$经过直交化而得到的多项式族. 因 $y_n(t)$, 不恒为零，故$\|y_n\|\neq0$, 这里$\|\cdot\|$表$L^2((-\infty,\infty), e^{-t^2})$中的范数. 令

$$H_n(t)=y_n(t)/\|y_n\|,$$

则$\{H_n\}$ 是 $L^2((-\infty, \infty); e^{-t^2})$ 中的一个标准直交系. 我们称 $H_n(t)$ 为 Hermite 多项式. 现在求$\|y_n\|$的值. 因为 $y_n(t)$ 最高次项的系数是$(-2)^n$, 故

$$y_n^{(n)}(t)=(-2)^n n!.$$

在(12)中令 $u(t)=y_n(t)$, 可得

$$\begin{aligned}
\|y_n\|^2&=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}[y_n(t)]^2 dt\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\omega^{(n)}(t)y_n(t)dt-(-1)^n\int_{-\infty}^{\infty}\omega(t)y_n^{(n)}(t)dt\\
&=2^n n!\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt=2^n n!\sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

故 $\|y_n\|=(2^n n!\sqrt{\pi})^{1/2}$. 再由(11)可知 Hermite 多项式具有如下的形式:

$$H_n(t)=\frac{1}{(2^n n!\sqrt{\pi})^{1/2}}e^{t^2}\frac{d^n}{dt^n}(e^{-t^2})\quad (n=0,1,2,\cdots).$$

最后证明$\{H_n\}$ 的完备性. 由第一册第 210 页中部的一个不等式可知, 多项式的全体 $P$ 在 $L^2[-N,N]$ 中稠密. 这里 $N$ 是任一给定的自然数. 由此可以证明 $P$ 在空间 $L^2([-N,N];e^{-t^2})$ 中稠密. 将 $L^2([-N,N];e^{-t^2})$中的函数延拓到$[-N,N]$之外, 使之在$[-N,N]$之外处处为零, 并仍用 $L^2([-N,N];e^{-t^2})$ 记这些经过延拓后的函数的全体, 于是空间 $L^2([-N, N];e^{-t^2})$ 便成为 $L^2((-\infty,\infty);e^{-t^2})$的子空间. 而且$L=\bigcup\limits_{N=1}^{\infty}L^2([-N,N]; e^{-t^2})$ 在 $L^2((-\infty,\infty);e^{-t^2})$ 中稠密. 由于对每个 $N$, $P$ 在 $L^2([-N,N];e^{-t^2})$中稠密, 因而在 $L$ 中稠密进而在 $L^2((-\infty,\infty);e^{-t^2})$中稠密. 另一方面, 每个多项式均可表为$\{H_n\}$ 中有限个元素的线性组合, 因此$\{H_n\}$张成的子空间在 $L^2((-\infty,\infty);e^{-t^2})$ 中稠密. 由定义 4.1 后面的性质 2°, $\{H_n\}$完全. 再由定理 4.5, $\{H_n\}$完备.

**4.4 可分 Hilbert 空间的同构性**

证明了任一可分 Hilbert 空间中存在完备的标准直交系后，便能进一步证明可分 Hilbert 空间的一个重要特性——所有可分 Hilbert 空间是彼此等距同构的.

**定理 4.7** **每一个实(或复)可分 Hilbert 空间必与实(或复)空间 $l^2$ 等距同构，因此所有实(或复)可分 Hilbert 空间彼此等距同构.**

**证** 设 $\mathfrak{U}$ 为实(或复)可分 Hilbert 空间，$\{e_n\}$ 是 $\mathfrak{U}$ 中的一个完备标准直交系，$x$ 是 $\mathfrak{U}$ 中任一元素，$\{c_n\}$ 是 $x$ 关于 $\{e_n\}$ 的 Fourier 系数集. 作 $\mathfrak{U}$ 到 $l^2$ 中的映射 $T$: $Tx=\{c_n\}$. $T$ 显然具有下列性质:

(i) 设 $\alpha$, $\beta$ 为数，$x$、$y\in\mathfrak{U}$ 且 $Tx=\{c_n\}$, $Ty=\{c'_n\}$. 由于 $\alpha x+\beta y$ 关于 $\{e_n\}$ 的 Fourier 系数族是 $\{\alpha c_n+\beta c'_n\}$，故

$$T(\alpha x+\beta y)=\{\alpha c_n+\beta c'_n\}=\alpha\{c_n\}+\beta\{c'_n\}=\alpha Tx+\beta Ty;$$

(ii) 由Parseval 公式可知: $\|x\|^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|c_n|^2$.

$$\|x-y\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|c_n-c'_n|^2$$

因此 $\|T(x-y)\|=\|x-y\|$，再与(i)结合可知，$T$ 是由 $\mathfrak{U}$ 到 $T(\mathfrak{U})\subset l^2$ 的等距同构映射.

任取 $\{c_n\}\in l^2$. 由 Rierz-Fischer 定理，$\mathfrak{U}$ 中存在唯一的元素 $x$ 以 $\{c_n\}$ 为其 Fourier 系数集. 因此在映射 $T$ 的作用下，$x$ 在 $l^2$ 中的对应元就是 $\{c_n\}$，故 $T$ 是满映射. 因此 $\mathfrak{U}$ 与 $l^2$ 等距同构，且视 $\mathfrak{U}$ 为实(或复)空间，相应地 $l^2$ 也为实(或复)空间.

既然实(或复)可分 Hilbert 空间与实(或复) $l^2$ 空间等距同构，于是实(或复)可分 Hilbert 空间必彼此等距同构. 证毕.

这一节系统地研究了内积空间，特别是研究了 Hilbert 空间及其特例——可分 Hilbert 空间，希望读者注意:

1° 首先我们有关于最佳逼近元的存在及唯一性定理及其特

例直交分解定理. 这两条定理都很重要，由后者可知，Hilbert 空间中的任何一个元素均可在任一闭子空间中找到它的"影子"，这个看来似乎很直观的结论却是 Hilbert 空间中一个基本的事实. 由它可以获得标准直交系的存在性以及与标准直交系有关的一系列重要结论；

2° 与标准直交系有关联的重要概念有两个——标准直交系的完备性与完全性. 它们既有区别又有联系，在可分 Hilbert 空间中，它们是一致的；而在准 Hilbert 空间中由完备性可以导出完全性，反之，则不然；

3° 与标准直交系有关联的重要事实也有两个——Bessel 不等式与 Parseval 公式. 前者对内积空间中的一切元素成立，后者则视情况而定. 当着标准直交系中的元素"足够多"而成为完备标准直交系时，Parseval 公式便对内积空间中的一切元素成立；

4° 由于可分 Hilbert 空间存在着完备的标准直交系，因此所有可分的 Helbert 空间彼此等距同构.

## §5 线性拓扑空间大意

在 §1 中我们已经指出，为了研究数学与物理中提炼出来的大量线性或非线性问题，仅有距离空间是不够的，还需有线性运算. 由此产生了线性空间. 进而还需在线性空间中引进适当的收敛概念. 而在线性空间中引进适当的收敛概念可以有多种途径. 引进范数只是途径之一. 我们在 §1、§2 中对引进范数后得到的赋范线性空间作了较详细的讨论. 在这一节中，我们将介绍另一种更广泛的引进收敛概念的办法，即在线性空间中引进适当的拓扑，从而得到线性拓扑空间. 线性拓扑空间的内容非常丰富，我们对它只作很简单的介绍.

## 5.1 线性拓扑空间的基本概念

设 $X$ 是实(或复)的线性空间. $A$、$B$ 均为 $X$ 的子集, $\alpha$ 为数. 则 $A+B$ 表示形如 $x+y$ 的元素的全体, $\alpha A$ 表示形如 $\alpha x$ 的元素的全体, 这里 $x\in A$, $y\in B$.

**定义 5.1** 设 $X$ 是实(或复)的线性空间, 又设 $\tau$ 是 $X$ 上的一个拓扑, 如果拓扑空间 $(X,\tau)$ 满足下列条件, 则称 $(X,\tau)$ 为线性拓扑空间:

(i) $(X,\tau)$ 满足 $T_2$-型公理;

(ii) $X$ 中的线性运算是连续的, 就是说

(a) 任给两个元素 $x$、$y\in X$, 则对 $x+y$ 的任一邻域 $U_{x+y}$, 存在 $x$ 和 $y$ 的邻域 $U_x$ 和 $U_y$ 使

$$U_x+U_y\subset U_{x+y};$$

(b) 任给数 $\alpha$ 和元素 $x\in X$, 则对 $\alpha x$ 的任一邻域 $U_{\alpha x}$, 存在数 $\delta>0$ 以及 $x$ 的邻域 $V_x$, 使得当 $|\beta-\alpha|<\delta$ 时, 有

$$\beta V_x\subset U_{\alpha x}.$$

线性拓扑空间 $(X,\tau)$ 在不会引起混淆的情况下, 简记为 $X$.

由线性拓扑空间的定义, 容易导出下列性质:

1° 设 $x_0\in X$, $G\subset X$ 为开集, 则 $x_0+G$ 也是开集.

其实, 任取 $y\in x_0+G$, 则有 $x\in G$ 使 $y=x_0+x$, 故 $y-x_0=x\in G$. 由于 $G$ 是开集, 故 $G$ 是 $y-x_0$ 的一个邻域, 由加法的连续性, 存在 $y$ 的邻域 $U_y$ 以及 $-x_0$ 的邻域 $U_{-x_0}$ 使 $U_y+U_{-x_0}\subset G$, 特别地, $U_y-x_0\subset G$, 因此 $U_y\subset x_0+G$. 这表明对 $x_0+G$ 中的点 $y$, 有它的一个邻域 $U_y$, 使 $U_y$ 包含在 $x_0+G$ 中, 故 $x_0+G$ 是开集.

2° 设 $\alpha\neq 0$ 为数, $G\subset X$ 为开集, 则 $\alpha G$ 也是开集.

证明与 1° 类似, 故从略.

由性质 1° 可知, 为了决定线性拓扑空间内每个点的所有邻域, 只需决定原点的所有邻域. 为了决定原点的所有邻域, 则只需

给出原点的所谓邻域基便可以了. 下面是原点邻域基的定义.

**定义 5.2** 设 $X$ 为一线性拓扑空间, 称 $\tau_0$ 为原点的一个邻域基, 如果 $\tau_0$ 中的每个集合都是原点的一个邻域且对于原点的任一邻域 $U$ 必有 $\tau_0$ 中的 $V$ 使 $V\subset U$.

由定义不难看出, 当原点的邻域基决定后, 线性拓扑空间的拓扑也就决定了. 下一段中将用例子来阐明这一点.

## 5.2 线性拓扑空间的例

**例 1** 任何赋范线性空间都是线性拓扑空间.

**例 2** 令 $C^\infty$ 表示定义在 $\mathbf{R}$ 上无穷次可微函数的全体. $C^\infty$ 中元素的线性运算就是通常函数的线性运算. 我们取如下的集合作为原点的邻域: 对任给的 $\varepsilon>0$、任给的非负整数 $n$ 以及任给的紧集 $K\subset\mathbf{R}$, 原点的邻域 $U(n,\varepsilon,K)$ 是指所有满足

$$|x^{(k)}(t)|<\varepsilon \quad (t\in K, k=0,1,\cdots,n)$$

的元素 $x\in C^\infty$ 的全体. 然后再取 $U(n,\varepsilon,K)$ 的全体作为原点的一个邻域基, 不难验证, $C^\infty$ 是一个线性拓扑空间.

**例 3** 令 $\mathscr{D}$ 表示定义在 $\mathbf{R}$ 上无穷次可微, 且在某一有界闭区间(随函数而异)外为零的函数的全体. $\mathscr{D}$ 中元素的线性运算就是通常函数的线性运算. 我们取如下的集合作为原点的邻域: 对任给的 $\varepsilon>0$、任给的非负整数 $n$ 以及任给的紧集 $K\subset\mathbf{R}$, 原点的邻域 $V(n,\varepsilon,K)$ 是指所有满足

$$\begin{cases}|x^{(k)}(t)|<\varepsilon \quad (k=0,1,\cdots,n);\\ x(t)=0, \text{当 } t\notin K,\end{cases}$$

的元 $x\in\mathscr{D}$ 的全体. 我们再取 $V(n,\varepsilon,K)$ 的全体作为原点的一个邻域基, 不难验证 $\mathscr{D}$ 是一个线性拓扑空间.

## 5.3 线性拓扑空间赋范的条件

线性拓扑空间是比赋范线性空间更广泛的一类空间, 现在要问: 在什么条件下在线性拓扑空间中可以赋以范数, 使得由这个范

数定义的原点的邻域的全体和该线性拓扑空间内原点原来的邻域的全体一致（这时我们称这个线性拓扑空间是可赋范的），为了回答这个问题，我们先引进几个概念. 为简单起见，仅以实空间为例.

线性拓扑空间$X$的子集$A$称为有界的，如果对原点的任何邻域$U_\theta$存在$\alpha>0$使得$\alpha A\subset U_\theta$. $X$的子集$A$称为凸的，如果对任意的$x$、$y\in A$以及任意的$\alpha: 0\leqslant\alpha\leqslant 1$，有

$$\alpha x+(1-\alpha)y\in A. \tag{1}$$

显然，线性拓扑空间中凸集的定义与内积空间中凸集的定义是相同的. 实际上，凸集的概念只与线性运算有关，故在一般的线性空间中同样可以引入凸集，而且也用(1)来定义.

线性拓扑空间$X$的子集$A$称为对称的，如果$A=-A$，这里$-A$表示集合$\{x: -x\in A\}$. 同样地，在一般的线性空间中，也可以定义集的对称概念.

**定理 5.1 线性拓扑空间$X$可赋范的充分必要条件是$X$的原点有一有界凸邻域.**

**证** 必要性是显然的. 因为$X$中的开单位球$S(\theta,1)$就是原点的一个有界凸邻域.

充分性. 设$U$为$X$中原点的一个有界凸邻域.
令$V=-U\cap U$，则$V$也是原点的有界凸邻域而且是对称的. 对任一$x\in X$，令

$$\|x\|=\inf_{\lambda>0,\, x\in\lambda V}\lambda. \tag{2}$$

现在证明，由(2)式定义的$\|\cdot\|$具有范数的所有性质.

1° 先证明$\|\theta\|=0$. 其实，对任意的$\lambda>0$，有$\theta\in\lambda V$，由(2)可知，$\|\theta\|=0$.

反之，设$\|x\|=0$. 由(2)，对任一自然数$n$，$x\in\frac{1}{n}V$. 今设$W$是零

点的任一邻域．由 $V$ 的有界性，存在自然数 $N$，使得当 $n>N$ 时，$\frac{1}{n}V\subset W$．故 $x\in W$．由 $W$ 的任意性及定义 5.1(i) 可知，$x=\theta$.

于是我们证明了 $\|x\|=0$ 的充分必要条件是 $x=\theta$．范数的第一个条件成立.

2° 证明 $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$.

由 $V$ 的对称性可知，$x\in\lambda V$ 当且仅当 $-x\in\lambda V$，因此

$$\|-x\|=\|x\|. \tag{3}$$

现在设 $\alpha>0$，则 $x\in\lambda V$ 当且仅当 $\alpha x\in\alpha\lambda V$．于是

$$\|\alpha x\|=\inf_{\alpha x\in\mu V}\mu=\inf_{\alpha x\in\alpha\lambda V}\alpha\lambda=\alpha\inf_{x\in\lambda V}\lambda=\alpha\|x\|. \tag{4}$$

由 (3) 及 (4) 可知，对任意的实数 $\alpha$，有

$$\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|.$$

因此范数的第二个条件成立.

3° 设 $x$、$y\in X$ 并设 $\|x\|=\alpha$，$\|y\|=\beta$．由下确界的定义，对任意的 $\alpha'>\alpha$ 以及任意的 $\beta'>\beta$，有

$$x\in\alpha' V,\ y\in\beta' V，即\qquad \frac{x}{\alpha'}\in V,\qquad \frac{y}{\beta'}\in V.$$

再由 $V$ 的凸性，

$$\frac{x+y}{\alpha'+\beta'}=\frac{\alpha'}{\alpha'+\beta'}\left(\frac{x}{\alpha'}\right)+\frac{\beta'}{\alpha'+\beta'}\left(\frac{y}{\beta'}\right)\in V,$$

因此

$$x+y\in(\alpha'+\beta')V.$$

故

$$\|x+y\|\leqslant\alpha'+\beta'.$$

令 $\alpha'\to\alpha$，$\beta'\to\beta$，得

$$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|.$$

范数的第三个条件成立．因此 $X$ 是赋范线性空间.

4° 现在还需证明由 (2) 定义的范数所导出的原点的邻域的

全体与作为线性拓扑空间$X$的原点原来的邻域的全体是一致的.

用$S(\theta,r)$表示$X$中以$\theta$为中心以$r$为半径按照范数(2)定义的开球. 今任取$\theta$的一个邻域$W$. 因为$V$有界, 故存在$r>0$使$rV\subset W$. 另一方面,由(2)容易看出, $S(\theta,1)\subset V$, 故$S(\theta,r)\subset W$.

反之,任意给定一个球$S(\theta,r)$. 任取$r'$满足: $0<r'<r$. 则$r'V$中元素按照(2)式定义的范数不大于$r'$, 故$r'V$中的元素均属于球$S(\theta,r)$, 因此$r'V\subset S(\theta,r)$.

以上的论证表明$X$的原点按照范数$\|\cdot\|$定义的邻域的全体和$X$作为线性拓扑空间时原点原来的邻域的全体是一致的. 证毕.

## 第七章 习 题

**§1. §2.**

1. 设$V[a,b]$表定义在$[a,b]$上的囿变函数的全体,其线性运算与$C[a,b]$中的相同. 在$V[a,b]$中定义

$$\|x\|=|x(a)|+\bigvee_a^b(x)\quad(x\in V[a,b]),$$

证明$V[a,b]$按照$\|\cdot\|$是一个不可分的Banach空间.

2. 设$A[a,b]$表$[a,b]$上绝对连续函数的全体,其线性运算与$C[a,b]$中的相同,在$A[a,b]$中令

$$\|x\|=|x(a)|+\int_a^b|x'(t)|dt\quad(x\in A[a,b]).$$

证明$A[a,b]$按照$\|\cdot\|$是可分的Banach空间.

3. 设$M_0$是$[a,b]$上有界函数的全体, 线性运算的定义与$C[a,b]$中的相同. 在$M_0$中令

$$\|x\|=\sup_{a\le t\le b}|x(t)|,$$

求证按照$\|\cdot\|$, $M_0$是不可分的Banach空间.

4. 设$H^p\ (0<p\le 1)$表示$[a,b]$上满足Hölder条件

$$|x(t_1)-x(t_2)|\le M|t_1-t_2|^p$$

的函数的全体, 线性运算的定义与$C[a,b]$中的相同. 在$H^p$中令

$$\|x\| = |x(a)| + \sup_{a \le t_1 < t_2 \le b} \frac{|x(t_1) - x(t_2)|}{|t_1 - t_2|^p},$$

求证按照$\|\cdot\|$，$H^p$ 为 Banach 空间．$H^p$ 是否可分？

5．设$l^\infty$为一切有界数列组成的集，线性运算与 $l^p$ 中的相同，在$l^\infty$中令

$$\|x\| = \sup_{n \ge 1} |\xi_n|,$$

其中 $x = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots\} \in l^\infty$，则$l^\infty$按照$\|\cdot\|$为不可分的 Banach 空间．

6．设 $c$ 为一切收敛数列组成的集，线性运算与 $l^p$ 中的相同，在 $c$ 中令

$$\|x\| = \sup_{n \ge 1} |\xi_n|,$$

其中 $x = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots\} \in c$，则 $c$ 按照$\|\cdot\|$为可分 Banach 空间．

7．设 $c_0$ 为一切收敛于零的数列组成的集，线性运算与 $l^p$ 中的相同，在 $c_0$ 中令

$$\|x\| = \sup_{n \ge 1} |\xi_n|,$$

其中 $x = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots\} \in c_0$，则 $c_0$ 按照$\|\cdot\|$为可分 Banach 空间．

8．设$E$是赋范线性空间，$L$是$E$的闭子空间．在$E/L$中令

$$\|\xi\| = \inf_{x \in \xi} \|x\| \quad (\xi \in E/L).$$

证明$E/L$按照$\|\cdot\|$是赋范线性空间．若$E$可分，则$E/L$也可分．任取 $x \in \xi$，证明$\|\xi\| = d(x, L)$，这里 $d(x, L)$ 表示$x$与$L$的距离．

9．设$E$是 Banach 空间，$L$是$E$的闭子空间．按第 8 题的方法定义商空间$E/L$中元素范数．证明按照这个范数，$E/L$ 是 Banach 空间．

10．设$E$是赋范线性空间，$F$是$E$的闭子空间．如果$F$及$E/F$（$E/F$中元素的范数按照题 8 的方式定义）是Banach空间，则$E$是Banach空间．

11．设$E$是赋范线性空间，$K \subset E$是紧集，$x \in E \setminus K$．证明：存在$K$中的元素$y$使$\|x - y\| = \mathrm{dist}(x, K)$．

12．如果 $C[0,1]$ 中的闭子空间由可微函数组成，则它是有限维的．

13．设$E$是 Banach 空间，点列$\{x_n\} \subset E$满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| = M < \infty,$$

其中 $M > 0$ 为常数，证明：存在 $x \in E$，使得 $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 且$\|x\| \le M$．

14．求出一个与题 2 中的 $A[a, b]$关于 $\mathbf{R}$ 的商空间 $A[a,b]/\mathbf{R}$ 等距同构的子空间．

15. 设 $L_1, L_2, \cdots, L_n$ 都是赋范线性空间，$E=L_1\oplus L_2\oplus\cdots\oplus L_n$. 证明 $E$ 按照 § 1 中(15)、(16)、(17)诸式都是赋范线性空间. 若 $L_1, L_2, \cdots, L_n$ 都是 Banach 空间，证明 $E$ 按照 § 1 中(15)、(16)、(17)诸式都是 Banach 空间.

16. 设 $L_1, L_2, \cdots, L_n, \cdots$ 是一列赋范线性空间，令 $E$ 表示形如 $x=\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ $(x_n\in L_n)$ 的元素的全体，满足

$$\sup_{1\leq n}\|x_n\|<\infty.$$

令 $\|x\|=\sup\limits_{1\leq n}\|x_n\|$. 证明在 $E$ 中适当地定义线性运算后，$E$ 按照 $\|\cdot\|$ 是赋范线性空间. 如果所有 $L_n$ 都是 Banach 空间，则 $E$ 也是 Banach 空间.

17. 设 $E$ 是赋范线性空间，$L$ 是 $E$ 的真闭子空间，证明 $L$ 在 $E$ 中是稀疏集.

18. 证明多项式的全体在 $C[a,b]$ 中是第一类型的集.

19. 证明多项式的全体在 $C^k[a,b]$ 中也是第一类型的集，其中 $C^k[a,b]$ 中元素的范数按照 § 1 例 6 中定义.

§ 3. § 4.

20. 证明 § 3 中的等式 (2)及 (2′)；证明空间 $L^2([a, b], \omega(t))$ 是 Hilbert 空间.

21. 设 $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \cdots, \mathfrak{U}_n, \cdots$ 是一列内积空间. 令 $\mathfrak{U}$ 表示形如 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ 的元素的全体，满足

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2<\infty.$$

证明在 $\mathfrak{U}$ 中适当地定义线性运算并对 $x, y\in\mathfrak{U}$，令

$$(x, y)=\sum_{n=1}^{\infty}(x_n, y_n),$$

(这里 $x=\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$、$y=\{y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots\}$)后，$\mathfrak{U}$ 是一个内积空间. 若所有 $\mathfrak{U}_n$ 都是完备的，则 $\mathfrak{U}$ 也是完备的.

22. 令 $S_1$ 表示如下的函数 $x(\cdot)$ 的全体：

$$x\in L[0, 2\pi], x(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),$$

且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_n^2+b_n^2)<+\infty$，令

$$\|x\|_{S_1}=\frac{1}{\pi}\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}n(a_0^2+b_0^2)\right]^{\frac{1}{2}}$$

求证 $S_1$ 是 Hilbert 空间.

23. 设 $E$ 是 $n$ 维线性空间, $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 $E$ 的一个基. $(\alpha_{ij})$ $(i, j=1, 2, \cdots, n)$ 是一正定矩阵, 对 $E$ 中的元素 $x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ 及 $y=\sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, 令

$$(x, y)=\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i \bar{y}_j, \qquad (1)$$

则 $(\cdot,\cdot)$ 是 $E$ 上的一个内积(注: 关于正定矩阵的定义, 请参考任何一本线性代数的教科书). 反之, 设 $(\cdot,\cdot)$ 是 $E$ 上的一个内积, 则必存在正定矩阵 $(\alpha_{ij})$ 使(1)成立.

24. 至少举出两个赋范线性空间, 它们的范数不能由内积导出.

25. 设 $\mathfrak{U}$ 是实内积空间. 对 $x$、$y\in\mathfrak{U}$, 若 $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$, 则 $x\perp y$. 若 $\mathfrak{U}$ 是复内积空间, 这个结论是否仍成立? 如果不成立, 试求出其成立的充分必要条件.

26. 设 $\mathfrak{U}$ 是内积空间, $x, y\in\mathfrak{U}$, 则 $x\perp y$ 的充分必要条件是对任何数 $\alpha$, 有 $\|x+\alpha y\|\geq\|x\|$.

27. 设 $\mathfrak{U}$ 是内积空间, $x$、$y\in\mathfrak{U}$. 则 $x\perp y$ 的充分必要条件是对任何数 $\alpha$, 有 $\|x+\alpha y\|=\|x-\alpha y\|$.

28. 设 $M$、$N$ 是内积空间 $\mathfrak{U}$ 中的子集, $M\subset N$, 则 $N^{\perp}\subset M^{\perp}$.

29. 设 $\mathfrak{U}$ 是内积空间, $M$ 是 $\mathfrak{U}$ 的子集, 证明 $(M^{\perp})^{\perp}$ 是包含 $M$ 的最小闭子空间.

30. 设 $L_1$、$L_2$ 是内积空间 $\mathfrak{U}$ 的子空间, $L_1\perp L_2$, $L$ 为 $L_1$ 与 $L_2$ 的直接和(由于 $L_1$ 与 $L_2$ 直交; 故亦称为直交和, 见第九章) 证明 $L$ 是 $\mathfrak{U}$ 的闭子空间的充分必要条件是 $L_1$、$L_2$ 均为闭子空间.

31. 设 $H_2$ 是满足 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2<\infty$ 且在单位圆 $|z|<1$ 中解析的函数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的全体. 证明 $H_2$ 按照通常的线性运算和内积 $(f, g)=\lim_{r\to 1-0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\overline{g(re^{i\theta})}\,d\theta$ 是可分 Hilbert 空间. 若 $\{e_n\}$ 是 $H_2$ 中一完备标准直

交系，证明当$|z_1|<1, |z_2|<1$时，$\sum_{n=0}^{\infty} e_n(z_1)\overline{e_n(z_2)} = \frac{1}{1-z_1\bar{z}_2}$.

32. 证明内积空间中的任何标准直交系都是线性无关的.

33. 证明可分 Hilbert 空间中的标准直交系最多是可列的.

34. 证明可分 Hilbert 空间中的完备标准直交系必定是可列的.

35. 举例说明内积空间中的完全标准直交系不一定是完备的.

36. 设$\{e_k\}$, $\{e'_k\}$ $(k=1,2,3,\cdots)$是 Hilbert 空间中的两个标准直交系适合$\sum_{k=1}^{\infty}\|e_k-e'_k\|^2<\infty$，则当$\{e_k\}$，$\{e'_k\}$中之一完备时，另一个也是完备的.

37. 设$\mathfrak{U}$为 Hilbert 空间，求证：

a. $\min\limits_{\substack{c_k\in K\\ 1\leqslant k\leqslant n}}\left\|x-\sum_{k=1}^{n}c_k y_k\right\|^2 = \frac{G(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)}{G(y_1, y_2, \cdots, y_n)}$,

这里$K$为复数域，$x, y_1, \cdots, y_n$为$\mathfrak{U}$中的元素，而

$$G(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \begin{vmatrix} (y_1, y_1) & \cdots & (y_n, y_1) \\ (y_1, y_2) & \cdots & (y_n, y_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (y_1, y_n) & \cdots & (y_n, y_n) \end{vmatrix}.$$

b. 对任意的$m<n$，有

$$\frac{G(y_k, y_{k+1}, \cdots, y_n)}{G(y_{k+1}, \cdots, y_n)} \leqslant \frac{G(y_k, y_{k+1}, \cdots, y_m)}{G(y_{k+1}, \cdots, y_m)} \quad (0\leqslant k\leqslant m-1),$$

$$\frac{G(y_m, y_{m+1}, \cdots, y_n)}{G(y_{m+1}, \cdots, y_n)} \leqslant G(y_m),$$

$$G(y_1, y_2, \cdots, y_n) \leqslant G(y_1, \cdots, y_m)G(y_{m+1}, \cdots, y_n),$$

$$G(y_1, y_2, \cdots, y_n) \leqslant G(y_1)G(y_2)\cdots G(y_n).$$

38. 设$\mathfrak{U}$为 Hilbert 空间，$\{y_k\}\subset\mathfrak{U}$ $(k=1,2,3,\cdots)$ 是线性无关的，则将$\{y_k\}$标准直交化所得的元素列$\{e_k\}$由下式给出

$$e_k = \frac{1}{\sqrt{G_k G_{k-1}}}\begin{vmatrix} (y_1, y_1) & \cdots & (y_k, y_1) \\ (y_1, y_2) & \cdots & (y_k, y_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (y_1, y_{k-1}) & \cdots & (y_k, y_{k-1}) \\ y_1 & \cdots & y_k \end{vmatrix}$$

其中$G_0=1$, $G_k=G(y_1, y_2, \cdots, y_k)$.

39. 令 $L_n(t)$ 为 Laguerre 函数 $e^t\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})$. 证明 $\left\{\frac{1}{n!}e^{-\frac{t}{2}}L_n(t)\right\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 是 $L^2[0,\infty)$ 中的一个完备标准直交系.

§ 5.

40. 线性拓扑空间中有限个有界集的并仍为有界集.

41. 设 $X$ 是线性拓扑空间,证明:

a. 设 $A\subset X$ 是闭集,则 $x+A,\alpha A$ 也是闭集,这里 $\alpha$ 是数;

b. 设 $L\subset X$ 是子空间,则 $L$ 的闭包也是 $X$ 的子空间.

42. 设 $A$ 是线性拓扑空间 $X$ 中的凸集, $\mathring{A}$ 表示 $A$ 中内点的全体. 若 $\mathring{A}\neq\phi$,则对任何 $x\in\mathring{A}$, $y\in A$ 以及数 $\alpha\,(0<\alpha\leqslant1)$ $\alpha x+(1-\alpha)y\in\mathring{A}$.

# 第八章 赋范线性空间上的有界线性算子

## §1 有界线性算子

微分方程、积分方程、经典力学、量子力学中的许多问题，往往以算子或算子方程的形式出现，例如．在第六章§6中，利用压缩映射原理讨论微分方程、积分方程解的存在性、唯一性时，我们就是将它们换成映射(即算子)的形式来考虑的．因此算子的概念与距离空间、赋范线性空间(包括 Banach 空间)以及内积空间(包括 Hilbert 空间)一样是泛函分析中的基本概念．撇开各类算子的具体属性，我们可以将算子分成两大类：一类是线性算子，另一类是非线性算子．这一节的目的是介绍有界线性算子的一些基本性质，关于有界线性算子更深入的讨论将在§2及§3中进行．

### 1.1 有界线性算子的基本概念与性质

我们先给出线性空间上线性算子的一般定义．

**定义 1.1** 设$E$和$E_1$同时是实(或复)的线性空间，$T$是由$E$的某个子空间$D$到线性空间$E_1$的映射，如果对任意的$x$、$y\in D$，有

$$T(x+y)=Tx+Ty,$$

则称$T$是可加的．若对任意的数$\alpha$及任意的$x\in D$，有

$$T(\alpha x)=\alpha Tx,$$

则称$T$是齐次的．可加齐次的映射称为线性映射或线性算子．今后我们常用线性算子这一名称．

$D$称为$T$的定义域，$T(D)$称为$T$的值域．$T$的定义域有时用

$D_T$ 表示. $D$ 中使 $Tx=\theta$ 的元素 $x$ 的集合称为 $T$ 的零空间.

设 $E_1$ 是实(或复)数域,于是 $T$ 变成由 $D$ 到实(或复)数域的映射,在这种情形下,称 $T$ 为泛函(见第六章). 如果 $T$ 还是线性的,则称 $T$ 为线性泛函. 泛函或线性泛函常用 $f$、$g$ 等符号表示.

**定义 1.2** 设 $E$ 及 $E_1$ 同时是实(或复)的赋范线性空间,$D$ 为 $E$ 的子空间, $T$ 为由 $D$ 到 $E_1$ 的线性算子. 如果按照第六章定义 2.6, $T$ 是连续的,则称 $T$ 为连续线性算子. 如果 $T$ 将 $D$ 中任一有界集映成 $E_1$ 中的有界集,则称 $T$ 是有界的. 如果存在 $D$ 中的有界集 $A$,使得 $T(A)$ 是 $E_1$ 中的无界集,则称 $T$ 是无界的.

**例 1** 将赋范线性空间 $E$ 中的每个元 $x$ 映成 $x$ 自身的算子,就是一个有界线性算子也是一个连续线性算子,称它为 $E$ 上的单位算子. 单位算子常以 $I$ 表示. 将 $E$ 中的每个元 $x$ 映成 $\theta$ 的算子,也是一个有界线性算子同时也是连续线性算子,称它为零算子.

**例 2** 解析几何中常见的旋转变换

$$\begin{cases} x'=x\cos\theta-y\sin\theta \\ y'=x\sin\theta+y\cos\theta \end{cases} \quad (\theta \text{ 为某一固定的角}) \tag{1}$$

就是二维实 Euclid 空间到它自身的一个有界线性算子,也是一个连续线性算子.

**例 3** 连续函数的积分

$$f(x)=\int_a^b x(t)dt \quad (x\in C[a,b]) \tag{2}$$

就是定义在连续函数空间 $C[a,b]$ 上的一个有界线性泛函,也是一个连续线性泛函.

例 1、例 2 及例 3 中出现的线性算子或线性泛函既是有界的又是连续的. 其实,对线性算子来说,有界性与连续性等价(见定理1.4).

**定理 1.1** 设 $E$、$E_1$ 都是实赋范线性空间,$T$ 是由 $E$ 的子空间

**$D$ 到 $E$ 的连续可加算子，则 $T$ 满足齐次性，因此 $T$ 是连续线性算子.**

**证** 对任给的 $x\in D$，令 $f(\alpha)=T(\alpha x)$. 则 $f$ 连续且对任何实数 $\alpha_1$、$\alpha_2$，有 $f(\alpha_1+\alpha_2)=f(\alpha_1)+f(\alpha_2)$. 利用第七章 § 3.2 中引理的方法可以证明(由于完全类似，此处就不重复了)，对任何实数 $\alpha$，有 $f(\alpha)=\alpha f(1)$，即

$$T(\alpha x)=\alpha T(x) \tag{3}$$

齐次性成立. 证毕.

**推论** **设 $E$、$E_1$ 都是复赋范线性空间，$T$ 是由 $E$ 的子空间 $D$ 到 $E_1$ 的连续可加算子，且 $T(ix)=iTx$，则 $T$ 满足齐次性，因此 $T$ 是连续线性算子.**

**证** 由定理 1.1，对任何实数 $\alpha$，及任何 $x\in D$ 有 $T(\alpha x)=\alpha Tx$. 今设 $\alpha$ 为复数：$\alpha=\alpha_1+i\alpha_2$. 根据假定，$T(ix)=iTx$，故

$$\begin{aligned}T(\alpha x)&=T((\alpha_1+i\alpha_2)x)=T(\alpha_1 x)+T(i\alpha_2 x)\\&=\alpha_1 Tx+i\alpha_2 Tx=\alpha Tx.\end{aligned}$$

**定理 1.2** **设 $E$、$E_1$ 都是赋范线性空间，$T$ 是由 $E$ 的子空间 $D$ 到 $E_1$ 的线性算子，则 $T$ 有界的充分必要条件是存在 $M>0$ 使得对一切 $x\in E$，有 $\|Tx\|\leqslant M\|x\|$.**

**证** 充分性. 设定理的条件满足，即存在 $M>0$，使得对一切 $x\in D$，有 $\|Tx\|\leqslant M\|x\|$. 今设 $A\subset D$ 为一有界集，则存在正数 $K$，使得对一切 $x\in A$，$\|x\|\leqslant K$，故当 $x\in A$ 时，

$$\|Tx\|\leqslant M\|x\|\leqslant MK.$$

因此 $A$ 的象 $T(A)$ 是 $E_1$ 中的有界集.

必要性 在 $D$ 中取单位球面 $S=\{x:\|x\|=1,\ x\in D\}$. 因 $S$ 有界，故 $T(S)$ 也有界. 因此存在正数 $M$，使得当 $x\in S$ 时，$\|Tx\|\leqslant M$. 今设 $x$ 是 $D$ 中任一非零元素，则 $\frac{x}{\|x\|}\in S$，故 $\left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\|\leqslant M$，由 $T$

的齐次性，得

$$\|Tx\| \leqslant M\|x\|. \tag{4}$$

当 $x=\theta$ 时，(4)显然成立．因此对任何 $x\in D$，(4)成立．证毕．

在很多泛函分析著作中，就是用定理 1.2 中的充分必要条件作为线性算子有界性的定义．此外，由定理 1.2 的证明过程不难看出，当 $T$ 将 $D$ 中以原点为中心的单位球面映成有界集时，$T$ 就是有界的．因此为了验证线性算子是否有界，只要看它是否具有这一性质．

**定理 1.3** **设 $E$、$E_1$ 都是赋范线性空间，$T$ 是由 $E$ 的子空间 $D$ 到 $E_1$ 的线性算子．如果 $T$ 在某一点 $x_0\in D$ 连续，则 $T$ 在整个 $D$ 上连续．**

**证** 任取 $y$，$y_n\in D(n=1,2,3,\cdots)$ 且设 $\{y_n\}\to y$．由 $T$ 的可加性，有

$$Ty_n-Ty=T(y_n-y)=T(y_n-y+x_0)-Tx_0.$$

不难看出，$\{y_n-y+x_0\}\to x_0$，由 $T$ 在 $x_0$ 的连续性，可得 $\{T(y_n-y+x_0)\}\to Tx_0$，故

$$\{Ty_n\}\to Ty.$$

因此 $T$ 在 $y$ 处是连续的．证毕．

定理 1.3 告诉我们，为了验证一个线性算子是否连续，只要验证它在某一点是否连续就行了．由定理1.3的证明过程则可看出，若将算子的线性换成可加性，定理的结论仍成立．

**定理 1.4** **设 $E$、$E_1$ 都是赋范线性空间，$T$ 是由 $E$ 的子空间 $D$ 到 $E_1$ 的线性算子，则 $T$ 连续的充分必要条件是 $T$ 有界．**

**证** 充分性．设 $T$ 有界，则存在 $M>0$，使对一切 $x\in D$，$\|Tx\|\leqslant M\|x\|$．给定 $x\in D$，任取 $x_n\in D(n=1,2,3,\cdots)$ 使 $\{x_n\}\to x$，于是

$$\|Tx_n-Tx\|=\|T(x_n-x)\|\leqslant M\|x_n-x\|\to 0,$$

因此 $T$ 在 $D$ 内连续．

必要性. 用反证法. 设$T$连续但无界，则对每个自然数$n$，必存在$x_n\in D, x_n\neq\theta\ (n=1,2,3,\cdots)$使

$$\|Tx_n\|\geqslant n\|x_n\|.$$

令$y_n=\dfrac{x_n}{n\|x_n\|}$，则 $\|y_n\|=\dfrac{1}{n}$，因此$\{\|y_n\|\}\to 0$. 由$T$的连续性，$\{Ty_n\}\to\theta$. 另一方面

$$\|Ty_n\|=\left\|\frac{Tx_n}{n\|x_n\|}\right\|=\frac{\|Tx_n\|}{n\|x_n\|}\geqslant 1,$$

矛盾，故$T$有界. 证毕.

由定理1.4可知，对于线性算子来说，有界性与连续性等价.

对于有界线性算子，我们将引进一个重要的量——算子的范数. 为了使读者对这一概念有比较清晰的了解，我们先作一些解释. 设$T$为由$D\subset E$到$E_1$的有界线性算子. 任取$x_0\in D, x_0\neq\theta$，由$T$的齐次性，对任何不等于零的数$\alpha$，当$x=\alpha x_0$时，有

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|}=\frac{\|Tx_0\|}{\|x_0\|},$$

因此$\dfrac{\|Tx_0\|}{\|x_0\|}$是沿$x_0$方向的向量经过算子$T$作用后的伸长率. 当$x_0$在$D$中变化时，相应的伸长率也随着变化，而定理1.2中的数$M$便是这些伸长率组成的集合$\mathscr{A}$的一个上界. 上界当然不唯一，我们取其中一个特殊的，叫做$T$的范数，具体说，有下面的定义：

**定义 1.3** 设$E$、$E_1$都是赋范线性空间，$T$是由$E$的子空间$D$到$E_1$的有界线性算子. 使$\|Tx\|\leqslant M\|x\|$对一切$x\in D$都成立的正数$M$的下确界称为$T$的<u>范数</u>，记为$\|T\|$.

我们已经指出，对任一给定的正数$M$，当$\|Tx\|\leqslant M\|x\|$对一切$x\in D$都成立时，正数$M$是数集$\left\{\dfrac{\|Tx\|}{\|x\|}: x\in D,\ x\neq\theta\right\}$的一个上界. 因此算子的范数$\|T\|$也是数集

$$\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|}: x\in D,\ x\neq\theta\right\}$$

的一个上界，而且是上确界，即

$$\|T\|=\sup_{\substack{x\neq\theta\\x\in D}}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

由上面的等式容易导出下列结论：

1° 对一切 $x\in D$，有 $\|Tx\|\leqslant\|T\|\|x\|$；

2° $\|T\|=\sup\limits_{\substack{\|x\|\leqslant 1\\x\in D}}\|Tx\|=\sup\limits_{\substack{\|x\|=1\\x\in D}}\|Tx\|$.

其实，由于 $\|T\|$ 是数集 $\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|}:x\in D,\ x\neq\theta\right\}$ 的一个上界，故 1° 成立. 至于 2°，则是显然的.

虽然算子的范数是与算子有关的一个重要的量，但不能试图通过它来全面地刻划一个算子.

现在举几个实例，说明如何估计算子的范数以及如何求出算子的范数. 不过一般情形下求算子的范数是很困难的.

**例 4** 设 $(a_{ij})(i,j=1,2,\cdots,n)$ 为一给定的 $n\times n$ 方阵，$a_{ij}$ 均为实数，由等式

$$\eta_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\xi_i\qquad(j=1,2,\cdots,n)$$

定义了一个由 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的算子 $T$: $Tx=y$，它将元素 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 映成 $y=(\eta_1,\ \eta_2,\ \cdots,\ \eta_n)$. 在 $\mathbf{R}^n$ 中任取两个向量 $x_k=(\xi_1^{(k)},\xi_2^{(k)},\cdots,\xi_n^{(k)})(k=1,2)$，由等式

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}(\xi_i^{(1)}+\xi_i^{(2)})=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\xi_i^{(1)}+\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\xi_i^{(2)}$$

可知，$T$ 是可加的. 类似地可以证明 $T$ 是齐次的. 因此 $T$ 是线性算子，由 Cauchy 不等式

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\eta_j^2\right)^{1/2}\leqslant\left(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\right)^{1/2},$$

可知$T$有界因此连续. 且 $\|T\|\leqslant\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{1/2}$.

**例5** 我们用$C(-\infty,\infty)$表示定义在$(-\infty, +\infty)$上有界连续函数的全体,其中的线性运算与$C[a,b]$中的相同. 在$C(-\infty,\infty)$中定义范数如下:

$$\|y\|=\sup_{-\infty<t<+\infty}|y(t)| \quad (y\in C(-\infty,\infty)).$$

则$C(-\infty,\infty)$是一个 Banach 空间. 今设$x\in L(-\infty,+\infty)$, 令

$$y=Tx: y(s)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ist}x(t)dt,$$

则由第五章§3可知$T$是定义在$L(-\infty, +\infty)$上而值域包含在$C(-\infty, +\infty)$中的线性算子. 再由

$$|(Tx)(s)|=|y(s)|\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|e^{-ist}x(t)|dt=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|dt,$$

可知 $T$有界因而连续且$\|T\|\leqslant 1$.

**例6** 在内插理论中,我们往往用 Lagrange 公式来求已知连续函数的近似多项式. 设$x\in C[a, b]$, 在$[a, b]$内任取$n$个点$a\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_n\leqslant b$, 作多项式

$$l_k(t)=\frac{(t-t_1)\cdots(t-t_{k-1})(t-t_{k+1})\cdots(t-t_n)}{(t_k-t_1)\cdots(t_k-t_{k-1})(t_k-t_{k+1})\cdots(t_k-t_n)},$$

其中$k=1,2,\cdots,n$. 再令

$$y=L_nx: y(t)=\sum_{k=1}^{n}x(t_k)l_k(t),$$

则$L_n$是由$C[a,b]$到其自身的有界线性算子且

$$\|L_n\|=\max_{a\leqslant t\leqslant b}\sum_{k=1}^{n}|l_k(t)|. \tag{5}$$

其实,$L_n$的线性是明显的. 现在证明(5). 令

$$\alpha=\max_{a\leqslant t\leqslant b}\sum_{k=1}^{n}|l_k(t)|,$$

则

$$\|L_n x\| = \max_{a\leqslant t\leqslant b}\left|\sum_{k=1}^{n} x(t_k)l_k(t)\right| \leqslant \alpha\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)| = \alpha\|x\|,$$

故

$$\|L_n\| \leqslant \alpha. \tag{6}$$

另一方面，由于 $\sum_{k=1}^{n}|l_k(t)|$ 在 $[a, b]$ 上连续，故存在 $t_0 \in [a, b]$ 使

$$\alpha = \sum_{k=1}^{n}|l_k(t_0)|.$$

取 $x_0 \in C[a, b]$ 使 $\|x_0\| = 1$, $x_0(t_k) = \operatorname{sgn} l_k(t_0)$ $(k=1, 2, \cdots, n)$，至于 $x_0$ 在其他点上的值则可以任意，只要绝对值不超过 1，并保证 $x_0(t)$ 连续就可以了．于是

$$\|L_n x_0\| \geqslant |(L_n x_0)(t_0)| = \left|\sum_{k=1}^{n} l_k(t_0)\operatorname{sgn} l_k(t_0)\right|$$

$$= \sum_{k=1}^{n}|l_k(t_0)| = \alpha,$$

故

$$\|L_n\| \geqslant \alpha \tag{7}$$

由(6)、(7)可得(5).

**例 7**　设 $K(t, s)$ 是定义在 $a\leqslant t\leqslant b$，$a\leqslant s\leqslant b$ 上的连续实函数，在实连续函数空间 $C[a, b]$ 中定义如下的积分算子：

$$y(t) = (Tx)(t) = \int_a^b K(t, s)x(s)ds,$$

则 $T$ 为 $C[a, b]$ 到其自身的有界线性算子且

$$\|T\| = \max_{a\leqslant t\leqslant b}\int_a^b |K(t, s)|ds. \tag{8}$$

$T$ 显然是 $C[a, b]$到其自身的线性算子. 今证 $T$ 有界且(8)成立. 令

$$\alpha=\max_{a\leqslant t\leqslant b}\int_a^b |K(t,s)|ds.$$

则

$$\|Tx\|=\max_{a\leqslant t\leqslant b}\left|\int_a^b K(t,s)x(s)ds\right|$$
$$\leqslant\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|\max_{a\leqslant t\leqslant b}\int_a^b |K(t,s)|ds=\alpha\|x\|,$$

故 $T$ 有界且 $\|T\|\leqslant\alpha$.

由于 $\int_a^b |K(t,s)|ds$ 是 $t$ 的连续函数,故存在 $t_0\in[a, b]$使

$$\alpha=\int_a^b |K(t_0,s)|ds.$$

记 $e_0=\{s:K(t_0,s)\geqslant 0\}$. 作函数

$$\varphi_n(t)=\frac{1-nd(t,e_0)}{1+nd(t,e_0)},$$

其中 $d(t,e_0)$为 $t$ 与 $e_0$ 的距离, 则$\varphi_n(t)$于$[a,b]$上连续, $|\varphi_n(t)|\leqslant 1$ 且有下列性质

$$\varphi_n(t)=\begin{cases}1, 若\ t\in e_0, & (对一切n);\\ \to -1, 若\ t\notin e_0, & (当 n\to\infty).\end{cases}$$

由 Lebesgue 控制收敛定理,有

$$(T\varphi_n)(t_0)=\int_a^b K(t_0, s)\varphi_n(s)ds\to\int_a^b |K(t_0, s)|ds=\alpha.$$

注意到 $\|\varphi_n\|\leqslant 1$, 故 $|T\varphi_n(t_0)|\leqslant\|T\varphi_n\|\leqslant\|T\|\ \|\varphi_n\|\leqslant\|T\|$, 于是 $\|T\|\geqslant\alpha$. 因此 $\|T\|=\alpha$.

**例 8** 在连续函数空间 $C[0,1]$中讨论微分算子 $T=\frac{d}{dt}$. 将在$[0,1]$上连续可微函数的全体 $C^1$ 作为 $T$ 的定义域, 则 $T$ 是定义在 $C^1$ 上且在 $C[0,1]$中取值的线性算子,这里 $C^1$ 作为 $C[0,1]$的子空

间看待. 我们证明$T$无界.

其实,取 $x_n(t)=\sin nt$,则$\|x_n\|=1$, 但$\|Tx_n\|=\left\|\frac{d}{dt}\sin nt\right\|=n\|\cos nt\|=n\to\infty$(当 $n\to\infty$时),故$T$将$C^1$中的单位球面映成$C[0,1]$中的无界集. $T$无界.

我们还可以在$L^2[0,1]$中考虑微分算子 $T=\frac{d}{dt}$.

**例 9** 我们将$L^2[0,1]$中具有平方可积导数的绝对连续函数组成的集$D$作为$T=\frac{d}{dt}$的定义域,则$T$是定义在$D$上且在$L^2[0,1]$中取值的线性算子. 我们证明$T$也是无界的.

其实,取 $x_n(t)=\sqrt{2}\sin n\pi t$,则

$$\|x_n\|=\sqrt{2}\left(\int_0^1|\sin n\pi t|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}=1,$$

但$x'(t)=\sqrt{2}\,n\pi\cos n\pi t$,于是

$$\|x_n'\|=\sqrt{2}\,n\pi\left(\int_0^1|\cos n\pi t|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}=n\pi\to\infty\quad(n\to\infty),$$

即$T$将$D$中的单位球面映成$L^2[0,1]$中的无界集,因此$T$无界.

### 1.2 线性算子空间

在§1.1中我们研究了单个线性算子的性质, 如有界的充分必要条件,连续的充分条件(实际上是充分必要条件),有界性与连续性的关系, 等等. 现在我们要从更高的层次来考察有界线性算子. 今后如不作特别声明, 凡有界线性算子均假定它的定义域是整个空间$E$. 我们将由赋范线性空间$E$到赋范线性空间$E_1$中的每一个有界线性算子看成一个元素, 所有这些元素构成的集用$\mathscr{B}(E,E_1)$表示. 在$\mathscr{B}(E,E_1)$上可以适当地定义线性运算使它成为一个线性空间,再以定义1.2中算子的范数作为$\mathscr{B}(E,E_1)$中元素的范数, 它将成为一个赋范线性空间. 这样从$E$到$E_1$中的全部

有界线性算子就很好地"组织了起来"而成为一个有机的整体. 探讨这个整体的性质无疑是很有意义很有必要的.

**定理 1.5　设 $E$、$E_1$ 都是赋范线性空间，在 $\mathscr{B}(E,E_1)$ 中定义线性运算于下:**

$$(T_1+T_2)x=T_1x+T_2x \quad (T_1,T_2\in\mathscr{B}(E,E_1),x\in E); \tag{9}$$

$$(\alpha T)x=\alpha(Tx) \quad (T\in\mathscr{B}(E,E_1),\alpha\text{ 为数}), \tag{10}$$

**则 $\mathscr{B}(E,E_1)$ 按照上述线性运算是一个线性空间. 再以定义 1.2 中算子的范数作为范数，则 $\mathscr{B}(E,E_1)$ 是一个赋范线性空间.**

**证**　不难看出 $\mathscr{B}(E,E_1)$ 按(9)、(10)定义的线性运算确是线性空间. 今证它是赋范线性空间，为此需验证范数的三个条件:

(i) $\|T\|\geqslant 0$ 是显然的. 若 $T=\theta$(零算子)，显然有 $\|T\|=0$，反之，若 $\|T\|=0$，则对一切 $x\in E$，$Tx=\theta$，故 $T=\theta$;

(ii) $\|\alpha T\|=\sup\limits_{\|x\|=1}\|\alpha Tx\|=|\alpha|\sup\limits_{\|x\|=1}\|Tx\|=|\alpha|\,\|T\|$;

(iii) $$\|T_1+T_2\|=\sup_{\|x\|=1}\|(T_1+T_2)x\|=\sup_{\|x\|=1}\|T_1x+T_2x\|$$
$$\leqslant\sup_{\|x\|=1}\|T_1x\|+\sup_{\|x\|=1}\|T_2x\|=\|T_1\|+\|T_2\|.$$

证毕.

今后称 $\mathscr{B}(E,E_1)$ 为线性算子空间. 当 $E=E_1$ 时，我们将 $\mathscr{B}(E,E)$ 记为 $\mathscr{B}(E)$，而将任一 $T\in\mathscr{B}(E)$ 称为定义在 $E$ 上的有界线性算子.

在第七章 §1 中，我们定义了赋范线性空间中点列依范数收敛的概念，这个概念对 $\mathscr{B}(E,E_1)$ 无疑是适用的. 但针对 $\mathscr{B}(E,E_1)$ 是线性算子空间这一特殊情形，我们将 $\{T_n\}\subset\mathscr{B}(E,E_1)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 按范数收敛于 $T\in\mathscr{B}(E,E_1)$，即

$$\lim_{n\to\infty}\|T_n-T\|=0.$$

称为按"算子范数收敛"不过在某些的情形下，则使用一致收敛. 这一说法.

我们之所以将算子列依算子范数收敛又称为一致收敛，原因在于下面的定理所阐明的事实。

**定理 1.6** **设 $T_n(n=1,2,3,\cdots)$、$T$ 都属于 $\mathscr{B}(E,E_1)$，则 $\{T_n\}$ 依算子范数收敛于 $T$ 的充分必要条件是 $\{T_n\}$ 在 $E$ 中的任一有界集上一致收敛于 $T$.**

**证** 必要性. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\|T_n-T\|=0$，$A\subset E$ 为有界集. 对于 $A$，存在正数 $K$ 使得当 $x\in A$ 时，$\|x\|\leqslant K$，故

$$\|T_nx-Tx\|\leqslant\|T_n-T\|\|x\|\leqslant K\|T_n-T\|. \tag{11}$$

任给 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，使得当 $n>N$ 时，$\|T_n-T\|<\frac{\varepsilon}{K}$. 由(11)，不等式

$$\|T_nx-Tx\|<\varepsilon \quad (n>N)$$

对于 $x\in A$ 一致地成立，故 $\{T_n\}$ 在 $A$ 上一致收敛于 $T$.

充分性. 设 $\{T_n\}\subset\mathscr{B}(E,E_1)$ 在 $E$ 中的任一有界集上一致收敛于 $T\in\mathscr{B}(E,E_1)$. 取 $E$ 中的单位球面 $S=\{x:\|x\|=1,x\in E\}$. 根据假定，对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，使得当 $n>N$ 时，不等式

$$\|T_nx-Tx\|<\varepsilon$$

对于 $x\in S$ 一致地成立，于是

$$\|T_n-T\|=\sup_{\|x\|=1}\|T_nx-Tx\|\leqslant\varepsilon \quad (n>N),$$

故 $\{T_n\}$ 依算子范数收敛于 $T$. 证毕.

定理 1.6 表明，将依算子范数收敛称为一致收敛是很自然的.

一般说，$\mathscr{B}(E,E_1)$ 作为赋范线性空间不一定完备，但若 $E_1$ 完备，则有下面的定理.

**定理 1.7** **设 $E_1$ 是 Banach 空间，则 $\mathscr{B}(E,E_1)$ 也是 Banach 空间.**

**证** 设 $\{T_n\}$ 是 $\mathscr{B}(E,E_1)$ 中的一个基本点列，于是对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，使当 $m$、$n>N$ 时，

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon.$$

任取 $x \in E$，则有

$$\|T_n x - T_m x\| \leqslant \|T_n - T_m\| \|x\| < \varepsilon \|x\| \quad (m, n > N), \tag{12}$$

故 $\{T_n x\}$ 是 $E_1$ 中的基本点列. 依假设，$E_1$ 完备，故 $\{T_n x\}$ 在 $E_1$ 中收敛于某一元素，记为 $y$，于是

$$\lim_{n\to\infty} T_n x = y. \tag{13}$$

定义算子 $T$：$Tx = y$. 今证明 $T$ 是定义在 $E$ 上而值域包含在 $E_1$ 中的有界线性算子，并且是 $\{T_n\}$ 在算子范数意义下收敛的极限.

$T$ 的线性是显然的. 现证有界性. 由于

$$|\|T_n\| - \|T_m\|| \leqslant \|T_n - T_m\| \to 0 \quad (m, n \to \infty),$$

故 $\{\|T_n\|\}$ 是基本序列，于是有界. 设 $\|T_n\| \leqslant M\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$. 由

$$\|Tx\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \leqslant (\lim_{n\to\infty} \|T_n\|) \|x\| \leqslant M \|x\| \quad (x \in E)$$

可知，$T$ 有界且 $\|T\| \leqslant M$.

还需证明 $\{T_n\}$ 依算子范数收敛于 $T$. 在 (12) 中令 $m \to \infty$ 并利用 (13) 以及等式 $Tx = y$，得

$$\|T_n x - Tx\| \leqslant \varepsilon \|x\|, \quad (x \in E, n > N),$$

因此

$$\|T_n - T\| \leqslant \varepsilon \quad (n > N).$$

故 $\{T_n\}$ 依算子范数收敛于 $T$. 于是 $\mathscr{B}(E, E_1)$ 中任一基本点列必有极限，$\mathscr{B}(E, E_1)$ 是 Banach 空间. 证毕.

算子序列依算子范数收敛无疑是一个重要概念，但是它还不能概括分析中另一些同样也很重要的收敛概念. 例如著名的 Bernstein 定理中算子序列的收敛性，就不能概括在依算子范数收敛的概念中. 请看下面的例.

**例 10** 设 $f(\cdot)$ 是定义在 $[0, 1]$ 上的连续函数，$B_n(f; t)$ 是 $f(\cdot)$ 的 Bernstein 多项式，即

$$B_n(f;t)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} t^k(1-t)^{n-k}.$$

令$(L_n f)(t)=B_n(f,t)$，由(14)容易看出$L_n$是$C[0,1]$到其自身的有界线性算子．根据 Bernstein 定理(第五章)，对任一$f\in C[0,1]$当$n\to\infty$时，$B_n(f;t)$在$[0,1]$上一致收敛于$f(t)$，于是

$$\|L_n f-If\|\to 0,$$

这里$I$表$C[0,1]$上的单位算子．但可以证明$L_n$不依算子范数收敛于$I$．随便取定一个$k_0(0<k_0<n)$，作下面的连续函数：

$$f_n(t)=\begin{cases}1, & t\in\left[0,\frac{k_0}{n}\right]\cup\left[\frac{k_0+1}{n},1\right];\\ 0, & t=\frac{2k_0+1}{2n};\\ \text{线性函数} & t\in\left[\frac{k_0}{n},\frac{2k_0+1}{2n}\right]\text{ 或 } t\in\left[\frac{2k_0+1}{2n},\frac{k_0+1}{n}\right].\end{cases}$$

记$t_0=\frac{2k_0+1}{2n}$，则

$$\|L_n f_n-If_n\|=\|B_n(f_n;\cdot)-f_n\|\geqslant|B_n(f_n;t_0)-f_n(t_0)|$$

$$=\left|\sum_{k=0}^{n} f_n\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} t_0^k(1-t_0)^{n-k}-f_n(t_0)\right|$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} t_0^k(1-t_0)^{n-k}=1,$$

但$\|f_n\|=1$，故

$$\|L_n-I\|\geqslant\|(L_n-I)f_n\|=1.$$

$L_n$不依算子范数收敛于$I$．

**例 11** 在$l^p$中定义算子$T_n$如下：

$$T_n x=x_n \quad (n=1,2,3,\cdots),$$

其中$x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}\in l^p$而$x_n=\{\xi_n,\xi_{n+1},\cdots\}$．不难看出，

$T_n$ 是有界线性算子且 $\|T_n\| \leqslant 1$. 注意到对每个 $x \in l^p$, 有 $\|x_n\| \to 0$ $(n \to \infty)$, 故

$$\lim_{n \to \infty} T_n x = \theta.$$

但 $\{T_n\}$ 并不依算子范数收敛于零. 这是因为对每个 $n$, 若取

$$y_n = \{\underbrace{0, \cdots, 0, 1}_{n}, 0, \cdots\},$$

则 $\|y_n\| = 1$ 且 $T_n y_n = \{1, 0, \cdots\}$, 故

$$\|T_n\| \geqslant \|T_n y_n\| = 1,$$

于是 $\|T_n\| = 1$. 因此 $\{T_n\}$ 不依算子范数收敛于零算子.

鉴于例 10, 例 11 所反映出来的情形, 我们引入下列收敛概念:

**定义 1.4** 设 $T$、$T_n \in \mathscr{B}(E, E_1)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$, 若对每个 $x \in E$, 有

$$\lim_{n \to \infty} \|T_n x - Tx\| = 0,$$

则称 $\{T_n\}$ 强收敛于 $T$, 记为

$$\lim_{n \to \infty} T_n = T(\text{强}) \text{ 或 } T_n \xrightarrow{\text{强}} T.$$

按照这个定义, 例 10 中的算子序列 $\{L_n\}$ 强收敛于 $I$, 例 11 中的算子序列 $\{T_n\}$ 强收敛于零算子. 任何一个算子序列若依算子范数收敛于某一算子, 则必定强收敛于同一算子. 反之则不然. 关于算子序列的强收敛在这一章 § 3 中还将继续讨论.

### 1.3 算子的乘法与赋范代数

关于映射的乘法, 早在第六章 § 6 中讨论不动点定理时已作了简单介绍. 这里就有界线性算子的情形再作更加详细的讨论.

设 $E$、$E_1$、$E_2$ 都是赋范线性空间. 对 $T_1 \in \mathscr{B}(E, E_1)$, $T_2 \in \mathscr{B}(E_1, E_2)$, 我们规定 $T_1$ 与 $T_2$ 的算子乘积 $T_2 T_1$ 如下:

$$(T_2 T_1)x = T_2(T_1 x) \quad (x \in E).$$

显然$T_2T_1$是定义在$E$上而在$E_2$中取值的线性算子. 由于$T_1$有界，故$T_1$将$E$中的有界集映成$E_1$中的有界集，又因$T_2$有界,故$T_2$将$E_1$中的有界集映成$E_2$中的有界集，于是$T_2T_1$将$E$中的有界集映成$E_2$中的有界集，故$T_2T_1$有界. 有界线性算子的乘法还具有下列性质:

1° $(T_3T_2)T_1=T_3(T_2T_1)$;

$$(\alpha T_2)T_1=\alpha(T_2T_1);T_2(\alpha T_1)=\alpha(T_2T_1),$$

这里$T_1\in\mathscr{B}(E,E_1)$,$T_2\in\mathscr{B}(E_1,E_2)$,$T_3\in\mathscr{B}(E_2,E_3)$,而$E_3$也是赋范线性空间.

2° $T_3(T_1+T_2)=T_3T_1+T_3T_2$;

这里$T_1,T_2\in\mathscr{B}(E,E_1)$,$T_3\in\mathscr{B}(E_1,E_2)$;

$$(T_2+T_3)T_1=T_2T_1+T_3T_1,$$

这里$T_1\in\mathscr{B}(E,E_1)$,$T_2$、$T_3\in\mathscr{B}(E_1,E_2)$.

3° $\|T_2T_1\|\leqslant\|T_2\|\|T_1\|$,

这里$T_1\in\mathscr{B}(E,E_1)$,$T_2\in\mathscr{B}(E_1,E_2)$.

性质1°、2°都比较明显. 现在证明性质3°. 任取$x\in E$,则

$$\|T_2T_1x\|=\|T_2(T_1x)\|\leqslant\|T_2\|\|T_1x\|\leqslant\|T_2\|\|T_1\|\|x\|,$$

由算子范数的定义,有$\|T_2T_1\|\leqslant\|T_2\|\|T_1\|$.

现在考察有界线性算子均属于$\mathscr{B}(E)$的情形. 显然上面的性质1°—3°仍然成立. 而且$T_1T_2$及$T_2T_1$都有意义. 但是与数的乘法不同,$T_1$、$T_2$相乘一般不服从交换律,即等式$T_1T_2=T_2T_1$未必成立. 如果等号成立,则称$T_1T_2$可换.

在第六章§6中,我们已经引进了记号$T^n$.今后对于$T\in\mathscr{B}(E)$,我们沿用这一记号,即$T^n$表示$n$个$T$相乘而$T^0$则表示$I$.

下面的例子说明算子相乘确实不一定服从交换律.

**例 11** 在$C[0,1]$中考察下面两个算子:

$$(T_1x)(t)=\int_0^t x(s)ds,\ (T_2x)(t)=tx(t)\quad (x\in C[0,1]),$$

这里 $T_1$ 是第六章 §6 中介绍过的 Volterra 积分算子的一个特殊情形，我们仍称它为 Volterra 积分算子，而称$T_2$ 为乘法算子.

显然 $T_1$、$T_2$ 都是从 $C[0, 1]$到其自身的有界线性算子. 易见

$$(T_2T_1x)(t)=t\int_0^t x(s)ds,\ (T_1T_2x)(t)=\int_0^t sx(s)ds,$$

若取 $x_0(t)=1\ (t\in[0,1])$，则

$$(T_2T_1x_0)(t)=t^2,\quad (T_1T_2x_0)(t)=\frac{t^2}{2},$$

因此 $T_1T_2x_0\neq T_2T_1x_0$，故 $T_1T_2\neq T_2T_1$.

现在继续考察$\mathscr{B}(E)$. 首先$\mathscr{B}(E)$是一个赋范线性空间，这在前面已有详细阐述. 其次 $\mathscr{B}(E)$中元素相乘仍属于 $\mathscr{B}(E)$. 再由乘法的性质 1°, 2° 可知，$\mathscr{B}(E)$中元素相乘满足结合律，乘法对于加法满足分配律. 由于$\mathscr{B}(E)$有这些性质，我们称$\mathscr{B}(E)$为有界线性算子环，它是赋范环(或赋范代数)的一种特殊情形. 关于赋范环的理论，读者可以参考[4]. 如果$E$是Banach空间，则有

**定理 1.8** **设 $E$ 是 Banach 空间，则$\mathscr{B}(E)$按照它的范数也是 Banach 空间.**

**证** 由定理 1.7 立即导出.

在这一节中，我们引进了线性算子及有界线性算子等概念. 希望读者注意：

1° 有界线性算子是一类特殊的但又比较重要的线性算子，它有不少有用的性质，如：一个线性算子如果在一点连续，那么它在整个定义域上都连续，有界性与连续性等价，等等；

2° 与有界线性算子密切相连的第一个重要的量是它的范数，而且它满足通常范数的条件. 与有界线性算子密切相连的运算是有界线性算子之间的线性运算；

3° 将由赋范线性空间$E$到赋范线性空间$E_1$的每一个有界线性算子看成一个元素，再在所有这些元素构成的集合$\mathscr{B}(E,E_1)$中定义范数(即算子的范数)及线性运算(即算子间的线性运算)，则$\mathscr{B}(E,E_1)$成为一个赋范线性空间，这样我们就可以从更高的层次上来研究有界线性算子；

4° 由于$\mathscr{B}(E,E_1)$是一个赋范线性空间，因此一般的赋范线性空间中点列的收敛概念对于$\mathscr{B}(E,E_1)$来说是适用的，于是得出依算子范数收敛的概念.

## §2 Banach 开映射定理·闭图象定理

从这一节开始，我们将陆续介绍 Banach 空间及赋范线性空间中有关有界线性算子的几条基本定理. 我们从 Banach 开映射定理开始.

### 2.1 Banach 开映射定理

**定理 2.1(开映射定理)** 设有界线性算子$T$将 Banach 空间$E$映射成 Banach 空间$E_1$中某个第二类型的集$F$则

(i) $F=E_1$，即算子$T$的值域是整个空间$E_1$；

(ii) 存在正数$K$，使得对一切$y\in E_1$，有着$E$中的元素$x$满足

$$Tx=y \text{ 且 } \|x\|\leqslant K\|Tx\|. \tag{1}$$

**证** 为清楚起见，将证明分成三步.

1° 令$O_n=\{x:\|x\|\leqslant n, x\in E\}\ (n=1,2,3,\cdots)$，$M_n=T(O_n)$，即$M_n$为$O_n$的像. 因$E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}O_n$，故$F=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}M_n$. 由于$F$是第二类型的集，故存在$n_0$，使$M_{n_0}$不是稀疏集. 于是有$E_1$中的闭球

$$Q(y_0,r_0)=\{y:\|y-y_0\|\leqslant r_0\}$$

使 $M_{n_0}$ 在 $Q(y_0, r_0)$ 中稠密.

2° 令 $\delta_0=\frac{r_0}{n_0}$，我们证明 $M_1=T(O_1)$ 在 $E_1$ 中的闭球 $Q_{\delta_0}=Q(\theta,\delta_0)=\{y:\|y\|\leqslant\delta_0\}$ 中稠密。任取 $y\in Q_{\delta_0}$，则 $y_0+n_0y, y_0-n_0y$ 都属于 $Q(y_0, r_0)$，故存在 $O_{n_0}$ 中的点列 $\{x_k\}$ 与 $\{x'_k\}$ $(k=1,2,3,\cdots)$，使

$$\lim_{k\to\infty}Tx_k=y_0+n_0y;$$

$$\lim_{k\to\infty}Tx'_k=y_0-n_0y.$$

于是
$$\lim_{k\to\infty}T(x_k-x'_k)=2n_0y,$$

故
$$\lim_{k\to\infty}T\left(\frac{x_k-x'_k}{2n_0}\right)=y.$$

因 $\frac{x_k-x'_k}{2n_0}$ 显然属于 $O_1$，故 $M_1$ 在 $Q_{\delta_0}$ 中稠密.

我们用 $O_{\frac{1}{2^n}}$ 表示 $E$ 中的闭球 $\left\{x:\|x\|\leqslant\frac{1}{2^n}\right\}$；用 $Q_{\frac{\delta_0}{2^n}}$ 表示 $E_1$ 中的闭球 $\left\{y:\|y\|\leqslant\frac{\delta_0}{2^n}\right\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$。由第二步中得到的结果不难看出，对每个 $n$，$T(O_{\frac{1}{2^n}})$ 在 $Q_{\frac{\delta_0}{2^n}}$ 中稠密.

3° 我们证明 $M_1$ 包含 $Q_{\frac{\delta_0}{2}}$，进而证明定理成立. 任取 $y\in Q_{\frac{\delta_0}{2}}$. 由于 $T(O_{\frac{1}{2}})$ 在 $Q_{\frac{\delta_0}{2}}$ 中稠密，故存在 $x_1\in O_{\frac{1}{2}}$ 使

$$\|y-Tx_1\|\leqslant\frac{\delta_0}{2^2},$$

即 $y-Tx_1\in Q_{\frac{\delta_0}{2^2}}$. 又因 $T(O_{\frac{1}{2^2}})$ 在 $Q_{\frac{\delta_0}{2^2}}$ 中稠密，故存在 $x_2\in O_{\frac{1}{2^2}}$ 使

$$\|y-Tx_1-Tx_2\|\leqslant\frac{\delta_0}{2^3},$$

或
$$\|y-T(x_1+x_2)\|\leqslant\frac{\delta_0}{2^3}.$$

用归纳法可以证明：存在点列 $\{x_n\}\subset E$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$，其中

$x_n \in O_{\frac{1}{2^n}}$，使得

$$\|y-T(x_1+x_2+\cdots+x_n)\| \leqslant \frac{\delta_0}{2^{n+1}}. \tag{2}$$

由于$\|x_n\| \leqslant \frac{1}{2^n}$，而$E$为 Banach 空间，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$在$E$中收敛.

令$x=\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$，则

$$\|x\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}=1,$$

即$x \in O_1$. 由$T$的连续性，在(2)中令$n \to \infty$，有$y=Tx$. 故$M_1$ $(=T(O_1))$包含$Q_{\frac{\delta_0}{2}}$. 今任取$y \in E_1, y \neq \theta$，则

$$y'=\frac{\delta_0}{2} \frac{y}{\|y\|} \in Q_{\frac{\delta_0}{2}}.$$

于是存在$x' \in O_1$使$Tx'=y'$. 令$x=\frac{2\|y\|}{\delta_0}x'$，则

$$Tx=y \tag{3}$$

且

$$\|x\|=\frac{2\|y\|\|x'\|}{\delta_0} \leqslant \frac{2\|y\|}{\delta_0}=\frac{2}{\delta_0}\|Tx\|. \tag{4}$$

由(3)，可得$F=E_1$，定理的结论(i)成立. 令$K=\frac{2}{\delta_0}$，由(4)，有$\|x\| \leqslant K\|Tx\|$. 定理的结论(ii)成立. 证毕.

**推论 1** 设$T$满足定理 2.1的条件，则$T$将$E$中的任何开集映成$E_1$中的开集.

**证** 由定理的第三步证明可知，对于任给的$n$，$T(O_{\frac{1}{2^n}}) \supset Q_{\frac{\delta_0}{2^{n+1}}}$. 现设$G \subset E$是开集. 任取$y \in T(G)$，则存在$x \in G$使$Tx=y$. 因$x$

是$G$的内点，故存在$n$使$x+O_{\frac{1}{2^n}}\subset G$，于是$Tx+T(O_{\frac{1}{2^n}})\subset T(G)$，即$y+T(O_{\frac{1}{2^n}})\subset T(G)$. 注意到$Q_{\frac{\varepsilon_0}{2^{n+1}}}\subset T(O_{\frac{1}{2^n}})$，于是

$$y+Q_{\frac{\varepsilon_0}{2^{n+1}}}\subset T(G). \tag{5}$$

$y$是$y+Q_{\frac{\varepsilon_0}{2^{n+1}}}$的中心，因而是它的内点. 由(5)可知，$y$是$T(G)$的内点. 因$y\in T(G)$是任意的，故$T(G)$是开集. 证毕.

正是由于推论1中$T$将开集映成开集这一结论，我们才称定理2.1为开映射定理. 下面的推论2是显然的.

**推论2** **设有界线性算子$T$将Banach空间$E$映入Banach空间$E_1$，则$T$的值域或者是$E_1$或者是$E_1$中第一类型的集，二者必居其一.**

在第六章§2中，我们引进了逆映射的概念. 将这一概念用于线性算子$T$，便得到逆算子概念. 设$T$是由赋范线性空间$E$到赋范线性空间$E_1$的线性算子，如果$T$是双映射，则$T$的逆映射$T^{-1}$存在. 称$T^{-1}$为$T$的逆算子. 当$T$的逆算子存在时，称$T$是可逆的. 下面的定理提出了$T$有有界逆算子的一个重要条件.

**定理2.2** **（逆算子定理）设有界线性算子$T$将Banach空间$E$映成Banach空间$E_1$中的某个第二类型的集而且是一对一的，则$T$存在有界逆算子.**

**证** 由定理2.1，$T$的值域是$E_1$，再由假设，$T$是一对一的，故$T$的逆算子$T^{-1}$存在. 余下的是证明$T^{-1}$有界. 任取$y\in E_1$，记$x=T^{-1}y$. 由(1)中的不等式，有

$$\|T^{-1}y\|=\|x\|\leqslant K\|Tx\|=K\|y\|.$$

故$T^{-1}$有界. 证毕.

利用定理2.2可以证明关于范数等价的一个命题。为此先介绍范数等价的概念.

设$E$为线性空间，$\|\cdot\|_1$、$\|\cdot\|_2$是定义在$E$上的两个范数，若存

在正数 $K_1$、$K_2$，使不等式

$$K_1\|x\|_1\leqslant\|x\|_2\leqslant K_2\|x\|_1 \tag{6}$$

对一切 $x\in E$ 成立，则称两个范数 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价.

$E$ 赋以范数 $\|\cdot\|_1$、$\|\cdot\|_2$ 后所成的赋范线性空间分别记为 $(E,\|\cdot\|_1)$、$(E,\|\cdot\|_2)$. 容易看出，当 $\|\cdot\|_1$、$\|\cdot\|_2$ 等价时，$(E,\|\cdot\|_1)$、$(E,\|\cdot\|_2)$ 拓扑同构.

**推论** 设 $(E,\|\cdot\|_1)$、$(E,\|\cdot\|_2)$ 均为 Banach 空间. 若存在正数 $K$ 使得对一切 $x\in E$，有

$$\|x\|_2\leqslant K\|x\|_1, \tag{7}$$

**则 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价. 因此 $(E,\|\cdot\|_1)$ 与 $(E,\|\cdot\|_2)$ 拓扑同构.**

**证** 令 $I$ 是 $E$ 上的单位算子，则 $I$ 可以看成是由 Banach 空间 $(E,\|\cdot\|_1)$ 到 Banach 空间 $(E,\|\cdot\|_2)$ 的算子. $I$ 显然是一对一的，再由(7)，$I$ 还是有界的. 由定理 2.2，$I$ 的逆算子 $I^{-1}$ 有界. 因此存在 $K'>0$ 使 $\|I^{-1}x\|_1\leqslant K'\|x\|_2$，即

$$\|x\|_1\leqslant K'\|x\|_2. \tag{8}$$

由(7)及(8)可知 $\|\cdot\|_1$、$\|\cdot\|_2$ 等价. 证毕.

### 2.2 闭图象定理

数学分析中一元函数 $y=f(x)$ 的图象是平面上的一条曲线，这条曲线由平面上的点 $(x,f(x))$ 组成. 对一般的线性算子也可以引入图象的概念. 值得注意的是，由于一般的线性算子不一定有界，因而不一定有范数，图象就成了一个重要工具.

设 $E$、$E_1$ 都是赋范线性空间. 作 $E$、$E_1$ 的直接和 $E\oplus E_1$，则 $E\oplus E_1$ 是线性空间，在 $E\oplus E_1$ 中定义范数：

$$\|(x,y)\|=\|x\|+\|y\| \quad ((x,y)\in E\oplus E_1). \tag{9}$$

第七章§1中已经指出，$E\oplus E_1$ 按照(9)定义的范数是一个赋范线性空间.

今设 $T$ 是定义在 $E$ 的子空间 $D$ 上且值域包含在 $E_1$ 中的线性

子，$E\oplus E_1$ 中形如

$$(x, Tx) \quad (x\in D)$$

的元素的全体称为 $T$ 的图象，记为 $G_T$.

容易看出，对任何线性算子 $T$，$G_T$ 是 $E\oplus E_1$ 的一个子空间，它可以是闭的也可以是非闭的．如果 $T$ 的图象 $G_T$ 是 $E\oplus E_1$ 的闭子空间，则称 $T$ 为闭线性算子或简称闭算子.

**定理 2.3** **设 $E$、$E_1$ 都是赋范线性空间，$T$ 是由 $E$ 的子空间 $D$ 到 $E_1$ 的线性算子，则 $T$ 为闭算子的充分必要条件是对任意的 $\{x_n\}\subset D(n=1,2,3,\cdots)$，若 $\{x_n\}$、$\{Tx_n\}$ 在 $E$、$E_1$ 中分别收敛于 $x$、$y$，则 $x\in D$ 且 $Tx=y$.**

**证** 充分性．任取 $(x,y)\in\overline{G}_T$，则存在 $\{x_n\}\subset D(n=1,2,3,\cdots)$，使

$$\{(x_n, Tx_n)\}\to(x,y),$$

于是 $\{x_n\}\to x$，$\{Tx_n\}\to y$．由假设，$x\in D$，$Tx=y$，故 $(x,y)=(x,Tx)\in G_T$，因此 $G_T=\overline{G}_T$，$T$ 为闭算子.

必要性．设 $\{x_n\}\subset D(n=1,2,3,\cdots)$ 且 $\{x_n\}\to x$，$\{Tx_n\}\to y$．这里 $x\in E$，$y\in E_1$．于是

$$\{(x_n, Tx_n)\}\to(x,y).$$

由于 $G_T$ 为闭集，故 $(x,y)\in G_T$，因此 $x\in D$，且 $Tx=y$．证毕.

对于一个给定的线性算子，现在已有三个比较重要的概念：连续性、有界性及闭性．因连续性与有界性等价，故本质上只有两个不同的概念：有界性与闭性．有界性与闭性既有区别又有联系．有界线性算子不一定闭，闭线性算子也不一定有界．因此我们要问：有界线性算子何时是闭的？闭算子何时是有界的？

利用定理 2.3 可以证明：由赋范线性空间 $E$ 的子空间 $D$ 到赋范线性空间 $E_1$ 的有界线性算子是闭算子的充分必要条件是其定义域 $D$ 为 $E$ 的闭子空间．由于证明很简单，留给读者作为练习.

下面的定理 2.4 则回答了第二个问题，即闭算子何时是有界的。

**定理2.4** （闭图象定理） 设 $T$ 是由Banach空间 $E$ 到Banach空间 $E_1$ 的闭算子，则 $T$ 有界。

**证** 因 $E$、$E_1$ 都是 Banach 空间，于是 $E\oplus E_1$ 也是Banach 空间，其中的范数由等式(9)定义。由于 $G_T$ 在 $E\oplus E_1$ 中闭，故 $G_T$ 也是Banach空间。现在定义由 $G_T$ 到 $E$ 的算子 $\tilde{T}$：

$$\tilde{T}(x, Tx)=x.$$

不难证明，$\tilde{T}$ 是 $G_T$ 到 $E$ 上的一对一的线性算子。首先，$\tilde{T}$ 显然是线性的且为满映射。今设 $\tilde{T}(x, Tx)=\theta$。由定义可知 $x=\theta$，于是 $T\theta=\theta$，故 $(x, Tx)=(\theta, \theta)$。这表明 $\tilde{T}$ 是一对一的。

再由

$$\|\tilde{T}\{(x, Tx)\}\|=\|x\|\leqslant\|x\|+\|Tx\|=\|(x, Tx)\|$$

可知，$\tilde{T}$ 有界。

由定理 2.2，$\tilde{T}$ 有有界的逆算子 $\tilde{T}^{-1}$。于是对任一 $x\in E$，由

$$(x, Tx)=\tilde{T}^{-1}x$$

有

$$\|(x, Tx)\|\leqslant\|\tilde{T}^{-1}\|\|x\|.$$

因此更有

$$\|Tx\|\leqslant\|\tilde{T}^{-1}\|\|x\|,$$

$T$ 是有界的。证毕。

定理 2.4 比较重要，因为它将判断算子是否有界转化为判断算子是否闭，这在不少情况下比较方便。

但是，如果闭算子的定义域仅仅是 Banach 空间的一个子空间，则它不一定有界。

**例 1** 考察微分算子 $T=\frac{d}{dt}$。它是定义在 $C[a, b]$ 内具有连续

导数的函数类 $C^1$ 上而值域包含在 $C[a,b]$ 中的线性算子. 现在利用定理 2.3 证明 $T$ 是闭算子. 设 $\{x_n\}\subset C^1$ 且在 $C[a,b]$ 中 $\{x_n\}\to x$, $\{Tx_n\}\to y$ 同时成立. 第二个极限实际上是指 $\{x'_n\}\to y(n\to\infty)$. 因此函数列 $\{x_n(t)\}$ 以及函数列 $\{x'_n(t)\}$ 分别一致收敛于 $x(t)$ 及 $y(t)$. 由数学分析可知, $x(t)$ 具有连续导数 $x'(t)$ 且 $x'(t)=y(t)$. 因此 $x\in C^1$ 且 $Tx=y$, 由定理 2.3 可知, $T$ 是闭算子. 但前面已经证明 $T$ 无界, 因此 $T$ 是无界闭算子.

## §3 共鸣定理及其应用

### 3.1 共鸣定理

早在泛函分析形成一门独立的学科之前, 在古典分析的很多方面, 例如 19 世纪中叶对 Fourier 级数的研究, 20 世纪初对级数求和法、插值问题以及关于种种机械求积公式的收敛性的研究, 稍后, 关于求和法与奇异积分的研究等等, 都发现了共鸣定理的一些特殊情形. 因此可以设想这些特殊情形可以统一成一个一般的定理. 1927 年, Banach 与 Steinhaus 共同提出了这条定理.

**定义 3.1** 设 $E$ 为线性空间, $p$ 为定义在 $E$ 上的泛函, 如果对任意的 $x$、$y\in E$, 有

$$p(x+y)\leqslant p(x)+p(y),$$

则称 $p$ 为次可加的, 如果对任意的实数 $\alpha\geqslant 0$ 以及任意的 $x\in E$, 有

$$p(\alpha x)=\alpha p(x),$$

则称 $p$ 为正齐次的. 正齐次可加的非负泛函称为 Minkowski 泛函.

显然范数是 Minkowski 泛函, 反之则不一定. 应当指出, Minkowski 泛函是线性拓扑空间中的概念, 这里为了方便借用了这一名称, 但不甚确切, 希读者注意.

**定理 3.1 （共鸣定理）** 设 $\{T_\alpha\}$ $(\alpha\in\mathscr{A})$ 是定义在 Banach 空间 $E$ 上，而值域包含在赋范线性空间 $E_1$ 中的有界线性算子族，如果对每个 $x\in E$，有

$$\sup_{\alpha\in\mathscr{A}}\{\|T_\alpha x\|\}<+\infty, \tag{1}$$

则 $\{\|T_\alpha\|\}$ $(\alpha\in\mathscr{A})$ 有界.

**证** 令

$$p(x)=\sup_{\alpha\in\mathscr{A}}\{\|T_\alpha x\|\}. \tag{2}$$

由(1)可知，$p$ 在整个空间 $E$ 上处处有有限值且具有下列性质：

1° 对任何数 $\alpha$，$p(\alpha x)=|\alpha|p(x)$. 特别地，$p$ 是正齐次的；

2° $p$ 是次可加的.

性质 1° 是显然的. 现在证性质 2°. 由

$$p(x+y)=\sup_{\alpha\in\mathscr{A}}\{\|T_\alpha(x+y)\|\}\leqslant\sup_{\alpha\in\mathscr{A}}\{\|T_\alpha x\|+\|T_\alpha y\|\}$$

$$\leqslant\sup_{\alpha\in\mathscr{A}}\{\|T_\alpha x\|\}+\sup_{\alpha\in\mathscr{A}}\{\|T_\alpha y\|\}=p(x)+p(y),$$

可知性质 2° 成立. 因此 $p$ 是定义在 $E$ 上的一个Minkowski泛函. 现在进一步证明 $p$ 还具有下列性质：

3° 对任何实数 $k>0$，$\{x:p(x)\leqslant k\}$ 是 $E$ 中的闭集.

我们先证明下面的等式：

$$\{x:p(x)\leqslant k\}=\bigcap_{\alpha\in\mathscr{A}}\{x:\|T_\alpha x\|\leqslant k\}.$$

其实，由(2)可知，对任一 $x\in E$ 及任一 $\alpha\in\mathscr{A}$，有

$$p(x)\geqslant\|T_\alpha x\|.$$

因此当 $x$ 满足不等式 $p(x)\leqslant k$ 时，对一切 $\alpha\in\mathscr{A}$，有 $\|T_\alpha x\|\leqslant k$，故

$$\{x:p(x)\leqslant k\}\subset\{x:\|T_\alpha x\|\leqslant k\}$$

对一切 $\alpha\in\mathscr{A}$ 成立. 于是

$$\{x:p(x)\leqslant k\}\subset\bigcap_{\alpha\in\mathscr{A}}\{x:\|T_\alpha x\|\leqslant k\}.$$

反之，设对一切 $\alpha\in\mathscr{A}$，有 $\|T_\alpha x\|\leqslant k$，由(2)可知，$p(x)\leqslant k$，因此

$$\{x: p(x) \leqslant k\} \supset \bigcap_{\alpha \in \mathscr{A}} \{x: \|T_\alpha x\| \leqslant k\}.$$

故等号成立. 因为每个 $T_\alpha$ 连续，故$\{x: \|T_\alpha x\| \leqslant k\}$是$E$中的闭集，作为它们的交，$\{x: p(x) \leqslant k\}$也是$E$中的闭集，性质 $3^\circ$ 成立.

记 $M_k = \{x: p(x) \leqslant k\}$，这里 $k$ 为自然数. 由于 $p$ 处处取有限值，故 $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$. 由于$E$是第二类型的集，$\{M_k\}$中必有某个集，譬如说 $M_{k_0}$ 在$E$中的某个闭球 $Q(x_0, r_0) = \{x: \|x - x_0\| \leqslant r_0\}$ 中稠密. 又因 $M_{k_0}$是闭集，故 $M_{k_0} \supset Q(x_0, r_0)$.

任取 $x \in E$, $x \neq \theta$, 则 $x_0 + \dfrac{r_0 x}{\|x\|}$, $x_0 - \dfrac{r_0 x}{\|x\|}$ 均属于 $Q(x_0, r_0)$，因此更属于 $M_{k_0}$，所以

$$p\left(x_0 + \frac{r_0 x}{\|x\|}\right) \leqslant k_0, \ p\left(x_0 - \frac{r_0 x}{\|x\|}\right) \leqslant k_0.$$

由性质 $1^\circ$，对任何 $x \in E$，$p(-x) = p(x)$，因此 $p\left(x_0 - \dfrac{r_0 x}{\|x\|}\right) = p\left(\dfrac{r_0 x}{\|x\|} - x_0\right)$. 再由性质 $2^\circ$，得出

$$\begin{aligned} p\left(\frac{2 r_0 x}{\|x\|}\right) &= p\left(\frac{r_0 x}{\|x\|} + x_0 + \frac{r_0 x}{\|x\|} - x_0\right) \\ &\leqslant p\left(\frac{r_0 x}{\|x\|} + x_0\right) + p\left(\frac{r_0 x}{\|x\|} - x_0\right) \leqslant 2k_0. \end{aligned}$$

最后仍由性质 $1^\circ$，有

$$p(x) \leqslant \frac{k_0}{r_0} \|x\| \quad (x \in E).$$

因此对一切 $\alpha \in \mathscr{A}$，

$$\|T_\alpha x\| \leqslant \frac{k_0}{r_0} \|x\| \quad (x \in E).$$

故$\|T_\alpha\| \leqslant \dfrac{k_0}{r_0}$. $\{\|T_\alpha\|\}$为有界集. 证毕.

当$\{\|T_\alpha\|\}$有界时，我们称有界线性算子族$\{T_\alpha\}$ $(\alpha \in \mathscr{A})$一致有

界. 共鸣定理告诉我们,由$\{T_\alpha x\}$ ($\alpha\in\mathscr{A}$)对每个$x\in E$的有界性可以导出$\{T_\alpha\}$ ($\alpha\in\mathscr{A}$)的一致有界性. 因此共鸣定理又称为一致有界原理(或称为Banach-Steinhans定理).

现在可以进一步研究算子列的强收敛. 首先回顾一下§1中关于算子列强收敛的定义. 设$T$、$T_n\in\mathscr{B}(E,E_1)$ ($n=1,2,3,\cdots$),若对每个$x\in E$,

$$\lim_{n\to\infty}\|T_nx-Tx\|=0,$$

则称$\{T_n\}$强收敛于$T$. 关于算子列的强收敛,主要问题是:

1° 强收敛的算子列是否一致有界?算子列满足什么条件时是强收敛的?

2° $\mathscr{B}(E,E_1)$在算子列强收敛的意义下是否完备?就是说,若对每个$x\in E$, $\{T_nx\}$是$E_1$中的基本点列, 是否存在$T\in\mathscr{B}(E,E_1)$,使得$\{T_n\}$强收敛于$T$?

现在先回答第一个问题.

**定理 3.2** 设$\{T_n\}$ ($n=1,2,3,\cdots$)是由Banach空间$E$到Banach空间$E_1$的有界线性算子列, 则$\{T_n\}$强收敛于某一算子$T\in\mathscr{B}(E,E_1)$的充分必要条件是:

(i) $\{T_n\}$ ($n=1,2,3,\cdots$)一致有界;

(ii) 存在$E$的某个稠密子集$G$,使得对一切$x\in G$, $\{T_nx\}$在$E_1$中收敛.

当(i)、(ii)满足时,$\{T_n\}$的极限算子$T$的范数满足:

$$\|T\|\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\|T_n\|. \tag{3}$$

**证** 必要性. 设$\{T_n\}$强收敛于算子$T$, 则对每个$x\in E$, $\{T_nx\}$有界,由定理3.1, $\{T_n\}$一致有界, 故(i)成立. 至于(ii), 只需取$G=E$便知它成立.

**充分性** 因 $\{T_n\}$ 一致有界，故存在 $M>0$，使得对一切 $n=1,2,3,\cdots$，有 $\|T_n\|\leqslant M$. 任取 $x\in E$，由于 $G$ 在 $E$ 中稠密，对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $y\in G$，使

$$\|x-y\|<\frac{\varepsilon}{3M}.$$

由条件(ii)，$\{T_ny\}$ 在 $E_1$ 中收敛，故存在 $N>0$，使得对一切 $n>N$ 以及任意的自然数 $k$，有

$$\|T_{n+k}y-T_ny\|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

于是

$$\begin{aligned}\|T_{n+k}x-T_nx\|&\leqslant\|T_{n+k}x-T_{n+k}y\|\\&\quad+\|T_{n+k}y-T_ny\|+\|T_ny-T_nx\|\\&<M\cdot\frac{\varepsilon}{3M}+\frac{\varepsilon}{3}+M\cdot\frac{\varepsilon}{3M}=\varepsilon.\end{aligned}$$

故 $\{T_nx\}$ 是 $E_1$ 中的基本点列. 由于 $E_1$ 完备，故 $\{T_nx\}$ 在 $E_1$ 中收敛. 记

$$Tx=\lim_{n\to\infty}T_nx\quad(x\in E).$$

则 $T$ 对任一 $x\in E$ 有定义且它的值域包含在 $E_1$ 中. 由于每个 $T_n$ 都是由 $E$ 到 $E_1$ 的线性算子，故 $T$ 也是由 $E$ 到 $E_1$ 的线性算子. 再由

$$\begin{aligned}\|Tx\|&=\lim_{n\to\infty}\|T_nx\|=\varliminf_{n\to\infty}\|T_nx\|\\&\leqslant\varliminf_{n\to\infty}(\|T_n\|\|x\|)=(\varliminf_{n\to\infty}\|T_n\|)\|x\|\end{aligned}$$

可知，$T$ 有界且

$$\|T\|\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\|T_n\|.$$

因此(3)成立. 最后，根据算子列强收敛的定义可知，$\{T_n\}$ 强收敛于 $T$. 证毕.

**注** 定理 3.2 的充分性部分没有用到共鸣定理，因而只需要假定 $E$ 是线性赋范空间.

在 §1 中，我们曾经证明当 $E_1$ 完备时，线性算子空间 $\mathscr{B}(E,E_1)$ 也是完备的. 现在则可以证明当 $E, E_1$ 都完备时，$\mathscr{B}(E,E_1)$ 对于算子列的强收敛也是完备的(它的含义在第158页中已经指出)，因此回答了关于算子列强收敛的第二个问题.

**定理 3.3** **设 $E, E_1$ 都是Banach 空间，则 $\mathscr{B}(E,E_1)$ 在算子列强收敛意义下是完备的.**

**证** 设 $\{T_n\} \subset \mathscr{B}(E,E_1)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 是一有界线性算子列，对每个 $x \in E$，$\{T_n x\}$ 是 $E_1$ 中的基本点列，我们证明 $\{T_n\}$ 强收敛.

因 $\{T_n x\}$ 是基本点列，故 $\{T_n x\}$ 有界，由共鸣定理可知 $\{T_n\}$ 一致有界. 由于 $E_1$ 是 Banach 空间，故对每个 $x \in E$，$\{T_n x\}$ 在 $E_1$ 中收敛. 于是 $\{T_n\}$ 满足定理 3.2 中的条件(i)、(ii)，故 $\{T_n\}$ 强收敛于某一有界线性算子 $T \in \mathscr{B}(E,E_1)$. 这表明 $\mathscr{B}(E,E_1)$ 在算子列强收敛意义下完备. 证毕.

我们应当注意，在共鸣定理、定理 3.2 及定理 3.3 中，关于空间 $E, E_1$ 的假定彼此不同. 在共鸣定理中，需假定 $E$ 是 Banach 空间、在定理 3.2 的充分性部分中，需假定 $E_1$ 是 Banach 空间，而在必要性部分中，需假定 $E$ 是 Banach 空间. 在定理 3.3 中则需假定 $E$、$E_1$ 都是 Banach 空间.

### 3.2 共鸣定理的应用

作为共鸣定理的应用，我们介绍几个实例，它们都是共鸣定理或它的逆否命题在各个不同问题上的特殊形式.

**例 1** Fourier 级数的发散问题 令 $C_{2\pi}$ 为定义在实轴上以 $2\pi$ 为周期的实周期连续函数组成的集. 在 $C_{2\pi}$ 中定义范数于下:

$$\|x\| = \max_{-\infty<t<+\infty} |x(t)| \quad (x \in C_{2\pi}).$$

则 $C_{2\pi}$ 是一个 Banach 空间.

设 $x\in C_{2\pi}$ 的 Fourier 级数是

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt).$$

由古典分析知道，上述级数前 $n+1$ 项的和为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(s)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(s-t)\right]ds\\&=\int_{-\pi}^{\pi}x(s)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(s-t)}{2\pi\sin\frac{1}{2}(s-t)}ds.\end{aligned}$$

令 $K_n(s,t)=\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(s-t)}{2\pi\sin\frac{1}{2}(s-t)}$，称$K_n(s,t)$ 为Dirichlet 核.

我们的目的是证明：对任一点 $t_0\in[-\pi,\pi]$，$C_{2\pi}$ 中必有函数 $x(t)$，它的 Fourier 级数在 $t_0$ 处发散. 因 $C_{2\pi}$ 中的函数均以 $2\pi$ 为周期，不失一般性，可设 $t_0=0$. 对每个 $n$，作 $C_{2\pi}$ 上的线性泛函

$$f_n(x)=\int_{-\pi}^{\pi}x(s)K_n(s,0)ds.$$

由 $K_n(s,0)=\dfrac{1}{2\pi}+\dfrac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\cos ks$可知，$K_n(s,0)$是连续的，因此 $f_n$ 有界. 利用 §1.1 例 7 中求连续函数空间 $C[a,b]$上积分算子范数的方法可以证明：

$$\|f_n\|=\int_{-\pi}^{\pi}|K_n(s,0)|ds.$$

现在估计积分$\int_{-\pi}^{\pi}|K_n(s,0)|ds$. 注意到

$$\int_{-\pi}^{\pi}|K_n(s,0)|ds=\int_0^{2\pi}|K_n(s,0)|ds$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)s\right|}{\left|\sin\frac{1}{2}s\right|}ds$$

$$\geqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)s\right|}{s/2}ds\xlongequal{\text{令 } u=\left(n+\frac{1}{2}\right)s}\frac{1}{\pi}\int_0^{2(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{|\sin u|}{u}du.$$

由于

$$\int_0^{(2n+1)\pi}\frac{|\sin u|}{u}du=\sum_{k=0}^{2n}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin u|}{u}du$$

$$\geqslant\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin u|du=\sum_{k=0}^{2n}\frac{2}{(k+1)\pi}\to\infty,$$

故

$$\|f_n\|=\int_{-\pi}^{\pi}|K_n(s,0)|ds\to\infty.$$

由定理 3.2，至少存在某个函数 $x_0\in C_{2\pi}$，使$\{f_n(x_0)\}$发散. 由$f_n$的定义可知，$x_0(0)$的 Fourier 级数在 $t=0$ 处发散.

**例 2**（**机械求积公式的收敛问题**） 设 $f\in C[0,1]$. 我们的目的是计算积分$\int_0^1 f(t)dt$. 一般来说，求它的精确值是困难的，因此往往只能求近似值. 取$[0,1]$中的点

$$0\leqslant t_0^{(n)}<t_1^{(n)}<\cdots<t_n^{(n)}\leqslant 1,$$

用和$\sum_{k=0}^{n}f(t_k^{(n)})A_k^{(n)}$作为$\int_0^1 f(t)dt$的$n$次近似:

$$\sum_{k=0}^{n}f(t_k^{(n)})A_k^{(n)}\approx\int_0^1 f(t)dt\quad\text{（机械求积公式）},\tag{4}$$

其中 $A_k^{(n)}(k=0,1,\cdots,n)$ 是待定的，我们选择 $A_k^{(n)}$ 使(4)式对一切次数 $\leqslant n$ 的多项式精确成立，为此只需(4)对单项式 $1,t,t^2,\cdots,t^n$ 成立. 设 $A_k^{(n)}$ 已选好. 现在的问题是，对一切 $f\in C[0,1]$ 是否都有

$$\sum_{k=0}^{n} f(t_k^{(n)})A_k^{(n)} \longrightarrow \int_0^1 f(t)\,dt. \tag{5}$$

由定理 3.2 可以证明：(5) 成立的充分必要条件是存在正数 $M$，使得对一切 $n$ 有

$$\sum_{k=0}^{n} |A_k^{(n)}| \leqslant M. \tag{6}$$

为此，我们先作 $C[0,1]$ 上的有界线性泛函 $F_n$:

$$F_n(f)=\sum_{k=0}^{n} f(t_k^{(n)})A_k^{(n)},$$

则 $F_n$ 的范数满足

$$\|F_n\|=\sum_{k=0}^{n} |A_k^{(n)}|. \tag{7}$$

其实，对任一 $f\in C[0,1]$，有

$$|F_n(f)|=\left|\sum_{k=0}^{n} f(t_k^{(n)})A_k^{(n)}\right|\leqslant\left(\sum_{k=0}^{n} |A_k^{(n)}|\right)\|f\|,$$

故

$$\|F_n\|\leqslant\sum_{k=0}^{n} |A_k^{(n)}|. \tag{8}$$

另一方面，对每个 $n(n=1,2,3,\cdots)$，可取区间 $[0,1]$ 上的连续函数 $f_n(\cdot)$ 使

$$\|f_n\|=1,\ f_n(t_k^{(n)})=\operatorname{sgn}A_k^{(n)}\quad (k=0,1,2,\cdots,n),$$

于是

$$\|F_n\| \geqslant |F_n(f_n)| = \sum_{k=0}^{n} |A_k^{(n)}|, \tag{9}$$

由(8)、(9)可得(7)。

现在再证明(6)式的充分必要性. 如果对于每个 $f \in C[0,1]$, (5)成立,由定理 3.2, $\{F_n\}$ 一致有界. 故存在 $M>0$,使对一切 $n$, $\|F_n\| \leqslant M$,因此(6)成立. 反之,如果(6)成立,则对每个多项式 $p(\cdot)$,只要取 $n$ 大于 $p(\cdot)$的次数,就有

$$\sum_{k=0}^{n} p(t_k^{(n)}) A_k^{(n)} = \int_0^1 p(t)\,dt,$$

故
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} p(t_k^{(n)}) A_k^{(n)} = \int_0^1 p(t)\,dt.$$

注意到多项式的全体在 $C[0,1]$中稠密,由定理 3.2 可知(5)成立.

例 3(Lagrange 插值公式的发散问题) §1.1 例 6 中已经指出,由 Lagrange 插值多项式可以引进有界线性算子 $L_n$:

$$y = L_n x : y(t) = \sum_{k=1}^{n} x(t_k) l_k(t),$$

且
$$\|L_n\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} \sum_{k=1}^{n} |l_k(t)|.$$

在函数逼近论中 (见[9]) 已经证明上式右端大于$\dfrac{\ln n}{8\sqrt{\pi}}$, 故$\|L_n\| \to \infty (n \to \infty)$,由定理 3.2, $C[a,b]$中至少存在一个函数$x(\cdot)$使$L_n x$不收敛.

在§2、§3 中,我们研究了 Banach 空间中的几条基本定理: Banach 开映射定理及其特例 Banach 逆算子定理、共鸣定理,此外还介绍了 Banach 逆算子定理的一个重要应用——闭图象定理. 希望读者注意:

1° Banach 开映射定理（以及它的特例 Banach 逆算子定理）、共鸣定理以及§4 中将要介绍的有界线性泛函的延拓定理是 Banach 空间中有界线性算子及有界线性泛函理论中的基本定理. 通常称为三大基本定理或基本原理. 它们有着广泛的应用；

2° 无界线性算子无范数可言，于是图象就成了研究无界线性算子的一个重要工具. 利用图象，我们引进了闭算子的概念. 有界线性算子无疑是一类重要的线性算子，闭算子则是继有界线性算子之后另一类重要的线性算子；

3° 闭性与有界性是既有区别又有联系的两个重要概念，在一定条件下它们相互转化. 其中又以闭图象定理为主要方面，它提供了一个简洁而又有用的判别准则. 依据这条准则，在一定条件下，闭算子转化为有界线性算子；

4° 在学习这两节时，Banach 空间的完备性是一个经常起作用的因素，离开了它，有的结论就不再成立，希望读者特别注意.

## §4 有界线性泛函

在§1 中，我们引进了线性算子与有界线性算子的概念，作为它们的特例，则有线性泛函与有界线性泛函的概念. 但到目前为止，我们对线性泛函及有界线性泛函知道得还很少. 譬如说，还不知道任一含有非零元素的赋范线性空间 $E$ 上是否一定存在非零有界线性泛函. 要回答这个问题，首先需要讨论有界线性泛函的延拓这一非常重要的课题. 这一节的中心议题就是研究它以及它的若干推论.

### 4.1 有界线性泛函的延拓

设 $E$ 是线性空间，$f_1, f_2$ 分别是定义在 $E$ 的子空间 $G_1$、$G_2$ 上的线性泛函. 如果满足以下两个条件：

1° $G_1 \subset G_2$;

2° 对任一 $x \in G_1$, $f_1(x)=f_2(x)$, 则称 $f_2$ 是 $f_1$ 在 $G_2$ 上的一个延拓.

**定理 4.1** **设 $G$ 为实线性空间 $E$ 的子空间, $f$ 是定义在 $G$ 上的实线性泛函, $p$ 是定义在 $E$ 上的 Minkowski 泛函. $f$ 与 $p$ 之间满足**

$$f(x) \leqslant p(x) \quad (\text{对一切 } x \in G),$$

**则必存在定义在 $E$ 上的实线性泛函 $F_0$ 使得**

(i) 当 $x \in G$ 时, $F_0(x)=f(x)$, 即 $F_0$ 是 $f$ 在 $E$ 上的一个延拓;

(ii) 当 $x \in E$ 时, $F_0(x) \leqslant p(x)$.

**证** 不妨设 $G \neq E$. 任取 $x_0 \in E \backslash G$. 令 $G_1$ 是 $G$ 与 $x_0$ 张成的子空间:

$$G_1=\{\alpha x_0+x: -\infty<\alpha<+\infty, x \in G\}.$$

对任何 $x', x'' \in G$, 有

$$\begin{aligned} f(x'')-f(x') &= f(x''-x') \leqslant p(x''-x') \\ &\leqslant p(x''+x_0)+p(-x'-x_0), \end{aligned}$$

故

$$-p(-x'-x_0)-f(x') \leqslant p(x''+x_0)-f(x'').$$

因 $x', x''$ 在 $G$ 中任意, 故

$$\begin{aligned} c' &= \sup_{x' \in G}\{-p(-x'-x_0)-f(x')\} \\ &\leqslant c''=\inf_{x'' \in G}\{p(x''+x_0)-f(x'')\}. \end{aligned}$$

任取数 $c$ 满足 $c' \leqslant c \leqslant c''$, 在 $G_1$ 上定义泛函 $f'$ 如下:

$$f'(\alpha x_0+x)=\alpha c+f(x) \quad (x \in G). \tag{1}$$

由于 $x_0 \overline{\in} G$, 故 $G_1$ 中每个元素可唯一地表成 $\alpha x_0+x$ 的形式, 因此(1)唯一地定义了线性泛函 $f'$. 现在证明, 对任何 $\alpha x_0+x \in G_1$, 有

$$f'(\alpha x_0+x) \leqslant p(\alpha x_0+x). \tag{2}$$

若 $\alpha=0$, 则无需证. 若 $\alpha>0$, 由 $c$ 的取法, 有

$$c\leqslant c''=\inf_{x''\in G}\{p(x''+x_0)-f(x'')\}\leqslant p\left(\frac{x}{\alpha}+x_0\right)-f\left(\frac{x}{\alpha}\right),$$

故
$$c+f\left(\frac{x}{\alpha}\right)\leqslant p\left(x_0+\frac{x}{\alpha}\right),$$

两边同乘以 $\alpha$, 可得

$$\alpha c+f(x)\leqslant p(\alpha x_0+x).$$

若 $\alpha<0$, 则有

$$-p\left(-\frac{x}{\alpha}-x_0\right)-f\left(\frac{x}{\alpha}\right)\leqslant c,$$

于是
$$-c-f\left(\frac{x}{\alpha}\right)\leqslant p\left(-\frac{x}{\alpha}-x_0\right),$$

两边同乘以正数 $-\alpha$, 可得

$$\alpha c+f(x)\leqslant p(\alpha x_0+x).$$

因此(2)成立.

以上的论证表明, $f'$ 是 $f$ 在 $G_1$ 上的一个延拓且满足不等式(2).

用 $\mathscr{F}$ 表示 $f$ 的一切满足

$$F(x)\leqslant p(x)$$

的延拓 $F$ 的全体, 在上述不等式中, $x$ 属于 $F$ 的定义域 $D_F$. 由于我们已经证明 $f$ 可延拓于 $G_1$ 上且满足(2), 故 $\mathscr{F}$ 非空. 在 $\mathscr{F}$ 中规定如下的序: 对 $F_1, F_2\in\mathscr{F}$, 若 $F_2$ 是 $F_1$ 的延拓, 则称 $F_2$ 在 $F_1$ 之后记为 $F_1\prec F_2$. 于是 $\mathscr{F}$ 成为一个半序集. 设 $M$ 是 $\mathscr{F}$ 的一个全序子集, 令

$$D=\bigcup_{F\in M}D_F,$$

在 $D$ 上定义泛函 $\varphi$ 如下: 任取 $x\in D$, 则 $x$ 必属于某个 $D_F$, 对此等 $x$, 令

$$\varphi(x)=F(x).$$

由于 $M$ 是全序集, 故 $\varphi$ 是以 $D$ 为定义域的唯一确定的线性泛函且满足

$$\varphi(x)\leqslant p(x)\qquad (x\in D).$$

$\varphi$显然是$f$的一个延拓，故$\varphi\in\mathscr{F}$. $\varphi$还是$M$的上确界，于是$\mathscr{F}$满足第一章Zorn引理的条件，故$\mathscr{F}$有极大元. 用$F_0$表$\mathscr{F}$的一个极大元. 现在证明$F_0$的定义域$D_{F_0}=E$. 设不然，则可取$x_1\in E\backslash D_{F_0}$，记$E_1$为由$D_{F_0}$与$x_1$张成的子空间. 将$F_0$延拓到$E_1$上而成为$F_1$，且使不等式

$$F_1(x)\leqslant p(x)$$

对一切$x\in E_1$成立. 因此$F_1\in\mathscr{F}$. $F_1$是$F_0$的一个延拓且$F_1\neq F_0$，与$F_0$的极大性矛盾，故$D_{F_0}=E$. 于是$F_0$是$f$在$E$上的一个延拓且满足$F_0(x)\leqslant p(x)(x\in E)$. 证毕.

**4.2 Hahn-Banach 定理**

现在介绍本节的主要定理，先证明下面的引理.

**引理** **设$f$是复赋范线性空间$E$上的有界线性泛函，令$\varphi(x)=\mathrm{Re}f(x)$ (对一切$x\in E$)，则$\varphi$是$E$上的有界实线性泛函**(注意：所谓实线性，是指除可加性外，对任何实数$\alpha$，有$\varphi(\alpha x)=\alpha\varphi(x)$)，**且**

$$f(x)=\varphi(x)-i\varphi(ix),\quad \|f\|=\|\varphi\|. \tag{3}$$

**证** 设$f(x)=\varphi(x)+i\psi(x)$，这里$\varphi(x)$、$\psi(x)$分别表示$f(x)$的实部与虚部. 显然$\varphi$、$\psi$均为$E$上的实线性泛函. 由等式

$$i[\varphi(x)+i\psi(x)]=if(x)=f(ix)=\varphi(ix)+i\psi(ix),$$

可得$\varphi(ix)=-\psi(x)$，再代入$f(x)=\varphi(x)+i\psi(x)$中可知，(3)中第一个等式成立. 现在证明(3)式中第二个等式. 由

$$|\varphi(x)|\leqslant|f(x)|\leqslant\|f\|\|x\|\quad (x\in E),$$

可知，$\varphi$有界且$\|\varphi\|\leqslant\|f\|$. 对任一给定的$x\in E$，记$\alpha$为复数$f(x)$的辐角，于是$f(e^{-i\alpha}x)$是实数，因此$f(e^{-i\alpha}x)=\varphi(e^{-i\alpha}x)$. 故

$$\begin{aligned}|f(x)|&=|e^{-i\alpha}f(x)|=|f(e^{-i\alpha}x)|\\&=|\varphi(e^{-i\alpha}x)|\leqslant\|\varphi\|\|x\|,\end{aligned}$$

由 $x$ 的任意性可知，$\|f\|\leqslant\|\varphi\|$. (3)中第二个等式成立. 证毕.

在第六章中，我们已经约定，"赋范线性空间"一词是指它既可以是实空间也可以是复空间. 现在我们仍遵循这一约定.

定理 4.2 **设 $G$ 是赋范线性空间 $E$ 的子空间，$f$ 是定义在 $G$ 上的有界线性泛函，则 $f$ 可以延拓到整个 $E$ 上且保持范数不变，即存在定义在 $E$ 上的有界线性泛函 $F_0$ 使下列性质成立:**

(i) **对任一 $x\in G$, $F_0(x)=f(x)$;**

(ii) **$\|F_0\|=\|f\|_G$，这里 $\|f\|_G$ 表示 $f$ 作为 $G$ 上的有界线性泛函的范数.**

**证** 不妨设 $E$ 是复赋范线性空间. 由引理,

$$f(x)=\varphi(x)-i\varphi(ix)\qquad(x\in G).$$

因此只需讨论 $\varphi$ 的延拓. 为此，我们将 $E$、$G$ 看成实赋范线性空间，而 $\varphi$ 则是定义在 $G$ 上的有界实线性泛函. 令

$$p(x)=\|f\|_G\|x\|\qquad(x\in E).$$

则 $p$ 是定义在 $E$ 上的 Minkowski 泛函且当 $x\in G$ 时

$$\varphi(x)\leqslant|f(x)|\leqslant\|f\|_G\|x\|=p(x).\tag{4}$$

故 $\varphi$、$p$ 满足定理 4.1 的条件. 于是可以将 $\varphi$ 延拓成定义在整个 $E$ 上的实线性泛函 $\varphi_0$ 且对任一 $x\in E$，有 $\varphi_0(x)\leqslant p(x)$. 现令

$$F_0(x)=\varphi_0(x)-i\varphi_0(ix).$$

以下证明 $F_0$ 便是满足定理中(i)、(ii)两个条件的有界线性泛函. 首先，对任何 $x\in E$ 有

$$\begin{aligned}F_0(ix)&=\varphi_0(ix)-i\varphi_0(-x)\\&=\varphi_0(ix)+i\varphi_0(x)\\&=i[\varphi_0(x)-i\varphi_0(ix)]=iF_0(x).\end{aligned}$$

再由 $F_0$ 的实线性(因 $\varphi_0$ 实线性)，对任何复数 $\alpha=\alpha_1+i\alpha_2$，有

$$\begin{aligned}F_0(\alpha x)&=F_0(\alpha_1x+i\alpha_2x)\\&=\alpha_1F_0(x)+\alpha_2F_0(ix)\end{aligned}$$

$$=\alpha_1F_0(x)+i\alpha_2F_0(x)=\alpha F_0(x).$$

故 $F_0$ 是定义在 $E$ 上的线性泛函. 其次，当 $x\in G$时，有

$$F_0(x)=\varphi_0(x)-i\varphi_0(ix)=\varphi(x)-i\varphi(ix)=f(x),$$

故 $F_0$ 是 $f$ 在 $E$ 上的一个延拓.

最后证明 $F_0$ 有界且$\|F_0\|=\|f\|_G$. 为此先证明$\|\varphi_0\|=\|f\|_G$. 因为 $\varphi_0$ 是 $\varphi$ 的延拓，故$\|\varphi_0\|\geqslant\|\varphi\|_G$. 由引理，$\|\varphi\|_G=\|f\|_G$. 因此$\|\varphi_0\|\geqslant\|f\|_G$. 另一方面，由 $\varphi_0(x)\leqslant p(x)$对一切 $x\in E$ 成立，有

$$|\varphi_0(x)|=\varphi_0(\varepsilon x)\leqslant p(\varepsilon x)=\|f\|_G\|\varepsilon x\|=\|f\|_G\|x\|, \tag{5}$$

其中 $\varepsilon=1$ 或 $-1$ 视 $\varphi_0(x)\geqslant0$ 或 $\varphi_0(x)<0$ 而定. 由(5)可知，$\|\varphi_0\|\leqslant\|f\|_G$. 因此$\|\varphi_0\|=\|f\|_G$. 由 $F_0$ 的定义及引理可知，$F_0$ 有界且$\|F_0\|=\|\varphi_0\|$. 故$\|F_0\|=\|f\|_G$.

这样，我们便证明了 $F_0$ 满足定理中的(i)、(ii)两个条件. 证毕.

定理 4.2 有不少重要的推论，现在逐一加以讨论.

**推理 1　设 $E$ 是赋范线性空间，$E\neq\{\theta\}$. 则对任一 $x_0\in E$，存在 $E$ 上的有界线性泛函 $f$ 使**

$$\|f\|=1,\quad f(x_0)=\|x_0\|. \tag{6}$$

**证**　不妨设 $x_0\neq\theta$. 令 $G=\{\alpha x_0\}$，其中 $\alpha$ 取遍实数域或复数域. 在 $G$ 上定义线性泛函 $f$:

$$f(\alpha x_0)=\alpha\|x_0\|.$$

$f$ 显然满足(6)中第二个等式对任一 $x=\alpha x_0$，有$|f(x)|=|\alpha|\|x_0\|=\|\alpha x_0\|=\|x\|$，故 $f$ 有界且$\|f\|_G=1$. 由定理 4.2，$f$ 可以延拓到整个 $E$ 上且保持范数不变. 为简单起见，将延拓后的泛函仍记为 $f$，则 $f$ 满足(6)中全部条件. 证毕.

由推论 1，可以看出:

1°　对任何赋范线性空间 $E$，若 $E\neq\{\theta\}$，必存在"足够多"的非零有界线性泛函;

$2^\circ$ 如果对于 $E$ 上的一切有界线性泛函 $f$，有 $f(x_0)=0$，则 $x_0=\theta$.

由 $2^\circ$，为了判断 $E$ 中的元 $x_0$ 是否等于零，只要判断 $E$ 上的一切有界线性泛函 $f$ 对 $x_0$ 作用后是否为零就行了.

**推论 2** 设 $G$ 是赋范线性空间 $E$ 的子空间，$x_0\in E$，若

$$\rho(x_0, G)=\inf_{x\in G}\|x_0-x\|=\delta>0,$$

**则存在 $E$ 上的有界线性泛函 $f$，使**

$$\|f\|=\frac{1}{\delta},\ f(x_0)=1,\text{而对 } x\in G,\ f(x)=0. \tag{7}$$

**证** 令

$$G_1=\{\alpha x_0+x: \alpha\in K,\ x\in G\}$$

则 $G_1$ 为 $E$ 的子空间，再令

$$f(\alpha x_0+x)=\alpha,$$

那么 $f$ 是 $G_1$ 上的线性泛函满足:

$$f(x_0)=1;\ \text{对 } x\in G, f(x)=0.$$

注意到当 $\alpha\neq 0$ 时，

$$\|\alpha x_0+x\|=|\alpha|\left\|x_0+\frac{x}{\alpha}\right\|\geqslant|\alpha|\delta,$$

当 $\alpha=0$ 时，上式显然成立. 故

$$|f(\alpha x_0+x)|=|\alpha|\leqslant\frac{1}{\delta}\|\alpha x_0+x\|,$$

因此 $f$ 有界且

$$\|f\|_{G_1}\leqslant\frac{1}{\delta}. \tag{8}$$

另一方面，我们取 $x_n\in G\ (n=1,2,3,\cdots)$，使 $\|x_0-x_n\|\to\delta$，于是

$$\|f\|_{G_1}\|x_0-x_n\|\geqslant|f(x_0-x_n)|=|f(x_0)|=1,$$

故 $\|f\|_{G_1}\geqslant\frac{1}{\|x_0-x_n\|}$. 令 $n\to\infty$，得着

$$\|f\|_{G_1}\geq\frac{1}{\delta} \tag{9}$$

由(8)及(9)，$\|f\|_{G_1}=\frac{1}{\delta}$. 再由定理 4.2，$f$ 可以延拓到整个 $E$ 上且保持范数不变. 将延拓后的泛函仍记为 $f$，则 $f$ 满足(7). 证毕.

在推论 2 中，若令 $f_1=\delta f$，则 $\|f_1\|=1$，$f_1(x_0)=\delta$，于是推论 2 又可改写成：

**推论 3** 设 $G$ 是赋范线性空间 $E$ 的子空间，$x_0\in E$，若

$$\rho(x_0,G)=\inf_{x\in G}\|x_0-x\|=\delta>0,$$

**则存在 $E$ 上的有界线性泛函 $f_1$，使**

$$\|f_1\|=1,\ f_1(x_0)=\delta,\text{而对 } x\in G,\ f_1(x)=0.$$

利用推论 2（或推论 3）可以导出下列结论：

1° $x_0\in\overline{G}$ 的充分必要条件是对 $E$ 上任一满足 $f(x)=0(x\in G)$ 的有界线性泛函 $f$，有 $f(x_0)=0$；

必要性是显然的，充分性由推论 2（或推论 3）立即导出. 因此，为了判别 $E$ 中的元 $x_0$ 是否属于 $\overline{G}$，只要判别 $E$ 上一切满足 $f(x)=0(x\in G)$ 的有界线性泛函 $f$，对 $x_0$ 作用是否仍等于零就行了；

2° 设 $x_0\in E$，$A$ 是 $E$ 的一个子集，则 $x_0$ 可以用 $A$ 中的元素的线性组合以任意的精确度逼近的充分必要条件是对 $E$ 上任一有界线性泛函 $f$，当 $f(x)=0(x\in A)$ 时，有 $f(x_0)=0$.

其实，若令 $G$ 是 $A$ 张成的子空间，则 $x_0$ 可以用形如 $\sum_{k=1}^{n}c_kx_k$（$x_k\in A$、$c_k$ 为数，$k=1,2,\cdots,n$，$n$ 为任一自然数）的元以任意的精确度逼近的充分必要条件是 $x_0\in\overline{G}$. 再由性质 1° 可知性质 2° 成立.

性质 2° 为我们提供了一个判别 $x_0\in E$ 能否用 $A$ 中的元的线

性组合以任意的精确度逼近的判别法，这在逼近论中是常用的.

现在再来讨论定理 4.2. 从它的证明过程容易看出，$f$ 满足定理中的条件(i)、(ii)的延拓不一定唯一. 倘不唯一，就会出现一些有趣的结果.

**例** 考察一切二维实向量 $x=(\xi_1,\xi_2)$ 按照范数

$$\|x\|=|\xi_1|+|\xi_2|$$

组成的 Banach 空间. 仍用 $\mathbb{R}^2$ 记这个空间并令 $G$ 为 $\mathbb{R}^2$ 中形如 $(\xi_1,0)$ 的向量组成的子空间. 在 $G$ 上定义有界线性泛函 $f$:

$$f(x)=\xi_1 \quad (x\in G),$$

显然 $\|f\|_G=1$. 任取满足 $|\alpha|\leqslant 1$ 的数 $\alpha$, 再定义 $\mathbb{R}^2$ 上的有界线性泛函 $F_\alpha$:

$$F_\alpha(x)=\xi_1+\alpha\xi_2 \quad (x=(\xi_1,\xi_2)\in\mathbb{R}^2).$$

易见 $F_\alpha$ 是 $f$ 的延拓，且 $\|F_\alpha\|\geqslant 1$, 又因

$$|F_\alpha(x)|\leqslant|\xi_1|+|\alpha||\xi_2|\leqslant|\xi_1|+|\xi_2|=\|x\|,$$

故 $\|F_\alpha\|\leqslant 1$, 于是 $\|F_\alpha\|=1$. 因此 $F_\alpha$ 是 $f$ 的延拓且满足 $\|F_\alpha\|=\|f\|_G$, 但是全部 $F_\alpha(|\alpha|\leqslant 1)$ 构成的集具有势 $\aleph$. 一般说，有界线性泛函的延拓如果不唯一，那么由它们组成的集的势不小于 $\aleph$.

其次，如果不要求延拓满足定理 4.2 中的条件(ii)，则延拓的方式可以任意. 例如在上例中，让 $\alpha$ 为任一给定的数，则 $F_\alpha$ 仍为 $f$ 的一个延拓，但不一定保持范数不变.

# §5 共轭空间. 共轭算子

## 5.1 共轭空间

在 §2 中，我们已经指出，从一个赋范线性空间 $E$ 到另一个赋范线性空间 $E_1$ 的全部有界线性算子构成的集合 $\mathscr{B}(E,E_1)$ 在定义了线性运算并赋以范数后，它就成为一个赋范线性空间. 当 $E_1$ 完

备时，$\mathscr{B}(E,E_1)$也完备. 现在设$E_1=K$，则得到$E$上有界线性泛函的全体.

**定义 5.1** 称$E$上有界线性泛函的全体按照它的线性运算及范数构成的赋范线性空间为$E$的共轭空间，记为$E^*$.

根据定义，$E^*=\mathscr{B}(E,K)$. 由于$K$完备，故$E^*$也完备，因此$E^*$为 Banach 空间. 为清楚起见，我们回顾一下这个空间中线性运算及范数的定义. 设$f_1$、$f_2$、$f\in E^*$，由定理 1.5 中的一般定义，对任一$x\in E$，有

$$(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x);\quad (\alpha f)(x)=\alpha f(x). \tag{1}$$

范数则由下式给出：

$$\|f\|=\sup_{\substack{x\neq\theta\\ x\in E}}\frac{|f(x)|}{\|x\|}. \tag{1'}$$

由于$E^*$也是赋范线性空间（实际上是 Banach 空间），因此$E^*$也有共轭空间$(E^*)^*$，称它为$E$的二次共轭空间，记为$E^{**}$. 依此类推，我们可以定义$E$的三次共轭空间 $(E^{**})^*$，记为$E^{***}$，等等.

现在来考察$E$与$E^{**}$的关系. 设$x\in E$，$f\in E^*$，于是$f(x)$是实(或复)数. 原来的观点是：泛函$f$是给定的，而$x$是跑遍$E$的变元. 现在反过来，让$x$固定而让$f$跑遍$E^*$，这时$f(x)$就成了定义在$E^*$上的一个泛函，记为$J_x$. 于是对任一$f\in E^*$，有

$$J_x(f)=f(x).$$

由(1)可知，$J_x$是线性的，由(1′)可知

$$|J_x(f)|=|f(x)|\leqslant\|x\|\|f\|,$$

因此$J_x$有界. 故$J_x$为$E^{**}$中的元素，由于对每个$x\in E$，这个结论都成立，故可以定义映射$J:x\mapsto J_x$. 映射$J$具有下列性质：

1° 映射是线性的，即

$$J_{x_1+x_2}=J_{x_1}+J_{x_2};\ J_{\alpha x}=\alpha J_x. \quad (x_1, x_2, x\in E).$$

其实，对任一 $f\in E^*$，有

$$J_{x_1+x_2}(f)=f(x_1)+f(x_2)=J_{x_1}(f)+J_{x_2}(f)$$
$$=(J_{x_1}+J_{x_2})(f);$$
$$J_{\alpha x}(f)=f(\alpha x)=\alpha f(x)=\alpha J_x(f),$$

因 $f\in E^*$ 是任意的，故

$$J_{x_1+x_2}=J_{x_1}+J_{x_2};\quad J_{\alpha x}=\alpha J_x.$$

2° 映射是等距的，因此是一对一的.

其实，对任一 $f\in E^*$，有

$$|J_x(f)|=|f(x)|\leqslant\|x\|\|f\|,$$

故 $\|J_x\|\leqslant\|x\|$. 另一方面，对于上述 $x$，存在 $f_0\in E^*$ 使

$$\|f_0\|=1,\quad |f_0(x)|=\|x\|,$$

于是
$$\|J_x\|\geqslant|J_x(f_0)|=|f_0(x)|=\|x\|,$$

故
$$\|J_x\|=\|x\|.$$

根据以上的讨论，$J$ 是由 $E$ 到 $E^{**}$ 中的一个等距同构映射. 通常称 $J$ 为 $E$ 到 $E^{**}$ 中的自然嵌入映射. $J$ 可能是满映射也可能不是满映射. 当 $J$ 是满映射时，即当 $J(E)=E^{**}$ 时，称 $E$ 是自反空间.

我们还可以从另外的角度来看待 $E$ 与 $E^{**}$ 之间的关系：由 1° 及 2° 可知，除去等距同构不计外，$E$ 可以看成是 $E^{**}$ 的子空间. 因此若 $E=E^{**}$，则 $E$ 为自反空间.

值得注意的是，以上两种处理 $E$ 与 $E^{**}$ 之间关系的方法并无本质的区别. 因此，有时使用前者，有时使用后者，一切需视情况而定.

现在讨论几个具体空间的共轭空间. 为明确起见，先假定所讨论的空间都是实的. 对于复空间的情形，有的与实的情形完全类似，有的则不然. 当不完全类似时，我们将加以说明.

**定理 5.1**(空间$C[a,b]$的共轭空间) 设 $f$ 为 $C[a,b]$ 上的有界线性泛函，则存在定义于$[a,b]$上的囿变函数 $v$ 使对一切$x\in C[a,b]$，有

$$f(x)=\int_a^b x(t)dv(t) \tag{2}$$

且 $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(v)=\|f\|$，这里 $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(v)$表示 $v$ 在$[a,b]$上的总变分. 反之，对任一定义在$[a,b]$上的囿变函数 $v$，(2)式定义了 $C[a,b]$ 上的一个有界线性泛函 $f$.

**证** 定义函数 $\chi_s(t)$如下：

$$\chi_s(t)=\begin{cases}1, & \text{当 } a\leqslant t\leqslant s\\ 0, & \text{当 } s<t\leqslant b\end{cases}\quad (s\in[a,b]).$$

因 $C[a,b]$是 $L^\infty[a,b]$的子空间，故 $f$ 可延拓到 $L^\infty[a,b]$ 上且保持范数不变，记延拓后的泛函为 $F$. 令

$$v(s)=F(\chi_s).$$

可以证明 $v$ 是囿变函数，且 $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(v)\leqslant\|f\|$. 其实，取分点

$$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=b,$$

令

$$\varepsilon_j=\operatorname{sgn}[v(t_j)-v(t_{j-1})]\quad (j=1,2,\cdots,n),$$

则

$$\sum_{j=1}^n|v(t_j)-v(t_{j-1})|=\sum_{j=1}^n\varepsilon_j[v(t_j)-v(t_{j-1})]$$

$$=\sum_{j=1}^n\varepsilon_j[F(\chi_{t_j})-F(\chi_{t_{j-1}})]=F\Big[\sum_{j=1}^n\varepsilon_j(\chi_{t_j}-\chi_{t_{j-1}})\Big]$$

$$\leqslant\|F\|\Big\|\sum_{j=1}^n\varepsilon_j(\chi_{t_j}-\chi_{t_{j-1}})\Big\|.$$

因$\|F\|=\|f\|$，$\left\|\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j(\chi_{t_j}-\chi_{t_{j-1}})\right\|=1$，故

$$\sum_{j=1}^{n}|v(t_j)-v(t_{j-1})|\leqslant\|f\|.$$

于是$v$囿变且$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(v)\leqslant\|f\|$.

任取$x\in C[a,b]$，令

$$y(s)=\sum_{j=1}^{n}x(t_j)[\chi_{t_j}(s)-\chi_{t_{j-1}}(s)],$$

则

$$F(y)=\sum_{j=1}^{n}x(t_j)[v(t_j)-v(t_{j-1})].\tag{3}$$

记$\delta=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}|t_j-t_{j-1}|$，则当$\delta\to0$时，$\|y-x\|\to0$，由$F$的连续性，$F(y)\to F(x)$. 再由$R$-$S$积分（第四章）的定义，(3)的右边趋于$\int_a^b x(t)dv(t)$，因此

$$F(x)=\int_a^b x(t)dv(t).$$

因$x\in C[a,b]$，故$F(x)=f(x)$，(2)成立. 由$R$-$S$积分的性质，对一切$x\in C[a,b]$，有

$$|f(x)|=\left|\int_a^b x(t)dv(t)\right|\leqslant\|x\|\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(v),\tag{4}$$

故$\|f\|\leqslant\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(v)$. 我们已经证明$\|f\|\geqslant\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(v)$，故$\|f\|=\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(v)$. 定理的第一部分证毕.

反之，设$v$为定义在$[a,b]$上的囿变函数，令

$$f(x)=\int_a^b x(t)dv(t). \tag{5}$$

由 $R$-$S$ 积分的线性以及不等式(4)，等式(5)确实定义了 $C[a,b]$ 上的一个有界线性泛函 $f$. 证毕.

一般说，当 $C[a,b]$上的有界线性泛函 $f$ 给定后，满足(2)式的囿变函数 $v$ 未必唯一. 这是因为在定义 $v$ 的过程中，需要用到$f$的延拓 $F$，后者一般说不唯一，因此通过 $F$而得到的 $v$ 也不唯一. 为了进一步研究 $C[a,b]$的共轭空间，我们需要在满足(2) 式的众多的囿变函数中选择一个特殊的. 这个特殊的便是所谓正规化囿变函数. 称定义在$[a,b]$上的囿变函数 $v$ 是正规化的，如果 $v$ 满足

(a) $v(a)=0$; (b) 对 $a<t<b$, 有 $v(t+0)=v(t)$.

用 $V_0[a,b]$表示定义在$[a,b]$ 上全部正规化囿变函数构成的集合. $V_0[a,b]$中的线性运算就规定为通常函数的线性运算，而范数则由 $\|v\|=\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(v)$定义，这里 $v\in V_0[a,b]$. 可以证明，$V_0[a,b]$按照这样定义的线性运算与范数是一个 Banach 空间. 还可以证明，通过等式(2)，$V_0[a,b]$与 $C[a,b]$ 的共轭空间$(C[a,b])^*$等距同构. 于是我们说 $C[a,b]$的共轭空间是$V_0[a,b]$. 由于证明较长，故从略. 对于读者来说，只需知道这个结论就可以了(想知道证明的读者，可参考[2]).

这里还需要强调两点：第一，从 $V_0[a,b]$到 $(C[a,b])^*$ 的等距同构映射并不唯一. 如果用$T$表示通过等式 (2) 而得到的等距同构映射：$v\longmapsto f$. 则$-T$ 也是一个由 $V_0[a,b]$到 $(C[a,b])^*$ 上的等距同构映射. 如果 $C[a,b]$是复空间，则对任何 $\alpha:0\leqslant\alpha<2\pi$, $e^{i\alpha}\cdot T$ 仍然是一个由 $V_0[a,b]$到 $(C[a,b])^*$ 上的等距同构映射；因此，第二，我们总是取由(2)得到的 $T$ 作为所需要的等距同构映射，因此当我们说 $C[a,b]$的共轭空间是 $V_0[a,b]$ 时，总是指在等距同构映射 $T$ 的意义下而言. 离开了这一点就会出现错误. 希望读者

充分注意.

今后凡涉及一个给定的空间的共轭空间的表示时，也都离不开一定的等距同构映射.

**定理 5.2** $L^p[a,b](1<p<\infty)$的共轭空间是 $L^q[a,b]$，这里 $q$ 是 $p$ 的相伴数，即$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

**证** 任取 $y\in L^q[a,b]$，令

$$f(x)=\int_a^b x(t)y(t)\,dt\quad (x\in L^p[a,b])\tag{6}$$

由 Hölder 不等式

$$|f(x)|\leqslant\left(\int_a^b|x(t)|^p dt\right)^{1/p}\left(\int_a^b|y(t)|^q dt\right)^{1/q}\tag{7}$$

可知，$f$ 对一切 $x\in L^p[a,b]$有定义. 由(6)，$f$ 是线性的，再由(7)，$f$ 有界且

$$\|f\|\leqslant\|y\|\quad\left(\text{这里}\|y\|=\left(\int_a^b|y(t)|^q dt\right)^{1/q}\right).\tag{8}$$

作映射 $T:y\longmapsto f$. 显然 $T$ 是线性的. 由(8)可知，$T$ 有界. 因此 $T$ 是由 $L^q[a,b]$到$(L^p[a,b])^*$中的有界线性算子. 下面证明 $T$ 是由 $L^q[a,b]$到$(L^p[a,b])^*$上的等距同构映射.

先证明 $T$ 是一对一的. 为此只需证明当 $f=\theta$ 时，$y=\theta$. 设不然，则 $y\neq\theta$，于是存在正数 $N$ 使得集合$\{t:|y(t)|\geqslant N\}$的测度大于零. 记 $e_N=\{t:|y(t)|\geqslant N\}$并令

$$\chi_N(t)=\begin{cases}\operatorname{sgn}y(t), & \text{当 } t\in e_N;\\ 0, & \text{当 } t\in[a,b]\backslash e_N.\end{cases}$$

显然 $\chi_N\in L^p[a,b]$. 由

$$f(\chi_N)=\int_a^b\chi_N(t)y(t)\,dt=\int_{e_N}|y(t)|\,dt\geqslant N\operatorname{mes}e_N>0$$

可知 $f\neq\theta$. 矛盾. 这个矛盾说明 $y=\theta$，因此 $T$ 是一对一的.

其次证明 $T$ 是满映射. 设 $f$ 是 $L^p[a,b]$上任一给定的有界线

性泛函. 对任一 $s\in[a,b]$, 令 $\chi_s$ 为 $[a,s]$ 的特征函数. 记 $g(s)=f(\chi_s)$. 我们证明 $g$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数. 设 $\delta_j=[s_j,t_j]$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 是一组包含在 $[a,b]$ 中且没有公共内点的闭区间. 记 $\varepsilon_j=\mathrm{sgn}[g(t_j)-g(s_j)]$, 则

$$\sum_{j=1}^{n}|g(t_j)-g(s_j)|=\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j[g(t_j)-g(s_j)]$$

$$=f\Big[\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j(\chi_{t_j}-\chi_{s_j})\Big]\leqslant\|f\|\Big\|\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j(\chi_{t_j}-\chi_{s_j})\Big\|$$

$$=\|f\|\Big(\int_a^b\Big|\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j(\chi_{t_j}(\xi)-\chi_{s_j}(\xi))\Big|^p d\xi\Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\|f\|\Big(\sum_{j=1}^{n}\int_{\delta_j}d\xi\Big)^{\frac{1}{p}}=\|f\|\Big(\sum_{j=1}^{n}m\delta_j\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

任给 $\varepsilon>0$, 令 $\delta=\varepsilon/\|f\|$. 则当 $\sum\limits_{j=1}^{n}m\delta_j<\delta^p$ 时,

$$\sum_{j=1}^{n}|g(t_j)-g(s_j)|<\varepsilon.$$

故 $g$ 绝对连续.

令 $y(s)=g'(s)$. 由绝对连续函数导数的性质可知, $y\in L[a,b]$. 再注意到 $\chi_a$ 对等于零, 故 $g(a)=f(\chi_a)=0$. 于是

$$f(\chi_s)=g(s)=\int_a^s y(t)\,dt=\int_a^b\chi_s(t)y(t)\,dt. \tag{9}$$

设 $x(\cdot)$ 为定义在 $[a,b]$ 上的有界可测函数. 我们取一致有界的阶梯函数列 $\{x_n(\cdot)\}$ 于 $[a,b]$ 上几乎处处收敛于 $x(\cdot)$. 由(9)及 $f$ 的线性, 得

$$f(x_n)=\int_a^b x_n(t)y(t)\,dt. \tag{10}$$

再根据 Lebesgue 控制收敛定理，易知以下两个结论都成立:

$$\int_a^b x_n(t)y(t)\,dt \to \int_a^b x(t)y(t)\,dt,$$

$$\|x_n - x\| = \left(\int_a^b |x_n(t) - x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \to 0,$$

在(10)中令 $n\to\infty$，得

$$f(x) = \int_a^b x(t)y(t)\,dt. \tag{11}$$

因此(6)对于有界可测函数成立

现在证明 $y\in L^q[a,b]$. 在$[a,b]$上定义如下的有界可测函数:

$$y_N(t) = \begin{cases} |y(t)|^{q-1}\mathrm{sgn}\,y(t), & \text{当}\ |y(t)| \leqslant N; \\ 0, & \text{当}\ |y(t)| > N, \end{cases}$$

这里 $N$ 为正数. 记 $e_N = \{t: |y(t)| \leqslant N\}$，则

$$f(y_N) = \int_a^b y_N(t)y(t)\,dt = \int_{e_N} y_N(t)y(t)\,dt = \int_{e_N} |y(t)|^q dt.$$

另一方面，

$$\begin{aligned} f(y_N) &\leqslant \|f\|\|y_N\| = \|f\|\left(\int_{e_N} |y_N(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|f\|\left(\int_{e_N} |y(t)|^{(q-1)p} dt\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|f\|\left(\int_{e_N} |y(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

因此
$$\left(\int_{e_N} |y(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \|f\|.$$

再令 $N\to\infty$，便有

$$\|y\| = \left(\int_a^b |y(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \|f\|. \tag{12}$$

故 $y\in L^q[a,b]$.

最后证明等式(6). 对任一 $x\in L^p[a,b]$成立. 取$[a,b]$上的有

界可测函数列$\{x_n(\cdot)\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$，使

$$\int_a^b |x_n(t)-x(t)|^p dt \to 0.$$

因 $x_n(\cdot)$ 是有界可测的，故(11)对 $x_n(\cdot)$成立．将$x_n(\cdot)$代入(11)并令 $n\to\infty$，得

$$f(x)=\int_a^b x(t)y(t)dt.$$

(6)成立．以上的论证表明，对 $L^p[a,b]$ 上任一给定的有界线性泛函 $f$，必存在 $y\in L^q[a,b]$，使得(6)成立．因此 $T$ 是满映射．

由不等式(8)及(12)可知，

$$\|y\|=\|f\|. \tag{13}$$

因此$T$是等距的．这样我们就证明了$T$是由 $L^q[a,b]$ 到$(L^p[a,b])^*$上的一个等距同构映射．故我们说 $L^p[a,b]$的共轭空间是 $L^q[a,b]$．证毕．

同样应当强调的是，当我们说 $L^p[a,b]$的共轭空间是 $L^q[a,b]$时，也是指在定理 5.2 中的等距同构 $T:y\mapsto f$ 的意义下而言．

此外，我们可以讨论 $L^q[a,b]$ 的共轭空间．显然，根据定理 5.2，$L^q[a,b]$的共轭空间是 $L^p[a,b]$．由此可以看出，$L^p[a,b]$是自反空间（就是说定义 5.1 后面的自然嵌入映射 $J$ 对于 $L^p[a,b]$ 来说是满映射）．

当 $L^p[a,b]$是复空间时，定理 5.2 仍成立．但有时我们用如下的积分

$$f(x)=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt$$

来表示 $L^p[a,b]$上的有界线性泛函，这里 $x\in L^p[a,b]$，$y\in L^q[a,b]$，$y(t)$上方"——"表示复数共轭．

关于 $L[a,b]$、$l^p(1\leqslant p<\infty)$、$\mathbb{R}^n$、$\mathbb{C}^n$ 的共轭空间，请参看本章习题第 34 题和第 42 题．

### 5.2 共轭算子

有了共轭空间，便可以引入共轭算子的概念. 设 $T\in\mathscr{B}(E,E_1)$，即 $T$ 是由赋范线性空间 $E$ 到赋范线性空间 $E_1$ 中的有界线性算子. 任取 $f\in E_1^*$. 则 $f(Tx)$ 关于 $x\in E$ 是线性的，由不等式

$$|f(Tx)|\leqslant\|f\|\|T\|\|x\|$$

可知，$f(Tx)$ 还是有界的，因此它是关于 $x\in E$ 的一个有界线性泛函. 记

$$f^*(x)=f(Tx). \tag{14}$$

则 $f^*\in E^*$. 显然当 $f$ 在 $E_1^*$ 中给定时，$f^*$ 就在 $E^*$ 中被确定下来. 这表明我们实际上建立了一个由 $E_1^*$ 到 $E^*$ 的映射，这个映射通过等式(14)将 $f$ 映成 $f^*$. 记这个映射为 $T^*$，于是 $T^*f=f^*$.

**定义 5.2** 称 $T^*$ 为 $T$ 的共轭算子.

由(14)容易看出，对任一 $x\in E$ 以及任一 $f\in E_1^*$，有重要等式

$$(T^*f)(x)=f(Tx). \tag{15}$$

共轭算子还具有下面的性质:

1° $T$ 的共轭算子 $T^*$ 是有界线性算子，且

$$\|T^*\|=\|T\|; \tag{16}$$

2° $(\alpha T)^*=\alpha T^*$，这里 $\alpha$ 为数;

3° $(T_1+T_2)^*=T_1^*+T_2^*$，这里 $T_1,T_2\in\mathscr{B}(E,E_1)$;

4° $(T_1T_2)^*=T_2^*T_1^*$，这里 $T_1\in\mathscr{B}(E,E_1)$，$T_2\in\mathscr{B}(E_1,E_2)$，$E_2$ 也是赋范线性空间.

5° $T$ 的共轭算子 $T^*$ 也有共轭算子 $(T^*)^*$，我们将它简记为 $T^{**}$. 若将 $E$ 看成 $E^{**}$ 的子空间，则 $T^{**}$ 是 $T$ 的延拓.

我们只证明性质 1°, 5°. 其余的都比较显然，留给读者作为练习.

**性质 1° 的证明** $T^*$ 的线性是比较明显的. 现在证明 $T^*$ 的有界性. 由(15)，对任一 $x\in E$ 及任一 $f\in E_1^*$，有

$$|(T^*f)(x)|=|f(Tx)|\leqslant\|f\|\|T\|\|x\|.$$

于是$\|T^*f\|\leqslant\|T\|\|f\|$，故$T^*$有界且$\|T^*\|\leqslant\|T\|$. 由定理 4.2 推论 1，对任一$x\in E$，有$f_0\in E^*$，使

$$f_0(Tx)=\|Tx\|;\ \|f_0\|=1.$$

故

$$\begin{aligned}\|Tx\|&=|f_0(Tx)|=|(T^*f_0)(x)|\\&\leqslant\|T^*f_0\|\|x\|\leqslant\|T^*\|\|f_0\|\|x\|=\|T^*\|\|x\|.\end{aligned}$$

因$x\in E$是任意的，有$\|T\|\leqslant\|T^*\|$，故$\|T^*\|=\|T\|$，(16)成立.

**性质 5° 的证明** 任取$x\in E$，如同§5.1一样，记$J_x$是$x$在$E^{**}$中的对应元，则对任一$f\in E^*$，有

$$J_x(f)=f(x),$$

故

$$\begin{aligned}(T^{**}J_x)(f)&=J_x(T^*f)=(T^*f)(x)\\&=f(Tx)=J_{Tx}(f).\end{aligned}$$

因$f\in E^*$是任意的，所以

$$T^{**}J_x=J_{Tx}. \tag{17}$$

若将$E$视为$E^{**}$的子空间，则$J_x$与$x$应视为同一，$J_{Tx}$与$Tx$应视为同一. 于是(17)可以写成$T^{**}x=Tx$，这表明$T^{**}$是$T$的延拓.

在不少情况下，往往需要求出给定的有界线性算子的共轭算子的具体形式，我们仅举两例以说明其方法.

**例 1** 设$A=(\alpha_{ij})$是$n\times m$矩阵，这里$\alpha_{ij}(i=1,2,\cdots,n,\ j=1,2,\cdots,m)$是实数；下标$i$表示行，$j$表示列. 由$A$定义了一个由$n$维实 Euclid 空间$\mathbb{R}^n$到$m$维实 Euclid 空间$\mathbb{R}^m$的算子$T$：

$$y=Tx:\ \eta_j=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}\xi_i\ (j=1,2,\cdots,m),$$

其中$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)\in\mathbb{R}^m$. 容易证明$T$是有界线性算子. 由于 Euclid 空间是其自身的共轭空间（本章

习题第 34 题)，由共轭算子的定义可知，$T^*$是由 $\mathbf{R}^m$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的有界线性算子．现在求出 $T^*$的具体形式．由第 34 题，$\mathbf{R}^m$ 上的每个有界线性泛函 $f$ 可以表成：

$$f(y)=\sum_{j=1}^{m}c_j\eta_j,$$

于是

$$\begin{aligned}(T^*f)(x)=f(Tx)&=\sum_{j=1}^{m}c_j\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}\xi_i\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}c_j\xi_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}c_j\right)\xi_i.\quad(18)\end{aligned}$$

由(18)可知，

$$T^*f=(d_1,d_2,\cdots,d_n),$$

其中

$$d_i=\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}c_j\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

这表明 $T^*$由 $A$ 的转置矩阵 $A^T$ 表示．

**例 2** 设 $K(t,s)$是变量 $t$ 及 $s$ 的实可测函数($a\leqslant t\leqslant b,a\leqslant s\leqslant b$)满足

$$\int_a^b\int_a^b|K(t,s)|^q dtds<+\infty.$$

设 $T$ 是以 $K(t,s)$为核的积分算子：

$$(Tx)(t)=\int_a^b K(t,s)x(s)ds\quad(x\in L^p[a,b]).$$

由不等式

$$\begin{aligned}&\left(\int_a^b|(Tx)(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\\&\leqslant\left(\int_a^b\int_a^b|K(t,s)|^q dtds\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_a^b|x(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

可知，$T$是由$L^p[a,b]$到$L^q[a,b]$中的有界线性算子. 由于$L^p[a,b]$、$L^q[a,b]$互为共轭空间，由共轭算子的定义可知，$T^*$也是由$L^p[a,b]$到$L^q[a,b]$中的有界线性算子. 现在求出$T^*$的具体形式. 由定理5.2，对于每个$f\in(L^q[a,b])^*$，存在$y\in L^p[a,b]$，使对任何$z\in L^q[a,b]$有

$$f(z)=\int_a^b z(t)y(t)dt.$$

故

$$(T^*f)(x)=f(Tx)=\int_a^b y(t)\left[\int_a^b K(t,s)x(s)ds\right]dt$$
$$=\int_a^b x(s)\left[\int_a^b K(t,s)y(t)dt\right]ds.$$

由于$x\in L^p[a,b]$是任意的，故

$$T^*f=\int_a^b K(t,s)y(t)dt. \tag{19}$$

因$f$与$y$可视为同一，(19)又可写成

$$(T^*y)(s)=\int_a^b K(t,s)y(t)dt,$$

或

$$(T^*y)(t)=\int_a^b K(s,t)y(s)ds.$$

由此可见，$T^*$是以$K_1(t,s)=K(s,t)$为核的积分算子.

### 5.3 弱收敛

到现在为止，我们已经定义了下列几种收敛概念：对于赋范线性空间中的点列来说，有依范数收敛或强收敛概念. 对于定义在赋范线性空间上的有界线性算子列来说，则有依范数收敛与强收敛并已指出这是两种不同的收敛概念. 现在再定义两种收敛概念：一种是共轭空间中有界线性泛函序列的弱*收敛，另一种是空间中点列的弱收敛. 关于弱收敛概念，在第五章中已就$L^p$空间的

情形讨论过，这里是进一步推广.

**定义 5.3** 设 $E$ 为赋范线性空间. $E$ 的共轭空间 $E^*$ 中的序列 $\{f_n\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 称为弱*收敛于 $f_0\in E^*$，是指对任意的 $x\in E$，有 $f_n(x)\to f_0(x)$. 称 $f_0$ 为 $\{f_n\}$ 的弱*极限.

由弱*收敛的定义可知下列性质成立：

1° 弱*收敛的极限是唯一的.

其实，若 $E$ 上有界线性泛函序列 $\{f_n\}$ 同时弱*收敛于 $f_0$ 及 $f_0'$，由弱*收敛的定义可知，对任何 $x\in E$，$f_0(x)=f_0'(x)$，故 $f_0=f_0'$.

2°有界线性泛函序列依 $E^*$ 中的范数收敛蕴含弱*收敛.

其实，设 $\{f_n\}\subset E^*$ $(n=1,2,3,\cdots)$、$f_0\in E^*$ 且 $\|f_n-f_0\|\to 0$. 任取 $x\in E$，由

$$|f_n(x)-f_0(x)|\leqslant\|f_n-f_0\|\|x\|\to 0$$

可知，$\{f_n\}$ 弱*收敛于 $f_0$.

3° 设 $E$ 是 Banach 空间. 如果 $E$ 上的有界线性泛函序列 $\{f_n\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 弱*收敛于 $f_0\in E^*$，则 $\{\|f_n\|\}$ 是有界数列.

立即可知，性质 3° 是定理 3.2 的简单推论. 值得注意的是，$E$ 为Banach 空间这一条件在这里是重要的.

由定理 3.2 还可以导出弱*收敛的一个充分必要条件.

**定理 5.3** 设 $E$ 是Banach 空间，$\{f_n\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 是 $E$ 上的一个有界线性泛函序列，则 $\{f_n\}$ 弱*收敛于某个 $f\in E^*$ 的充分必要条件是：

(i) $\{f_n\}$ 一致有界；

(ii) 对 $E$ 的某个稠密子集 $G$ 中的每个元素 $x$，$\{f_n(x)\}$ 收敛.

由于定理 3.2 的充分性部分只需设 $E$ 是赋范线性空间，因此定理 5.3 的充分性部分也只需设 $E$ 是赋范线性空间.

**定理 5.4** 若赋范线性空间 $E$ 是可分的，则由 $E$ 上任一一致有界的线性泛函序列中，必可取出一个弱*收敛的子序列.

**证** 由 $E$ 可分可知，$E$ 中存在可数稠密子集 $\{x_k\}$ $(k=1,2,3,\cdots)$. 设 $\{f_n\}$ 是 $E$ 上的一个一致有界线性泛函序列. 则

$$f_1(x_1), f_2(x_1), f_3(x_1), \cdots$$

是有界的，因此从 $\{f_n\}$ 中可选出子序列 $f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, f_3^{(1)}, \cdots$ 使数列

$$f_1^{(1)}(x_1), f_2^{(1)}(x_1), f_3^{(1)}(x_1), \cdots$$

收敛. 同理从 $\{f_n^{(1)}\}$ 中又可选出子序列 $f_1^{(2)}, f_2^{(2)}, f_3^{(2)}, \cdots$，使

$$f_1^{(2)}(x_2), f_2^{(2)}(x_2), f_3^{(2)}(x_2), \cdots$$

收敛. 依此类推，可得一系列的子序列:

$$\left.\begin{array}{l} f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, f_3^{(1)}, \cdots \\ f_1^{(2)}, f_2^{(2)}, f_3^{(2)}, \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, f_3^{(n)}, \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\}, \tag{20}$$

其中每一个序列是前一个的子序列，而且对每个 $k(k=1, 2, 3, \cdots)$，

$$f_1^{(k)}(x_k), f_2^{(k)}(x_k), f_3^{(k)}(x_k), \cdots \tag{21}$$

收敛. 取式(20)中对角线上的泛函组成的序列

$$f_1^{(1)}, f_2^{(2)}, \cdots, f_n^{(n)}, \cdots,$$

由(21)，对每个 $k(k=1,2,3,\cdots)$，序列

$$f_1^{(1)}(x_k), f_2^{(2)}(x_k), \cdots f_n^{(n)}(x_k), \cdots$$

收敛. 由于 $\{f_n^{(n)}\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 一致有界，$\{x_k\}$ $(k=1,2,3,\cdots)$ 是 $E$ 中的稠密子集，由定理 5.3 的充分性可知，$\{f_n^{(n)}\}$ 弱*收敛于某一有界线性泛函. 证毕.

下面讨论点列的弱收敛.

**定义 5.4** 设 $E$ 是赋范线性空间，$\{x_n\}\subset E(n=1, 2, 3,\cdots)$，$x_0\in E$. 如果对于每个 $f\in E^*$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$，则称 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $x_0$，称 $x_0$ 是 $\{x_n\}$ 的弱极限.

由点列弱收敛的定义可导出下列性质:

1° 弱收敛点列的极限是唯一的.

用反证法. 设$\{x_n\}\subset E(n=1, 2, 3, \cdots)$既弱收敛于$x_0$又弱收敛于$x_0'$. 若$x_0\neq x_0'$, 由定理4.2推论1, 存在$f_0\in E^*$使$\|f_0\|=1$, $f_0(x_0-x_0')=\|x-x_0'\|$. 另一方面, $\{f_0(x_n)\}$同时收敛于$f_0(x_0)$及$f_0(x_0')$, 故$f_0(x_0)=f_0(x_0')$, 于是$f_0(x_0-x_0')=0$, 矛盾. 因此弱极限是唯一的.

2° 点列的依范数收敛蕴含弱收敛.

证法与弱*收敛的性质2°相同.

3° 设$\{x_n\}\subset E(n=1, 2, 3, \cdots)$弱收敛于$x_0\in E$, 则$\{\|x_n\|\}$有界.

我们将$x_n(n=1,2,3,\cdots)$看成$E^{**}$中的元素, 那么作为$E^*$上的有界线性泛函序列, $\{x_n\}$弱*收敛于$x_0$. 因$E^*$是Banach空间, 由弱*收敛的性质3°可知, $\{\|x_n\|\}$有界.

为了使读者对点列弱收敛概念有较深入的了解, 我们以$C[a,b]$及$L^p[a,b]$为例, 讨论它们中点列弱收敛的条件.

**例3** 空间$C[a, b]$中的点列$\{x_n\}(n=1, 2, 3, \cdots)$弱收敛于$x_0\in C[a,b]$的充分必要条件是:

(i) $\{x_n(\cdot)\}$作为函数列在$[a,b]$上处处收敛于$x_0(\cdot)$;

(ii) $\{\|x_n\|\}$为有界数列.

**证** 必要性 (ii)的必要性由弱收敛的性质3°导出. 现证条件(i)的必要性. 任取$t_0\in[a,b]$, 在$C[a,b]$上定义泛函$f_0$如下:

$$f_0(x)=x(t_0)$$

则$f_0$是$C[a, b]$上的有界线性泛函. 于是$f_0(x_n)\to f_0(x_0)$, 即$\{x_n(t_0)\}$收敛于$x_0(t_0)$. (i)成立.

**充分性** 设$f$是$C[a, b]$上任一有界线性泛函, 由定理5.1, 存在$[a,b]$上的囿变函数$v$, 使

$$f(x)=\int_a^b x(t)dv(t) \qquad (x\in C[a,b]). \tag{22}$$

(22)的右端可以看成是 $L$-$S$ 积分. 现设 $\{x_n(\cdot)\}$ 满足条件(i)、(ii). 由 $L$-$S$ 积分的 Lebesgue 控制收敛定理, 得到

$$\int_a^b x_n(t)dg(t)\longrightarrow\int_a^b x_0(t)dg(t),$$

即 $f(x_n)\to f(x_0)$, 故 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $x_0$.

利用例 3 的结果, 可以在 $C[a,b]$ 中作一个弱收敛但不依范数收敛的点列. 为简单起见, 设 $[a,b]=[0,1]$. 令

$$x_n(t)=\frac{nt}{1+n^2t^2} \quad (t\in[0,1], n=1,2,3,\cdots).$$

容易看出, 对每个 $t\in[0,1]$, $\{x_n(t)\}\to 0$, 例 3 中的条件(i)满足, 再利用古典分析中求最大值的方法可以证明

$$\|x_n\|=\frac{1}{2} \quad (n=1,2,3,\cdots). \tag{23}$$

故 $\{\|x_n\|\}$ 有界, 条件(ii)满足. 因此 $\{x_n\}$ 弱收敛且其弱极限为 $\theta$. 但由(23), $\{x_n\}$ 不依范数收敛于零.

例 3 还告诉我们, 对于一致有界的连续函数列, 处处收敛概念可以纳入在弱收敛概念中.

**例 4** $L^p[a,b](1<p<\infty)$ 中的点列 $\{x_n\}(n=1, 2, 3, \cdots)$ 弱收敛于 $x_0\in L^p[a,b]$ 的充分必要条件是:

(i) 对于每个 $t\in[a,b]$,

$$\int_a^t x_n(s)ds\to\int_a^t x_0(s)ds\,(n\to\infty);$$

(ii) $\{\|x_n\|\}$ 为有界数列.

**证** 必要性 只需证条件(i)的必要性. 对于任一 $t\in[a,b]$, 令 $\chi_t$ 为 $[a,t]$ 的特征函数. 显然 $\chi_t\in L^q[a,b]$, 这里 $q$ 是 $p$ 的相伴数. 由定理 5.2, 等式

$$f(x)=\int_a^b x(s)\chi_t(s)ds=\int_a^t x(s)ds \tag{24}$$

定义了 $L^p[a,b]$ 上的有界线性泛函 $f$. 现设 $\{x_n\}\subset L^p[a,b]$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ 弱收敛于 $x_0\in L^p[a,b]$, 将 $x_n$ 代入(24)并令 $n\to\infty$, 得

$$\int_a^t x_n(s)ds\longrightarrow\int_a^t x_0(s)ds.$$

(i)成立.

充分性　设 $\{x_n\}\subset L^p[a,b]$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 满足条件(i)、(ii). 条件(i)等价于

$$\int_a^b x_n(s)\chi_t(s)ds\longrightarrow\int_a^b x_0(s)\chi_t(s)ds,$$

其中 $\chi_t$ 即为前面已定义的区间 $[a,t]$ 的特征函数. 于是对任一阶梯函数

$$y(s)=\sum_{j=1}^k a_j\chi_{t_j}(s) \tag{25}$$

有

$$\int_a^b x_n(s)y(s)ds\longrightarrow\int_a^b x_0(s)y(s)ds. \tag{26}$$

而形如(25)的阶梯函数的全体在 $L^q[a,b]$ 中稠密, 由 $\{\|x_n\|\}$ 的有界性及定理 5.3 可知, 对任一 $y\in L^q[a,b]$, (26)仍成立, 故 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $x_0$.

利用例 4, 我们同样可以在 $L^p[a,b]$ 中找到一个弱收敛但不依范数收敛的点列(第 44 题).

还应注意, 赋范线性空间 $E$ 上的有界线性泛函序列作为 $E^*$ 中的点列也有弱收敛概念, 一般说, 它比弱*收敛强, 但比依范数收敛弱.

在 §4 及 §5 中, 我们研究了有界线性泛函的延拓、共轭空间及共轭算子, 希望读者注意:

1° 关于有界线性泛函的延拓定理，有

(a) 一般说，它指的是保持范数不变的延拓，但也可以不作如此要求. 不论是否保持范数不变，有界线性泛函的延拓一般说不唯一，一旦不唯一，那么延拓的全体的势$\geqslant\aleph$；

(b) 利用有界线性泛函的延拓定理，我们可以确定$E$中的元素$x_0$是否具有某种属性，例如是否属于某个闭子空间或者是否属于某个子空间的闭包，是否可以用$E$中某个子集$A$中元素的线性组合以任意的精确度来逼近，等等；

2° 如果我们从更高的层次即从整体上来考察有界线性泛函，则得到共轭空间的概念. 共轭空间的出现是泛函分析发展史上重要事件之一.

有了共轭空间的概念，便可以进而引入共轭算子的概念. 共轭算子又称为伴随算子，它"伴随"着原算子的出现而出现. 共轭算子与原算子有着极为密切的联系. 譬如说，它们有相同的范数，映射：$T\longmapsto T^*$是线性的(见共轭算子的性质)，等等；

3° 关于点列及有界线性泛函序列的收敛概念，则应当注意：对于点列来说，有依范数收敛(即强收敛)、弱收敛两种，对于有界线性泛函序列来说，则有强收敛(即依范数收敛)、弱收敛以及弱*收敛等三种.

# §6 有界线性算子的正则集与谱

## 6.1 逆算子的性质

在第六章§2中，我们介绍了逆映射的概念. 在这一章§2中我们讨论了有界线性算子的逆算子并获得了逆算子定理. 在这一节中，我们将继续研究有界线性算子的逆算子以及与它有密切关系的正则集、谱，等等.

大家知道，对于由赋范线性空间 $E$ 到赋范线性空间 $E_1$ 的线性算子 $T$，如果它既是单映射又是满映射，则 $T$ 的逆算子 $T^{-1}$ 存在．当 $T$ 存在逆算子时，称 $T$ 是可逆的．

现在介绍逆算子几个有用的简单性质．

1° 根据第六章§2关于逆映射的等式(7)及(8)，当 $T$ 的逆算子 $T^{-1}$ 存在时，有

$$T^{-1}T=I_E, \qquad TT^{-1}=I_{E_1}, \tag{1}$$

其中 $I_E$、$I_{E_1}$ 分别表示 $E$、$E_1$ 中的单位算子．

2° 如果存在定义在 $E_1$ 上而值域包含在 $E$ 中的线性算子 $S$ 使得

$$ST=I_E; \qquad TS=I_{E_1}, \tag{2}$$

则 $T$ 是可逆的，且 $T^{-1}=S$.

只需证 2° 由(2)式中的第一个等式可知，当 $x\neq\theta$ 时，$Tx\neq\theta$．再由 $T$ 的线性可知，$T$ 是单映射．由(2)中的第二个等式可知，$T$ 是满映射．因此 $T$ 是可逆的．现在证明 $T^{-1}=S$．对(2)中第二个等式的两边同时左乘以 $T^{-1}$，得

$$T^{-1}(TS)=T^{-1}.$$

另一方面

$$T^{-1}(TS)=(T^{-1}T)S=S,$$

故 $T^{-1}=S$.

性质 2° 告诉我们两件事：

a. 如果存在满足等式(2)的算子 $S$，则它是唯一的而且就是 $T$ 的逆算子；

b. 为了检验 $T$ 是否可逆，只需证明存在满足等式(2)的算子 $S$ 就可以了．

3° 设 $E_2$ 也是赋范线性空间，$T_1$ 是由 $E$ 到 $E_1$ 的线性算子，$T_2$ 是由 $E_1$ 到 $E_2$ 的线性算子．若 $T_1$、$T_2$ 都是可逆的，则 $T_2T_1$ 也是可

逆的，且

$$(T_2T_1)^{-1}=T_1^{-1}T_2^{-1}. \tag{3}$$

这一结果比较显然，将证明留给读者.

下面的定理在有界线性算子的谱理论中很重要.

**定理 6.1** **设** $T\in\mathscr{B}(E,E_1)$，**则** $T$ **有有界逆算子的充分必要条件是** $T^*$ **有有界逆算子，而且当** $T$ **有有界逆算子时，** $(T^{-1})^*=(T^*)^{-1}$.

**证** 必要性 设 $T$ 有有界逆算子. 因 $T^{-1}\in\mathscr{B}(E_1,E)$，因此 $(T^{-1})^*$ 是从 $E^*$ 到 $E_1^*$ 的有界线性算子. 任取 $x\in E$、$f\in E^*$，则

$$[T^*(T^{-1})^*f](x)=[(T^{-1})^*f](Tx)=f(T^{-1}Tx)=f(x).$$

因 $x\in E$ 是任意的，故

$$T^*(T^{-1})^*f=f,$$

又因 $f\in E^*$ 是任意的，故

$$T^*(T^{-1})^*=I_{E^*}, \tag{4}$$

这里 $I_{E^*}$ 是 $E^*$ 中的单位算子.

再任取 $y\in E_1$，$g\in E_1^*$，则

$$[(T^{-1})^*T^*g](y)=[T^*g](T^{-1}y)=g(TT^{-1}y)=g(y),$$

于是

$$(T^{-1})^*T^*=I_{E_1^*}, \tag{5}$$

这里 $I_{E_1^*}$ 是 $E_1^*$ 中的单位算子. 由(4)、(5)及上面的性质 2°，$(T^{-1})^*$ 是 $T^*$ 的逆算子. 因 $(T^{-1})^*$ 有界，故 $T^*$ 有有界逆算子，且 $(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*$.

**充分性** 现在设 $T^*$ 有有界逆算子. 首先证明 $T$ 的值域在 $E_1$ 中稠密. 设不然，则 $\overline{T(E)}$ 是 $E_1$ 的真子空间. 由定理 4.2 推论 2，存在 $f\in E_1^*$，使得 $f\neq\theta$ 且 $f(Tx)=0$ 对一切 $x\in E$ 成立. 但 $(T^*f)(x)=f(Tx)$，故 $(T^*f)(x)=0$ 对一切 $x\in E$ 成立，于是 $T^*f=\theta$. 因 $T^*$

是可逆的，故 $f=0$，矛盾．这表明 $T(E)$ 在 $E_1$ 中稠密．

其次证明，存在 $M>0$，使得对一切 $x\in E$，有

$$\|Tx\|\geqslant M\|x\|. \tag{6}$$

其实，任取 $x\in E$，由定理 4.2 推论 1，存在 $f\in E^*$，使得

$$\|f\|=1,\ f(x)=\|x\|.$$

于是

$$\begin{aligned}\|x\|=f(x)&=[T^*(T^*)^{-1}f](x)\\&=[(T^*)^{-1}f](Tx)\leqslant\|(T^*)^{-1}\|\,\|f\|\,\|Tx\|\\&=\|(T^*)^{-1}\|\,\|Tx\|.\end{aligned}$$

取 $M=\dfrac{1}{\|(T^*)^{-1}\|}$，可得(6)．

由(6)可知，$T$ 是一对一的而且 $T(E)$ 闭．因此 $T(E)=E_1$．这表明 $T$ 的逆算子 $T^{-1}$ 存在．任取 $y\in E_1$，记 $x=T^{-1}y$，由(6)，

$$\|T^{-1}y\|=\|x\|\leqslant\frac{1}{M}\|Tx\|=\frac{1}{M}\|y\|.$$

故 $T^{-1}$ 有界．证毕．

### 6.2 有界线性算子的正则集与谱

我们在第六章§6中已经指出，在微分方程、积分方程的理论中，研究解的存在性、唯一性是一个十分重要的课题．例如，在那里我们利用压缩映射原理讨论了积分方程

$$x(t)=y(t)+\lambda\int_a^b K(t,s)x(s)\,ds \tag{7}$$

当 $|\lambda|$ 充分小时，解的存在性、唯一性．应当特别注意的是 $|\lambda|$ 需要充分小．如果 $|\lambda|$ 不是充分小，那么积分方程(7)解的存在性、唯一性问题将变得复杂得多．这些在积分方程理论中已有深入研究，这里不打算详细介绍．我们的目的是从算子理论的角度考察算子方程解的存在性、唯一性问题以及由此导出的正则集、谱等等．

今后如无特别声明，始终假定 $E$ 为复 Banach 空间．

对比(7)式，考察一般的算子方程

$$\lambda x - Tx = y, \tag{8}$$

这里 $T \in \mathscr{B}(E)$. (8)与(7)的不同仅仅是将 $\lambda$ 移到了 $x$ 的前面而成为 $x$ 的系数，而 $T$ 则是一般的有界线性算子.

(8)式的解是否存在与唯一？这显然与 $\lambda$ 的值有关，就是说对 $\lambda$ 的某些值，算子方程(8)可能存在唯一的解，对 $\lambda$ 的另一些值，算子方程(8)可能存在解但不唯一，而对 $\lambda$ 的其他一些值，算子方程(8)可能根本不存在解. 为了区分这些不同的情形并对这些情形作进一步研究，我们引进如下的定义：

**定义 6.1** 设 $T \in \mathscr{B}(E)$，$\lambda$ 为一复数.

(i) 如果 $\lambda I - T$ 有有界逆算子，则称 $\lambda$ 为 $T$ 的正则值. 正则值的全体称为 $T$ 的正则集，以 $\rho(T)$ 表示. 当 $\lambda \in \rho(T)$ 时，用 $R_\lambda$ 表示 $\lambda I - T$ 的有界逆算子 $(\lambda I - T)^{-1}$，并称 $R_\lambda$ 为 $T$ 的豫解式；

(ii) 如果 $\lambda$ 不是 $T$ 的正则值(即 $\lambda I - T$ 没有有界逆算子)，则称 $\lambda$ 为 $T$ 的谱点，谱点的全体称为 $T$ 的谱，以 $\sigma(T)$ 表示. $\sigma(T)$ 中的点还可以分成以下两种类型：

(a) 对 $\lambda \in \sigma(T)$，方程 $(\lambda I - T)x = \theta$ 有非零解，这时称 $\lambda$ 为 $T$ 的特征值，而称对应的非零解为 $T$ 的特征元或特征向量. 当 $\lambda$ 是 $T$ 的特征值时，我们也称 $\lambda$ 属于 $T$ 的点谱；

(b) 对 $\lambda \in \sigma(T)$，$(\lambda I - T)x = \theta$ 只有零解，$\lambda I - T$ 的值域是 $E$ 的真子空间，这时称 $\lambda$ 属于 $T$ 的连续谱.

对于 $T$ 的谱下面的性质成立.

1° $\sigma(T) = \sigma(T^*)$.

其实，将定理 6.1 运用于 $\lambda I - T$ 可知，$\lambda I - T$ 有有界逆算子的充分必要条件是 $\lambda I - T^*$ 有有界逆算子，故 $\sigma(T) = \sigma(T^*)$.

2° 定义 6.1(ii)中的(a)及(b)概括了 $T$ 的谱 $\sigma(T)$ 所有可能的情形.

其实,由逆算子定理(定理 2.2)可知,当 $\lambda\in\sigma(T)$时,下列情形不可能出现:$(\lambda I-T)x=\theta$ 只有零解,而 $\lambda I-T$ 的值域是整个空间 $E$. 故 2° 成立.

**例 1** 在 $n$ 维空间 $\mathbb{C}^n$ 中考察由下三角矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

定义的算子 $T$:

$$y=Tx: \eta_k=\sum_{l=k}^{n} a_{lk}\xi_l \quad (k=1,2,\cdots,n),$$

其中 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$、$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$均属于 $\mathbb{C}^n$. 由线性代数知道,主对角线上的数 $a_{11}$、$a_{22}$、$\cdots$、$a_{nn}$ 是算子 $T$ 的特征值,而当 $\lambda\neq a_{kk}(k=1,2,\cdots,n)$,$\lambda$ 就是 $T$ 的正则值.

**例 2** 在复连续函数空间 $C[0,1]$中考察乘法算子:

$$(Tx)(t)=tx(t).$$

设 $\lambda\overline{\in}[0,1]$. 令

$$(R_\lambda x)(t)=\frac{x(x)}{\lambda-t}.$$

不难验证,$R_\lambda$ 是定义在 $C[0,1]$上值域包含在 $C[0,1]$中的有界线性算子,且

$$[R_\lambda(\lambda I-T)x](t)=x(t)=[(\lambda I-T)R_\lambda x](t)$$

对所有 $x\in C[0,1]$成立. 故 $\lambda$ 是 $T$ 的正则值.

现设 $\lambda\in[0,1]$,由

$$(\lambda I-T)x(t)=(\lambda-t)x(t) \quad (x(t)\in C[0,1])$$

可知,当 $t=\lambda$ 时,$(\lambda-t)x(t)=0$,因此$(\lambda-t)x(t)$的全体组成的集在 $C[0,1]$中不稠密,这里 $x\in C[0,1]$是任意的. 其次不难证明,

$\lambda$ 不可能是 $T$ 的特征值. 其实,若有 $x_0\in C[0,1]$,使$(\lambda I-T)x_0(t)=(\lambda-t)x_0(t)=0$,则当 $t\neq\lambda$ 时,$x_0(t)=0$. 由 $x_0(t)$的连续性可知,$x_0(\lambda)=0$,因此对一切 $t\in[0,1]$, $x_0(t)=0$. 这说明方程$(\lambda I-T)x(t)=0$ 没有非零解. 综上所述,$\lambda$ 属于 $T$ 的连续谱.

**例 3** 在复空间$C[0,1]$中考察 Volterra 积分算子:

$$(Tx)(t)=\int_0^t x(s)ds.$$

先设 $\lambda\neq 0$,于是方程

$$(\lambda I-T)x(t)=y(t) \quad \text{即} \quad \lambda x(t)-\int_0^t x(s)ds=y(t) \tag{9}$$

等价于方程

$$x(t)=\frac{1}{\lambda}y(t)+\frac{1}{\lambda}\int_0^t x(s)ds. \tag{10}$$

由第六章 § 6可知,对任何 $y\in C[0,1]$,方程(10)存在唯一的解. 由逆算子定理,$\lambda I-T$ 存在有界的逆算子, 故任何复数 $\lambda\neq 0$ 都是$T$ 的正则值.

现设 $\lambda=0$,由$(Tx)(t)=\int_0^t x(s)ds$ 可以看出, $T$ 的值域是在区间$[0, 1]$的左端点 0 等于零的连续可微函数的全体. 这个集是$C[0,1]$的真子空间. 如果$(Tx)(t)=\int_0^t x(s)ds=0$,由$x(t)$的连续性可知, $x(t)=0$ 对一切 $t\in[0,1]$成立. 因此 $\lambda=0$ 不是$T$的特征值,于是属于$T$的连续谱. 根据以上的讨论可知, $\sigma(T)=\{0\}$,且 0 属于$T$的连续谱.

**例 4** 在复空间 $L^p[0,1](1\leqslant p<+\infty)$中考察算子

$$(Tx)(t)=tx(t)+\int_t^1 x(s)ds.$$

显然$T$是定义在空间 $L^p[0, 1]$上值域包含在 $L^p[0,1]$中的有界线性算子.

当 $\lambda\in(0,1]$时, 可以证明区间$[0,\lambda]$的特征函数 $\chi_\lambda$ 是算子 $T$

对应于 $\lambda$ 的特征向量．其实，当 $0\leqslant t\leqslant\lambda$ 时，

$$(T\chi_\lambda)(t)=t\chi_\lambda(t)+\int_t^1\chi_\lambda(s)ds=t+\int_t^\lambda ds=\lambda.$$

当 $\lambda<t\leqslant 1$ 时，$T\chi_\lambda(t)=0$．所以

$$(T\chi_\lambda)(t)=\lambda\chi_\lambda(t)\quad(t\in[0,1]),$$

故 $\chi_\lambda$ 是算子 $T$ 对应于 $\lambda$ 的特征向量．

现在设 $\lambda\overline{\in}[0,1]$，任取 $y\in L^2[0,1]$，在方程

$$(\lambda I-T)x=y\quad\text{即}\quad(\lambda-t)x(t)-\int_t^1 x(s)ds=y(t)\qquad(11)$$

中，令 $z(t)=\int_1^t x(s)ds$，可得微分方程

$$(\lambda-t)z'(t)+z(t)=y(t)\text{，初始条件为 }z(1)=0.\qquad(12)$$

通过直接求解可知，(12) 有唯一的解 $z(t)$．令 $x(t)=z'(t)$，则 $x(t)$ 是方程(11)唯一的解．由逆算子定理，$\lambda I-T$ 有有界的逆算子，因此 $\lambda$ 是 $T$ 的正则值．

最后设 $\lambda=0$．可以证明这时 $\lambda$ 属于 $T$ 的连续谱，其证法与例 3 最后部分相似，故从略．

上面几个例子表明，算子的谱即使是有界线性算子的谱也是比较复杂的．例 1、例 3 表明，谱可以只含一个点或有限个点；例 2 表明，连续谱可以充满一个区间；例 4 则表明，特征值也可以充满一个区间．实际上还有这样的算子，它的谱充满了平面上某个闭区域．为使篇幅不致过长，不再一一介绍．总之，情况是复杂的．

**6.3 正则集与谱的性质**

现在着手讨论有界线性算子谱的一些性质．前面已经指出，从 § 6.2 开始直到本节最后一段，如无特殊声明，始终假定 $E$ 为复 Banach 空间．

**定理 6.2** 设 $T\in\mathscr{B}(E)$．

(i) 若 $\lambda$ 是 $T$ 的特征值，则 $T$ 对应于 $\lambda$ 的全部特征向量以及

零元素组成$E$的一个闭子空间，今后我们称它为$T$对应于$\lambda$的特征向量空间；

(ii) 设$\lambda_k(k=1,2,\cdots,n)$是$T$的$n$个不同的特征值，$x_k$是$T$对应于$\lambda_k$的任一特征向量．则$x_1,x_2,\cdots,x_n$线性无关．

**证** (i) $T$对应于$\lambda$的全部特征向量以及零元素构成的集，实际上就是算子$\lambda I-T$的零空间．由于任何有界线性算子的零空间都是闭子空间，故结论(i)成立．

(ii) 因$x_1\neq\theta$，故$x_1$本身是线性无关的．我们用归纳法证明$x_1,x_2,\cdots,x_n$的线性无关性．设已知$x_1,x_2,\cdots,x_k$线性无关．现在证明$x_1,x_2,\cdots,x_k,x_{k+1}$线性无关．设有$k+1$个数$c_1,c_2,\cdots,c_k,c_{k+1}$使

$$c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_kx_k+c_{k+1}x_{k+1}=\theta. \tag{13}$$

于是
$$\begin{aligned}&T(c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_kx_k+c_{k+1}x_{k+1})\\&=c_1\lambda_1x_1+c_2\lambda_2x_2+\cdots+c_k\lambda_kx_k+c_{k+1}\lambda_{k+1}x_{k+1}=\theta.\end{aligned} \tag{14}$$

在(13)的左、右两端乘以$\lambda_{k+1}$再减去(14)，得

$$c_1(\lambda_{k+1}-\lambda_1)x_1+\cdots+c_k(\lambda_{k+1}-\lambda_k)x_k=\theta.$$

由于$x_1,x_2,\cdots,x_k$线性无关，故

$$c_1(\lambda_{k+1}-\lambda_1)=c_2(\lambda_{k+1}-\lambda_2)=\cdots=c_k(\lambda_{k+1}-\lambda_k)=0. \tag{15}$$

又因$\lambda_{k+1}\neq\lambda_j$对所有$j=1,2,\cdots,k$成立，故$c_1=c_2=c_3=\cdots=c_k=0$，代入(13)，可得$c_{k+1}=0$．因此$x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}$线性无关．于是对任意的$n$，$x_1,x_2,\cdots,x_n$线性无关．(ii)证毕．定理全部证毕．

为了继续讨论谱的性质，先介绍抽象解析函数的概念．

设$T(\cdot)$是定义在复平面的某个开集$G$内而在空间$E$内取值的抽象函数．如果对于给定的$\lambda\in G$，当$\Delta\lambda\to0$时，比值

$$\frac{T(\lambda+\Delta\lambda)-T(\lambda)}{\Delta\lambda}$$

依$E$中的范数收敛，则称它的极限是$T(\cdot)$在$\lambda$处的导数，记为

$\frac{d}{d\lambda}T(\lambda)$，并称 $T(\cdot)$ 在 $\lambda$ 处可导。如果 $T(\cdot)$在 $G$ 内每一点可导，则称 $T(\cdot)$在 $G$ 内解析，或称 $T(\cdot)$为定义在 $G$ 内的抽象解析函数。

**定理 6.3** **设 $T\in\mathscr{B}(E)$，$\lambda$ 为复数. 则当 $|\lambda|>\|T\|$ 时，$\lambda$ 是 $T$ 的正则值，且**

$$(\lambda I-T)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{T^n}{\lambda^{n+1}},\tag{16}$$

**右端的级数按算子范数收敛，$(\lambda I-T)^{-1}$ 的范数则满足**

$$\|(\lambda I-T)^{-1}\|\leqslant\frac{1}{|\lambda|-\|T\|}.\tag{17}$$

**证** 考察算子$\frac{T}{\lambda}$. 易见$\left\|\frac{T}{\lambda}\right\|=\frac{\|T\|}{|\lambda|}<1$，于是

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\|\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n\right\|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\left\|\frac{T}{\lambda}\right\|^n<\infty.$$

因 $E$ 为 Banach 空间，故 $\mathscr{B}(E)$ 也为 Banach 空间. 于是级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n$ 按算子范数收敛于 $E$ 上某一有界线性算子，因此级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{T^n}{\lambda^{n+1}}$ 也按算子范数收敛于 $E$ 上某一有界线性算子，记为 $C$. 现在证明 $C$ 就是 $\lambda I-T$ 的逆算子.

令

$$T_m=\sum_{n=0}^{m}\frac{T^n}{\lambda^{n+1}},$$

则

$$(\lambda I-T)T_m=I-\frac{T^{m+1}}{\lambda^{m+1}}=T_m(\lambda I-T).$$

注意到当 $m\to\infty$ 时，$\{T_m\}\to C$，$\left\{\left\|\frac{T^{m+1}}{\lambda^{m+1}}\right\|\right\}\to0$，在上式中取极限，有

$$(\lambda I-T)C=I=C(\lambda I-T).$$

因此 $\lambda I-T$ 有有界逆算子且等于 $C$，或者说 $(\lambda I-T)^{-1}$ 存在且

$$(\lambda I-T)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{T^n}{\lambda^{n+1}}.$$

这样就证明了(16). 由不等式

$$\|(\lambda I-T)^{-1}\|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\|T^n\|}{|\lambda|^{n+1}}$$

$$\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\|T\|^n}{|\lambda|^{n+1}}=\frac{1}{|\lambda|-\|T\|}$$

可知,(17)成立. 证毕.

**推论 1** 设 $T\in\mathscr{B}(E)$ 有有界逆算子. 那么对任何 $S\in\mathscr{B}(E)$，当 $\|S-T\|<\|T^{-1}\|^{-1}$ 时，$S$ 也有有界逆算子. 记 $\Delta T=S-T$，则

$$S^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-T^{-1}\Delta T)^n T^{-1};\tag{18}$$

$$\|S^{-1}-T^{-1}\|\leqslant\frac{\|\Delta T\|\|T^{-1}\|^2}{1-\|\Delta T\|\|T^{-1}\|}.\tag{19}$$

(18)中的级数在算子范数意义下收敛.

**证** 易见 $S=T+\Delta T=T(I+T^{-1}\Delta T)$. 由假设，有

$$\|T^{-1}\Delta T\|\leqslant\|T^{-1}\|\|\Delta T\|<1.$$

再由定理 6.3 可知，$I+T^{-1}\Delta T$ 有有界逆算子，且

$$(I+T^{-1}\Delta T)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-T^{-1}\Delta T)^n.$$

由逆算子的性质 3°(在定理 6.1 前)及 $T^{-1}$、$(I+T^{-1}\Delta T)^{-1}$ 的有界性可知，$S=T(I+T^{-1}\Delta T)$ 有有界逆算子 $S^{-1}$ 且

$$S^{-1}=(I+T^{-1}\Delta T)^{-1}T^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-T^{-1}\Delta T)^n T^{-1}.$$

(18)成立. 再由(18),

$$\|S^{-1}-T^{-1}\|\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|\Delta T\|^{n}\|T^{-1}\|^{n}\right)\|T^{-1}\|$$

$$=\frac{\|\Delta T\|\|T^{-1}\|^{2}}{1-\|\Delta T\|\|T^{-1}\|}.$$

(19)成立. 证毕.

**推论 2** 设 $\lambda$ 是 $T$ 的正则值, 则对任何复数 $\mu$, 当 $|\mu-\lambda|<\|(\lambda I-T)^{-1}\|^{-1}$ 时, $\mu$ 也是 $T$ 的正则值, 且

$$(\mu I-T)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}(\mu-\lambda)^{n}(\lambda I-T)^{-(n+1)};\qquad(20)$$

$$\|(\mu I-T)^{-1}-(\lambda I-T)^{-1}\|\leqslant\frac{|\mu-\lambda|\|(\lambda I-T)^{-1}\|^{2}}{1-|\mu-\lambda|\|(\lambda I-T)^{-1}\|}.\qquad(21)$$

(20)式中的级数在算子范数意义下收敛.

**证** 在推论 1 中将 $T$ 换成 $\lambda I-T$, 将 $S$ 换成 $\mu I-T$ 便知道推论 2 成立.

**定理 6.4** 对于 Banach 空间 $E$, 下列结论成立:

(i) $\mathscr{B}(E)$ 中可逆算子的全体是 $\mathscr{B}(E)$ 中的开集;

(ii) 对任一给定的 $T\in\mathscr{B}(E)$, $T$ 的正则集 $\rho(T)$ 是复平面上的开集, $T$ 的谱 $\sigma(T)$ 则是复平面上的有界闭集;

(iii) $(\lambda I-T)^{-1}$ 作为定义在 $\rho(T)$ 上的算子值函数是解析的.

**证** (i) 由推论 1 导出. (ii) 由推论 2 及定理 6.3 导出.

(iii) 用豫解式的记号, 有 $R_\lambda=(\lambda I-T)^{-1}$. 经过直接验证, 下面的等式成立(第 58 题):

$$R_\mu-R_\lambda=(\lambda-\mu)R_\mu R_\lambda.$$

再由(21)可知, $R_\lambda$ 在 $\rho(T)$ 上连续, 因此 $\lim\limits_{\mu\to\lambda}R_\mu=R_\lambda$, 故

$$\lim_{\mu\to\lambda}\frac{R_\mu-R_\lambda}{\mu-\lambda}\text{存在且等于}-R_\lambda^2,$$

$R_\lambda$ 在 $\rho(T)$ 上解析. 证毕.

由定理 6.4(ii), $\sigma(T)$ 是有界闭集, 但并不知道它是否非空,

下面的定理 6.5 回答了这个问题.

**定理 6.5** 设 Banach 空间 $E$ 含有非零元素，则对任一 $T\in\mathscr{B}(E)$，$\sigma(T)$ 非空.

**证** 用反证法. 设存在 $E$ 上的有界线性算子 $T$ 使 $\sigma(T)=\varnothing$，则 $T$ 的豫解式 $R_\lambda=(\lambda I-T)^{-1}$ 在复平面内处处解析. 任取 $\mathscr{B}(E)$ 上的有界线性泛函 $f$，则 $f(R_\lambda)$ 在复平面内处处解析. 由不等式 (17)，当 $|\lambda|>\|T\|$ 时，

$$|f(R_\lambda)|\leqslant\|f\|\,\|R_\lambda\|\leqslant\frac{\|f\|}{|\lambda|-\|T\|}.$$

因此

$$\lim_{\lambda\to\infty}f(R_\lambda)=0.$$

由 Liouville 定理，$f(R_\lambda)=0$. 由 $f$ 的任意性可知，$R_\lambda=\theta$. 任取 $x\in E$，我们有

$$x=[(\lambda I-T)R_\lambda]x=(\lambda I-T)(R_\lambda x)=\theta.$$

故 $E=\{\theta\}$，矛盾. 这个矛盾说明 $\sigma(T)\neq\varnothing$. 证毕.

### 6.4 谱半径

**定义 6.2** 设 $T\in\mathscr{B}(E)$，称

$$r_T=\max_{\lambda\in\sigma(T)}|\lambda|$$

为 $T$ 的谱半径.

算子 $T$ 的谱半径是与 $T$ 有密切联系的另一个重要的量. 但与算子的范数一样，不能期望用它来全面地刻划一个算子.

**定理 6.6** 设 $T\in\mathscr{B}(E)$，则 $T$ 的谱半径 $r_T$ 满足

$$r_T=\lim_{n\to\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}. \tag{22}$$

**证** 任取复数 $\lambda$. 由等式

$$\lambda^n I-T^n=(\lambda I-T)(\lambda^{n-1}I+\lambda^{n-2}T+\cdots+T^{n-1}) \tag{23}$$

可知，当 $\lambda^n I-T^n$ 有有界逆算子时 $\lambda I-T$ 也有有界逆算子. 其实，

当 $\lambda^n I - T^n$ 有有界逆算子时，由(23)，有

$$(\lambda I - T)[(\lambda^n I - T^n)^{-1}(\lambda^{n-1}I + \lambda^{n-2}T + \cdots + T^{n-1})] = I$$
$$= [(\lambda^n I - T^n)^{-1}(\lambda^{n-1}I + \lambda^{n-2}T + \cdots + T^{n-1})](\lambda I - T).$$

再由逆算子的性质2°(在定理 6.1 前)可知，$\lambda I - T$ 有有界逆算子. 因此当 $\lambda$ 属于 $T$ 的谱时，$\lambda^n$ 必属于 $T^n$ 的谱. 由定理 6.3 可知，$|\lambda^n| \leqslant \|T^n\|$，于是 $|\lambda| \leqslant \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$. 因这个不等式对一切自然数 $n$ 都成立，令 $n \to \infty$，得

$$|\lambda| \leqslant \varliminf_{n \to \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

而 $\lambda \in \sigma(T)$ 可以任意，因此

$$r_T \leqslant \varliminf_{n \to \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}. \tag{24}$$

另一方面，若 $|\lambda| > \|T\|$，由定理 6.3 中的等式(16)，对 $\mathscr{B}(E)$ 上的任一有界线性泛函 $f$，有

$$f[(\lambda I - T)^{-1}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(T^n)}{\lambda^{n+1}}.$$

上式左端在 $\{\lambda: |\lambda| > r_T\}$ 内解析，由 Laurent 展式的唯一性可知，上式右端的级数在 $\{\lambda: |\lambda| > r_T\}$ 内收敛. 于是对任一满足 $|\lambda| > r_T$ 的数 $\lambda$，$\left\{\frac{f(T^n)}{\lambda^{n+1}}\right\}$ 是有界数列. 因 $f \in (\mathscr{B}(E))^*$ 是任意的，由共鸣定理，$\left\{\frac{T^n}{\lambda^{n+1}}\right\}$ 一致有界，于是 $\left\{\frac{T^n}{\lambda^n}\right\}$ 也一致有界. 因而存在 $C_\lambda > 0$，使 $\frac{\|T^n\|}{|\lambda|^n} \leqslant C_\lambda$ 即 $\|T^n\| \leqslant C_\lambda |\lambda|^n$. 因此 $\|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant C_\lambda^{\frac{1}{n}} |\lambda|$. 令 $n \to \infty$，得

$$\varlimsup_{n \to \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant |\lambda|. \tag{25}$$

(25)式对任何满足 $|\lambda| > r_T$ 的数 $\lambda$ 都成立，所以

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}\leqslant r_T. \tag{26}$$

由(24)、(26)可知，(22)成立．证毕．

在这一节中，我们引进了有界线性算子的正则集、谱以及谱半径的概念．对于谱，则有点谱与连续谱之分．希望读者注意：

1° 有界线性算子 $T$ 的正则集 $\rho(T)$ 是开集，$\sigma(T)$ 是有界闭集，而当 $E\neq\{\theta\}$ 时，$\sigma(T)$ 非空．至于点谱与连续谱，则视算子的不同而有不同的情况；

2° 可逆算子的全体在 $\mathscr{B}(E)$ 中是开集，这无疑是一个有意义的结果，对于这个开集，我们还可作进一步研究，但已超出本书的范围，故从略；

3° 有界线性算子 $T$ 的豫解式 $R_\lambda=(\lambda I-T)^{-1}$ 是与 $T$ 有密切关系的算子值解析函数，它是研究算子 $T$ 的特性的一个有力工具；

4° 有界线性算子 $T$ 的谱半径是第二个与 $T$ 密切关联的重要的量，它与 $T$ 的乘幂的范数通过下式联系起来：

$$r_T=\lim_{n\to\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

# §7 紧 算 子

在这一节中，我们将对一类特殊的有界线性算子——紧算子作比较系统的研究．

## 7.1 紧算子的基本概念与基本性质

**定义 7.1** 设 $T$ 是定义在赋范线性空间 $E$ 上而值域包含在赋范线性空间 $E_1$ 中的线性算子．如果 $T$ 将 $E$ 中的任一有界集映成 $E_1$ 中的列紧集，则称 $T$ 为紧算子．紧算子亦称为全连续算子．

由紧算子的定义可知：

1° 紧算子是连续的．

其实，由于列紧集是有界的，由§1定理1.2及定理1.4可知，紧算子有界因而连续。

2° 算子$T$为紧算子的充分必要条件是$T$将$E$中的闭单位球$\bar{S}(\theta,1)=\{x:\|x\|\leqslant 1\}$映成$E_1$中的列紧集。

必要性是显然的。今证充分性。设$A\subset E$为任一有界集，取正数$\alpha_0$充分大，使$\frac{1}{\alpha_0}A\subset\bar{S}(\theta,1)$，这里$\frac{1}{\alpha_0}A=\left\{\frac{1}{\alpha_0}x:x\in A\right\}$。根据假定，$T\left(\frac{1}{\alpha_0}A\right)$是$E_1$中的列紧集。于是$T(A)=\alpha_0 T\left(\frac{1}{\alpha_0}A\right)$也是$E_1$中的列紧集，故$T$为紧算子。

**例1** 设$E$、$E_1$是赋范线性空间，$T\in\mathscr{B}(E,E_1)$，如果$T$的值域是有限维的，则$T$为紧算子。

其实，因$T$有界，$T$将$E$中的任一有界集映成$E_1$中的有界集。由假定，这个有界集包含在$E_1$的某个有限维子空间中，故列紧。于是$T$为紧算子。

我们称例1中的算子$T$是有限秩算子。

**例2** 设$K(t,s)$在$a\leqslant t\leqslant b,a\leqslant s\leqslant b$上连续，则由

$$(Tx)(t)=\int_a^b K(t,s)x(s)ds$$

定义的算子$T$是$C[a,b]$上的紧算子。

**证** 设$A$是$C[a,b]$中的有界集。存在正数$M$，使得对一切$x\in A$，有$\|x\|\leqslant M$。于是

$$\begin{aligned}|(Tx)(t_1)-(Tx)(t_2)|&\leqslant\int_a^b|K(t_1,s)-K(t_2,s)||x(s)|ds\\&\leqslant M\int_a^b|K(t_1,s)-K(t_2,s)|ds.\end{aligned}$$

注意到$K(t,s)$在$a\leqslant t\leqslant b,a\leqslant s\leqslant b$上连续，故对任给的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得对任意的$t_1$、$t_2\in[a,b]$，只要$|t_1-t_2|<\delta$，就有

$$|K(t_1,s)-K(t_2,s)|<\frac{\varepsilon}{M(b-a)}\quad(s\in[a,b]),$$

因此对一切 $x\in A$，有

$$|(Tx)(t_1)-(Tx)(t_2)|<\varepsilon.$$

这表明 $A$ 的象 $T(A)$ 是等度连续的. 又因 $T$ 有界(见§1例7)，因此 $T(A)$ 有界，由第六章§5定理5.1可知，$T(A)$ 列紧，故 $T$ 为紧算子.

**例3** 设无穷矩阵 $(\alpha_{ij})$ 满足

$$\sum_{i,j=1}^{\infty}|\alpha_{ij}|^2<+\infty,$$

则由 $$y=Tx:\eta_j=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_{ij}\xi_i\quad(j=1,2,3,\cdots),$$

定义了一个 $l^2$ 上的紧算子 $T$，其中 $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_j,\cdots\}$ $y=\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_j,\cdots\}$ 均属于 $l^2$.

**证** 由

$$\|y\|^2=\sum_{j=1}^{\infty}|\eta_j|^2=\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_{ij}\xi_i\right|^2$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_{ij}|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^2\right)$$

$$=\left(\sum_{i,j=1}^{\infty}|\alpha_{ij}|^2\right)\|x\|^2,$$

可知 $T$ 是定义在 $l^2$ 上的有界线性算子.

现在证明 $T$ 是紧算子. 设 $A$ 是 $l^2$ 中的任一有界集，存在正数 $M$，使对一切 $x\in A$，有 $\|x\|\leqslant M$. 由于 $\sum_{i,j=1}^{\infty}|\alpha_{ij}|^2<+\infty$，因此对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，使得

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=N+1}^{\infty}|\alpha_{ij}|^2<\frac{\varepsilon^2}{M^2}.$$

于是

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=N+1}^{\infty}|\eta_j|^2 &= \sum_{j=N+1}^{\infty}\left|\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_{ij}\xi_i\right|^2 \\
&\leqslant \sum_{j=N+1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_{ij}|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^2\right) \\
&< \frac{\varepsilon^2}{M^2}\|x\|^2 \leqslant \varepsilon^2.
\end{aligned}
$$

这表明由 $y=Tx(x\in A)$ 的前 $N$ 个坐标 $\eta_1$, $\eta_2,\cdots$, $\eta_N$ 构成的元素 $\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_N,0,\cdots\}$ 组成的集 $B$ 是集合 $T(A)$ 的一个 $\varepsilon$-网. $B$ 是 $l^2$ 的一个 $N$ 维子空间中的有界集，故列紧. 因此 $T(A)$ 有列紧的 $\varepsilon$-网，于是 $T(A)$ 列紧，$T$ 是紧算子.

下面的定理 7.1 至定理 7.6，讨论紧算子的几个基本性质.

**定理 7.1** 设 $T\in\mathscr{B}(E,E_1)$、$S\in\mathscr{B}(E_1,E_2)$，这里 $E$、$E_1$、$E_2$ 都是赋范线性空间. 如果 $T$、$S$ 中有一个是紧算子，则 $ST$ 也是紧算子.

证 我们仅以 $S$ 是紧算子的情形证明定理. 由于 $T$ 将 $E$ 中的有界集映成 $E_1$ 中的有界集，$S$ 将 $E_1$ 中的有界集映射成 $E_2$ 中的列紧集，因此 $ST$ 将 $E$ 中的有界集映成 $E_2$ 中的列紧集，故 $ST$ 是紧算子. 证毕.

**推论** 设赋范线性空间 $E$、$E_1$ 中至少有一个是无限维的，$T\in\mathscr{B}(E,E_1)$ 是紧算子，则 $T$ 不可能存在有界逆算子.

证 我们只讨论 $E$ 是无限维的情形. 如果 $T$ 有有界的逆算子 $T^{-1}$，由定理 7.1，$I_E=T^{-1}T$ 是紧算子，于是 $E$ 中任一有界集是列紧的. 由第七章定理 2.2，$E$ 为有限维的. 矛盾. 故 $T$ 不可能存在有界逆算子. 证毕.

**定理 7.2** 设 $T\in\mathscr{B}(E,E_1)$. 若 $T$ 是紧算子，则 $T$ 将 $E$ 中的弱收敛点列映成 $E_1$ 中的依范数收敛点列.

**证** 设$\{x_n\}(n=1,2,3,\cdots)$是$E$中的一个点列弱收敛于$x_0\in E$，任取$f\in E_1^*$，由

$f(Tx_n)=(T^*f)(x_n)$ 及 $\{(T^*f)(x_n)\}\to(T^*f)(x_0)=f(Tx_0)$

可知，$\{Tx_n\}$在$E_1$中弱收敛于$Tx_0$．今设$\{Tx_n\}$在$E_1$中不依范数收敛于$Tx_0$，则存在$\varepsilon_0>0$及$\{x_n\}$的子列$\{x_{n_k}\}(k=1,2,3,\cdots)$使

$$\|Tx_{n_k}-Tx_0\|\geqslant\varepsilon_0 \tag{1}$$

对$k=1,2,3,\cdots$均成立．

由定义5.4后面的性质3°，$\{x_{n_k}\}$有界，由于$T$是紧算子，故从$\{Tx_{n_k}\}$中可选出一个在$E_1$中依范收敛的子列．为简单起见，不妨设这个收敛的子列就是$\{Tx_{n_k}\}$自身，记其极限为$y_0$．在(1)中令$k\to\infty$，可得

$$\|y_0-Tx_0\|\geqslant\varepsilon_0. \tag{2}$$

由于$\{Tx_{n_k}\}$在$E_1$中依范数收敛于$y_0$，故在$E_1$中弱收敛于$y_0$．另一方面，$\{Tx_{n_k}\}$作为$\{Tx_n\}$的子列在$E_1$中必弱收敛于$Tx_0$．由弱极限的唯一性可知，$y_0=Tx_0$．与(2)式矛盾．这个矛盾说明$\{Tx_n\}$在$E_1$中必依范数收敛于$Tx_0$．证毕．

**定理 7.3** 设$T\in\mathscr{B}(E,E_1)$，$T$是紧算子，则$T$的值域是可分的．

**证** 作$E$中的球$S(\theta,n)=\{x:\|x\|<n\}(n=1,2,3,\cdots)$，令$M_n$是$S(\theta,n)$在$T$作用下的象，即$M_n=T[S(\theta,n)]$．由于每个$S(\theta,n)$是有界的，故每个$M_n$列紧．而列紧集是可分的，因此$T$的值域$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}M_n$也是可分的．证毕．

**定理 7.4** 设$E$是赋范线性空间，$E_1$是Banach空间，若紧算子列$\{T_n\}\subset\mathscr{B}(E,E_1)(n=1,2,3,\cdots)$依算子范数收敛于$T\in\mathscr{B}(E,E_1)$，则$T$也是紧算子．

**证** 设$A$是$E$中的任一有界集．根据假定，对每个$n$，$T_n(A)$

是 $E_1$ 中的列紧集. 由于$\|T_n-T\|\to 0$,故对任给的 $\varepsilon>0$, 存在$n_0$,使得

$$\|T_{n_0}x-Tx\|<\varepsilon$$

对一切 $x\in A$ 成立,因此$T_{n_0}(A)$是 $T(A)$的一个列紧 $\varepsilon$-网. 因$E_1$完备,根据第六章定理 4.3 可知,$T(A)$是列紧的. 故 $T$ 为紧算子. 证毕.

由习题第 76 题可知,如果$S$、$T\in\mathscr{B}(E,E_1)$都是紧算子, 则对任意的数 $\alpha$、$\beta$,$\alpha S+\beta T$ 也是紧算子. 再由定理 7.4,有

**定理 7.5　设 $E$ 是赋范线性空间,$E_1$ 是 Banach 空间, 则由 $E$ 到 $E_1$ 的全部紧算子组成的集按算子的线性运算及算子的范数是 $\mathscr{B}(E,E_1)$的闭子空间,因此它本身也是一个 Banach 空间.**

为了讨论紧算子的共轭算子的紧性,先证明下面的引理.

**引理　设 $E$ 为赋范线性空间, $A\subset E$ 是列紧集, $\{f_n\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$是 $E$ 上的一致有界线性泛函序列. 若对每个 $x\in A$, 序列 $\{f_n(x)\}$ 收敛, 则$\{f_n(x)\}$作为定义在列紧集 $A$ 上的函数列在 $A$ 上是一致收敛的.**

**证**　因 $A$ 列紧,故对任给的 $\varepsilon>0$, $A$ 有有限的 $\varepsilon$-网 $B=\{x_1,x_2,\cdots,x_{k_0}\}$. 不妨设$B\subset A$. 由于 $B$ 是有限集, 根据假设, 对于任给的 $\varepsilon>0$,存在$N>0$,使得当 $m$、$n>N$ 时,不等式

$$|f_n(x_j)-f_m(x_j)|<\varepsilon$$

对于 $j=1,2,\cdots,k_0$ 同时成立. 任取 $x\in A$, 则有 $x_{j_0}\in B$ 使$\|x-x_{j_0}\|<\varepsilon$. 故当 $m$、$n>N$ 时,

$$\begin{aligned}|f_n(x)-f_m(x)|&\leqslant|f_n(x)-f_n(x_{j_0})|\\&\quad+|f_n(x_{j_0})-f_m(x_{j_0})|+|f_m(x_{j_0})-f_m(x)|\\&\leqslant(\|f_n\|+\|f_m\|)\|x-x_{j_0}\|+\varepsilon\\&\leqslant(2M+1)\varepsilon,\end{aligned}\tag{3}$$

其中$M=\sup\limits_{n\geq 1}\|f_n\|$. (3)式表明 $\{f_n(x)\}$ 在 $A$ 上为一致收敛的函数列，证毕.

**注** 在引理中，条件是：$\{f_n\}$ 在集合 $A$ 上收敛，这显然与弱*收敛不同，希读者注意.

**定理 7.6 设 $E$、$E_1$ 都是赋范线性空间，$T\in\mathscr{B}(E,E_1)$ 是紧算子，则 $T$ 的共轭算子 $T^*$ 也是紧算子.**

**证** 取 $E$ 中的闭单位球 $\bar{S}=\bar{S}(\theta,1)$，令 $A=T(\bar{S})$，则 $A$ 为 $E_1$ 中的列紧集. 于是 $A$ 可分.

设 $\{f_n\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 是 $E_1$ 上的一个一致有界线性泛函序列. 由于 $A$ 可分，逐字重复定理 5.4 的方法可以证明，存在 $\{f_n\}$ 的一个子序列 $\{f_{n_k}\}$ 使 $\{f_{n_k}(y)\}$ 对任何 $y\in A$ 为收敛的. 由上面的引理，$\{f_{n_k}(y)\}$ 在 $A$ 上为一致收敛的，因此对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $K>0$，使得当 $k$、$l>K$ 时，不等式 $|f_{n_k}(y)-f_{n_l}(y)|<\varepsilon$ 对一切 $y\in A$ 一致地成立. 对于每个 $y\in A$，存在 $x\in\bar{S}$ 使 $y=Tx$. 因此当 $k$、$l>K$ 时，不等式

$$|f_{n_k}(Tx)-f_{n_l}(Tx)|<\varepsilon$$

对一切 $x\in\bar{S}$ 一致地成立，即不等式

$$|(T^*f_{n_k})(x)-(T^*f_{n_l})(x)|<\varepsilon$$

对一切 $x\in\bar{S}$ 一致地成立. 于是

$$\|T^*f_{n_k}-T^*f_{n_l}\|=\sup_{x\in\bar{S}}|(T^*f_{n_k})(x)-(T^*f_{n_l})(x)|\leqslant\varepsilon.$$

故 $\{T^*f_{n_k}\}$ 为 $E^*$ 中的基本点列. 由于 $E^*$ 完备，因此 $\{T^*f_{n_k}\}$ 在 $E^*$ 中依范数收敛于某一元素. 这表明 $T^*$ 是紧算子. 证毕.

### 7.2 具有基的 Banach 空间内的紧算子

设 $E$ 是具有基的 Banach 空间，$\{e_1,e_2,\cdots,e_n,\cdots\}$ 为 $E$ 的一个基. 对任一元素 $x\in E$，我们有

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n e_n. \tag{4}$$

对每个给定的自然数 $k$，定义算子

$$S_k x=\sum_{n=1}^{k}\xi_n e_n,\quad R_k x=\sum_{n=k+1}^{\infty}\xi_n e_n.$$

显然 $S_k$ 是有界线性算子，由 $S_k+R_k=I$ 可知 $R_k$ 也是有界线性算子. 因 $\lim\limits_{k\to\infty}S_k x=x$ 对一切 $x\in E$ 成立，由定理 3.2，$\{S_k\}$ 一致有界，于是 $\{R_k\}$ 也一致有界.

**定理 7.7** **设 $E$ 是具有基的 Banach 空间，$A$ 为 $E$ 的子集. 则 $A$ 列紧的充分必要条件是**

**(i) $A$ 有界；**

**(ii) 对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $K>0$，使当 $k>K$ 时，不等式**

$$\|R_k x\|<\varepsilon \tag{5}$$

**对一切 $x\in A$ 一致地成立.**

**证** 必要性. (i)的必要性显然. 现在证明(ii)的必要性. 因 $\{S_k\}$ 一致有界，故存在 $C>0$ 使得

$$\|S_k\|\leqslant C \tag{6}$$

对 $k=1,2,3,\cdots$ 同时成立. 任取 $\varepsilon>0$，令 $\eta=\dfrac{\varepsilon}{2(1+C)}$，$A$ 列紧. 故它有有限的 $\eta$-网 $B=\{x_1,x_2,\cdots,x_l\}$. 不妨设 $B\subset A$. 注意到算子列 $\{R_k\}$ 在算子强收敛意义下收敛于零，而 $B$ 是有限集，故存在 $K>0$，使当 $k>K$ 时，不等式

$$\|R_k x_j\|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{7}$$

对 $j=1,2,\cdots,l$ 同时成立.

今任取 $x\in A$，因 $B$ 是 $A$ 的 $\eta$-网，存在 $x_{j_0}\in B$ 使 $\|x-x_{j_0}\|<\eta$. 由(6)，对 $k=1,2,3,\cdots$，$\|S_k x_{j_0}-S_k x\|\leqslant C\eta$. 故

$$\begin{aligned}\|R_k x\|&=\|x-S_k x\|\leqslant\|x-x_{j_0}\|+\|x_{j_0}-S_k x\|\\&\leqslant\|x-x_{j_0}\|+\|S_k x_{j_0}-S_k x\|+\|R_k x_{j_0}\|\end{aligned}$$

$$\leqslant (1+C)\eta + \|R_k x_{j_0}\|.$$

由(7)可知，当$k>K$时，$\|R_k x_{j_0}\|<\frac{\varepsilon}{2}$. 再注意到$(1+C)\eta=\frac{\varepsilon}{2}$，因此当$k>K$时，不等式

$$\|R_k x\|<\varepsilon$$

对一切$x\in A$一致地成立，条件(ii)成立.

充分性. 我们证明当定理中的条件(i)、(ii)满足时，对任给的$\varepsilon>0$，$A$有列紧的$\varepsilon$-网.

由不等式(5)，存在$k_0$使得

$$\|R_{k_0}x\|<\varepsilon \tag{5'}$$

对一切$x\in A$一致地成立，令

$$A_{k_0}=\{S_{k_0}x: x\in A\}.$$

由于$A$有界，故$A_{k_0}$也有界. 另一方面，$A_{k_0}$是由$\{e_1, e_2, \cdots, e_{k_0}\}$张成的有限维子空间中的子集. 由第七章定理2.2，$A_{k_0}$列紧. 再由不等式(5′)可知，$A_{k_0}$是$A$的列紧$\varepsilon$-网. 故$A$列紧. 证毕.

现在仍设$E$是具有基的Banach空间，$\{e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots\}$是$E$的一个基. 对于$T\in\mathscr{B}(E)$，有

$$\begin{aligned}Tx &= (S_k+R_k)(Tx)\\ &= S_k(Tx)+R_k(Tx)\\ &= T_{1k}x+T_{2k}x,\end{aligned} \tag{8}$$

其中$T_{1k}=S_kT$、$T_{2k}=R_kT$，而$S_k$、$R_k$则为前页定义的算子. 下面的定理刻划了具有基的Banach空间中的紧算子.

**定理 7.8** **设$E$是具有基的Banach空间，$T\in\mathscr{B}(E)$为给定的，则$T$为紧算子的充分必要条件是对任给的$\varepsilon>0$，存在仅与$\varepsilon$有关的$K>0$，使得当$k>K$时，$\|T_{2k}\|<\varepsilon$.**

**证** 必要性 设$\bar{S}=\bar{S}(\theta,1)$为$E$的闭单位球，$A=T(\bar{S})$. 因$T$为紧算子，故$A$列紧. 由定理7.7，对任给的$\varepsilon>0$，存在$K>0$

使得当 $k>K$ 时，不等式

$$\|R_k y\|<\varepsilon/2$$

对一切 $y\in A$ 成立．于是对一切 $x\in S$，当 $k>K$ 时，

$$\|T_{2k}x\|=\|R_kTx\|=\|R_ky\|<\frac{\varepsilon}{2},$$

这里 $y=Tx$．因此 $\|T_{2k}\|\leqslant\varepsilon/2<\varepsilon$．

充分性　由假设，对任给的 $\varepsilon>0$，存在仅与 $\varepsilon$ 有关的 $K>0$，使得当 $k>K$ 时，$\|T_{2k}\|<\varepsilon$，由 $T_{2k}=T-T_{1k}$ 可知，

$$\|T-T_{1k}\|<\varepsilon.$$

于是

$$\lim_{k\to\infty}\|T-T_{1k}\|=0. \tag{9}$$

由于对每个 $k$，$T_{1k}$ 是有界的有限秩算子，故为紧算子．而(9)式表明 $\{T_{1k}\}$ 在算子范数意义下收敛于 $T$，由定理 7.4，$T$ 是紧算子．证毕．

定理 7.8 表明，在具有基的 Banach 空间中，可以将紧算子分解为两个算子的和，其中一个算子是有限秩的，另一个算子的范数则可以小于任一预先指定的正数．因此，在具有基的Banach 空间中，可以说紧算子是几乎有限秩的．

### 7.3 紧算子的谱分解理论

在这一段中，我们研究紧算子的谱分解理论．这一理论是由 Riesz-Schauder 提出的．从定性的角度来说，紧算子的谱分解理论已获得较圆满的解决．在整个这一段中，如无特别声明，也始终假定 $E$ 是复 Banach 空间．

**定理 7.9**　设 $T$ 是 $E$ 上的紧算子，$\lambda\neq 0$．则 $\lambda I-T$ 的值域是 $E$ 的闭子空间．

**证**　不失一般性，可设 $\lambda=1$，否则可将 $T$ 换成 $\frac{T}{\lambda}$ 而研究算子

$I-\frac{T}{\lambda}$好了．令 $S=I-T$，用$\mathfrak{R}$表 $S$ 的值域．今证明 $\mathfrak{R}=\overline{\mathfrak{R}}$．任取 $y_0\in\overline{\mathfrak{R}}$，则存在 $\{y_n\}\subset\mathfrak{R}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 使 $\{y_n\}\to y_0$．对每个 $y_n$，存在 $x_n\in E$，使

$$Sx_n=x_n-Tx_n=y_n. \tag{10}$$

用 $\mathfrak{N}$ 表示 $S$ 的零空间，并令 $\rho_n=\inf\limits_{x\in\mathfrak{N}}\|x_n-x\|$．在 $\mathfrak{N}$ 中取 $x_n'$ 使

$$\|x_n-x_n'\|\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)\rho_n.$$

再令 $z_n=x_n-x_n'$．则 $\rho_n\leqslant\|z_n\|\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)\rho_n$ 且

$$Sz_n=Sx_n-Sx_n'=Sx_n=y_n. \tag{11}$$

现在证明 $\{z_n\}$ 有界．设不然，我们可以假定（必要时取 $\{z_n\}$ 的一个子序列）$\|z_n\|\to\infty$．令 $u_n=\frac{z_n}{\|z_n\|}$．则

$$\|u_n\|=1 \tag{12}$$

且

$$Su_n=\frac{1}{\|z_n\|}Sz_n=\frac{y_n}{\|z_n\|}\to\theta\quad(\text{当}\, n\to\infty). \tag{13}$$

由于 $T$ 是紧算子，$\{u_n\}$ 有界，故从 $\{u_n\}$ 中可取出子序列 $\{u_{n_k}\}$ 使 $\{Tu_{n_k}\}$ 收敛．再由

$$u_{n_k}=(I-T)u_{n_k}+Tu_{n_k}=Su_{n_k}+Tu_{n_k}$$

以及(13)式可知，$\{u_{n_k}\}$ 收敛．记 $\{u_{n_k}\}$ 的极限为 $u_0$．于是

$$Su_0=\lim_{k\to\infty}Su_{n_k}=\theta.$$

故 $u_0\in\mathfrak{N}$．注意到 $x_{n_k}'+\|z_{n_k}\|u_0\in\mathfrak{N}$，有

$$\begin{aligned}\|u_{n_k}-u_0\|&=\left\|\frac{z_{n_k}}{\|z_{n_k}\|}-u_0\right\|=\left\|\frac{x_{n_k}-x_{n_k}'}{\|z_{n_k}\|}-u_0\right\|\\&=\frac{1}{\|z_{n_k}\|}\|x_{n_k}-(x_{n_k}'+\|z_{n_k}\|u_0)\|\end{aligned}$$

$$\geqslant\frac{\rho_{n_k}}{\left(1+\frac{1}{n_k}\right)\rho_{n_k}}\geqslant\frac{1}{2}.$$

上式显然与$\lim\limits_{k\to\infty}u_{n_k}=u_0$矛盾. 这个矛盾说明$\{z_n\}$有界. 再由$T$是紧算子这一事实,存在$\{z_n\}$的子序列$\{z_{n_l}\}$使$\{Tz_{n_l}\}$收敛. 由等式(11),有$Sz_{n_l}=y_{n_l}$,于是

$$z_{n_l}=Sz_{n_l}+Tz_{n_l}=y_{n_l}+Tz_{n_l}.$$

由于$\{Tz_{n_l}\}$、$\{y_{n_l}\}$均收敛,因此$\{z_{n_l}\}$也收敛,记其极限为$z_0$. 在等式$z_{n_l}=y_{n_l}+Tz_{n_l}$中,令$l\to\infty$,得

$$z_0=y_0+Tz_0.$$

故$y_0=z_0-Tz_0$, 这表明$y_0\in\mathfrak{R}$. 因此$\mathfrak{R}=\overline{\mathfrak{R}}$, $\mathfrak{R}$是闭的. 证毕.

**注1** 从定理7.9的证明过程可以看出,当$E$是赋范线性空间时,定理的结论仍真.

**注2** 从定理7.9的证明过程还可以看出,如果$y_n=(I-T)x_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$且$\{y_n\}$收敛,则可以从$\{x_n\}$出发作出一个有界点列$\{z_n\}$,使$y_n=(I-T)z_n$. 而从$\{z_n\}$中则可取出一个收敛的子序列$\{z_{n_l}\}$. 于是我们不妨假设定$\{x_n\}$本身就是有界的,且从$\{x_n\}$中可取出一个收敛的子序列. 这一事实,后面还要用到.

在以后的定理中,需要用到元素与线性泛函直交的概念,现在先介绍这一概念.

设$E$是赋范线性空间,$x\in E$,$f\in E^*$. 如果$f(x)=0$,则称$x$与$f$直交,记为$x\perp f$. 设$A$是$E$的一个子集,如果$f\in E^*$与$A$中的一切元直交,则称$f$与$A$直交,记为$f\perp A$. 设$B$是$E^*$的一个子集,如果$x\in E$与$B$中的一切元直交,则称$x$与$B$直交,记为$x\perp B$. 如果$A\subset E$中的一切元与$B\subset E^*$中的一切元直交,则称$A$与$B$直交,记为$A\perp B$.

**定理7.10** 设$T$是$E$上的紧算子,则下列结论成立:

(i) 对于给定的 $y\in E$ 及给定的复数 $\lambda\neq 0$，方程

$$(\lambda I-T)x=y \tag{14}$$

有解的充分必要条件是 $y$ 与算子 $\lambda I^*-T^*$ 的零空间 $\mathfrak{N}^*$ 直交，这里 $I^*$表 $E^*$ 上的单位算子；

(ii) 对于给定的 $g\in E^*$ 及给定的复数 $\lambda\neq 0$，方程

$$(\lambda I^*-T^*)f=g \tag{15}$$

有解的充分必要条件是 $g$ 与算子 $\lambda I-T$ 的零空间 $\mathfrak{N}$ 直交.

**证** 在证明中仍设 $\lambda=1$，于是方程(14)变成

$$(I-T)x=y, \tag{16}$$

方程(15)变成

$$(I^*-T^*)f=g. \tag{17}$$

(i) 的必要性. 设方程(16)有解 $x$，则对任一 $f\in\mathfrak{N}^*$，有

$$\begin{aligned}f(y)&=f(x-Tx)=f(x)-f(Tx)\\&=f(x)-(T^*f)(x)=(f-T^*f)(x)=0,\end{aligned}$$

故 $y$ 与 $\mathfrak{N}^*$ 直交.

(i) 的充分性. 设 $y\in E$ 且 $y\perp\mathfrak{N}^*$，$y\neq\theta$. 方程(16) 有解等价于 $y$ 属于 $I-T$ 的值域 $\mathfrak{R}$. 现设 $y\overline{\in}\mathfrak{R}$. 因 $\mathfrak{R}$ 是 $E$ 的闭子空间，由 §4 定理 4.2 推论 2，有 $E$ 上的有界线性泛函 $f_0$ 满足

$$f_0(y)=\|y\|,\quad \|f_0\|=1;\quad 对任何\ z\in\mathfrak{R},\ f_0(z)=0.$$

$f_0(z)=0\,(z\in\mathfrak{R})$ 表明对一切 $x\in E$，有 $f_0(x-Tx)=0$，就是说对一切 $x\in E$，有 $(f_0-T^*f_0)(x)=0$，故 $f_0-T^*f_0=\theta$. 因此 $f_0\in\mathfrak{N}^*$. 已知 $y$ 与 $\mathfrak{N}^*$ 直交，故 $f_0(y)=0$，与 $f_0(y)=\|y\|\neq 0$ 矛盾，这个矛盾说明 $y\in\mathfrak{R}$，故方程(16)有解. (i)全部证毕.

(ii)的必要性. 设方程(17)有解 $f$，则对任一 $x\in\mathfrak{N}$，有

$$g(x)=(f-T^*f)(x)=f(x-Tx)=0,$$

故 $g$ 与 $\mathfrak{N}$ 直交.

(iii)的充分性. 设 $g\in E^*$且 $g\perp\mathfrak{N}$，$g\neq\theta$. 任取 $y\in\mathfrak{R}$，则有 $x\in$

$E$使 $y=(I-T)x$. 在 $\mathfrak{N}$ 上定义泛函 $f_0$:

$$f_0(y)=g(x). \tag{18}$$

需要证明 $f_0(y)$ 由 $y$ 唯一确定. 设另有 $x'\in E$ 使 $y=(I-T)x'$, 于是 $x-x'\in\mathfrak{N}$因 $g$ 与 $\mathfrak{N}$ 直交, 故 $g(x-x')=0$, 即 $g(x)=g(x')$. 所以不论用 $g(x)$或 $g(x')$作为 $f_0(y)$的值, 其结果相同, 故 $f_0(y)$由 $y$ 唯一确定.

现证 $f_0$ 是 $\mathfrak{R}$ 上的连续线性泛函. $f_0$ 的线性是明显的. 只需证 $f_0$ 连续. 为此又只需证 $f_0$ 在原点连续. 设 $\{y_n\}\subset\mathfrak{R}$ $(n=1,2,3,\cdots)$收敛于 $\theta$. 由定理 7.9 后面的注 2, 可取有界点列$\{x_n\}\subset E$ $(n=1,2,3,\cdots)$使 $y_n=(I-T)x_n$ 且从$\{x_n\}$中可取出一个收敛的子列$\{x_{n_k}\}$. 设$\{x_{n_k}\}\to x_0$. 在 $y_{n_k}=(I-T)x_{n_k}$ 中令 $k\to\infty$, 可得 $\theta=(I-T)x_0$, 这表明 $x_0\in\mathfrak{N}$. 已知 $g\perp\mathfrak{N}$, 故$g(x_0)=0$. 于是

$$f_0(y_{n_k})=g(x_{n_k})\to g(x_0)=0 \quad (k\to\infty).$$

如果考察 $\{f_0(y_n)\}$ 的任意一个子序列, 由以上的论证可知, 从这个子序列中必可取出一个"更小的"收敛于 0 的子序列, 由此可以证明$\{f_0(y_n)\}$本身必收敛于 0, 否则将引出矛盾. 这样我们便证明了 $f_0$ 在原点连续. 因此 $f_0$ 连续.

由 Hahn-Banach 定理, $f_0$ 可以延拓到 $E$ 上且保持范数不变, 延拓后的泛函仍用 $f_0$ 表示. 今证 $f_0$ 就是方程 (17) 的解. 任取 $x\in E$, 有

$$(f_0-T^*f_0)(x)=f_0(x-Tx)=g(x).$$

故 $f_0-T^*f_0=g$, $f_0$ 是(17)的解. 定理全部证毕.

**定理 7.11** **设$T$是$E$上的紧算子, $\lambda\neq0$. 则 $\lambda I-T$ 为满映射的充分必要条件是 $\lambda I-T$ 为单映射. 因此当这两个条件之一满足时, $\lambda$ 是 $T$ 的正则值.**

**证** 仍设 $\lambda=1$ 并记 $S=I-T$. 先设 $S$ 是满映射. 令

$$\mathfrak{N}_n=\{x: S^n x=\theta\}\ (n=1,2,3,\cdots). \tag{19}$$

由于 $S^n$ 有界，故每个 $\mathfrak{N}_n$ 都是 $E$ 的闭子空间．由(19)，有

$$\mathfrak{N}_1 \subset \mathfrak{N}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{N}_n \subset \cdots.$$

现设 $S$ 不是单映射，于是 $\mathfrak{N}_1 \neq \{\theta\}$．任取 $x_1 \in \mathfrak{N}_1, x_1 \neq \theta$．因 $S$ 是满映射，存在 $x_2 \in E$ 使 $Sx_2 = x_1$．对 $x_2$，存在 $x_3$ 使 $Sx_3 = x_2$，依此类推，得到点列

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots,$$

其中 $x_n = Sx_{n+1} (n=1, 2, 3, \cdots)$．由于 $x_1 \neq \theta$，故 $x_2 \overline{\in} \mathfrak{N}_1$，但 $S^2 x_2 = Sx_1 = \theta$，故 $x_2 \in \mathfrak{N}_2$，因此 $\mathfrak{N}_1$ 是 $\mathfrak{N}_2$ 的真子空间．依此类推，可以证明 $\mathfrak{N}_n$ 是 $\mathfrak{N}_{n+1}$ 的真子空间$(n=1, 2, 3, \cdots)$．

由第七章 §2 Riesz 引理，可取 $y_{n+1} \in \mathfrak{N}_{n+1} \backslash \mathfrak{N}_n$，使

$$\|y_{n+1}\| = 1, \quad d(y_{n+1}, \mathfrak{N}_n) = \inf_{y \in \mathfrak{N}_n} \|y_{n+1} - y\| \geqslant \frac{1}{2} \quad (n=1, 2, 3, \cdots).$$

由于当 $m < n$ 时，$\mathfrak{N}_m \subset \mathfrak{N}_{n-1}$，因此 $Ty_m = y_m - Sy_m \in \mathfrak{N}_{n-1}$，又因 $Sy_n \in \mathfrak{N}_{n-1}$ 所以当 $m < n$ 时，

$$\|Ty_n - Ty_m\| = \|y_n - Sy_n - Ty_m\| \geqslant \frac{1}{2}.$$

由此可见，$\{Ty_n\}$ 不存在收敛的子列，与 $T$ 是紧算子矛盾．因此 $S = I - T$ 是单映射．

现在设 $S = I - T$ 是单映射．由定理 7.10(ii)，方程 $(I^* - T^*)f = g$ 对任何 $g \in E^*$ 都有解，因此 $I^* - T^*$ 是满映射．将上段的论证运用于算子 $I^* - T^*$，可知 $I^* - T^*$ 是单映射．然后再由定理 7.10(i)，方程 $(I - T)x = y$ 对任何 $y \in E$ 有解，因此 $I - T$ 是满映射．

根据以上的论证，当 $S = I - T$ 是满映射时，它必为单映射，而当它是单映射时则必是满映射．因此不论那一种情形，$S = I - T$ 必为双映射．由逆算子定理可知，$S = I - T$ 有有界逆算子．证毕．

由定义 6.1 后面的性质 1° 可知，对任一 $T \in \mathscr{B}(E)$，有 $\sigma(T) = \sigma(T^*)$．若 $T$ 为紧算子，这个结论当然成立．现在进一步讨论当

$T$ 为紧算子时，$\sigma(T)$（及$\sigma(T^*)$）的其他一些特性.

**定理 7.12　设$T$是$E$上的紧算子. 则**

**(i) 任何复数 $\lambda\neq0$ 或者是 $T(T^*)$ 的正则值或者是 $T(T^*)$ 的特征值,二者必居其一. 当 $\lambda\neq0$ 是$T(T^*)$的特征值时，对应的特征向量空间是有限维的;**

**(ii) $T(T^*)$的谱或者是有限集或者是仅以零为聚点的可列集;**

**(iii) 设 $\lambda$、$\mu$ 分别是 $T$、$T^*$的特征值且 $\lambda\neq\mu$. 则 $T$ 对应于 $\lambda$ 的特征向量空间与 $T^*$ 对应于 $\mu$ 的特征向量空间相互直交.**

**证**　对于(i),(ii)两个结论，只需就 $T$ 来证明，$T^*$ 的情形完全一样.

(i) 设 $\lambda\neq0$ 不是 $T$ 的正则值，由定理 7.11 $(\lambda I-T)x=\theta$ 必有非零解,故 $\lambda$ 是 $T$ 的特征值. 设 $T$ 对应于 $\lambda$ 的特征向量空间是 $L$. 在 $L$ 中任取有界集 $A$. 因对任一 $x\in L$,有 $Tx=\lambda x$, 故 $T(A)=\lambda A$. 由于 $T$ 是紧算子,故 $T(A)$列紧,于是 $A$ 也列紧. 由第七章定理 2.2 可知,$L$ 是有限维的. (i)证毕.

(ii) 设 $\sigma(T)$不是有限集，且设 $\sigma(T)$有不等于零的聚点 $\lambda_0$. 在 $\sigma(T)$ 中取可列个互不相同的点 $\lambda_n(n=1,2,3,\cdots)$使 $\{\lambda_n\}\to\lambda_0$. 因 $\lambda_0\neq0$, 可设所有的 $\lambda_n\neq0$. 由本定理(i)，每个 $\lambda_n$ 都是 $T$ 的特征值，取对应的特征向量 $x_n$. 令 $L_n$ 是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$张成的子空间. 作为有限维空间，每个 $L_n$ 都是闭的. 因 $\lambda_n(n=1,2,3,\cdots)$互不相同,由定理 6.2, $\{x_n\}$ 是线性无关的，故 $L_{n-1}\neq L_n$. 又显然有 $L_{n-1}\subset L_n$,故由第七章§2 Riesz 引理,可取 $y_n\in L_n$ 使

$$\|y_n\|=1,\quad \inf_{y\in L_{n-1}}\|y_n-y\|\geqslant\frac{1}{2}\quad (n=2,3,4,\cdots).$$

因$y_n\in L_n$,可设 $y_n=\alpha_1^{(n)}x_1+\cdots+\alpha_n^{(n)}x_n$, 于是

$$\lambda_n y_n-Ty_n=\alpha_1^{(n)}(\lambda_n-\lambda_1)x_1+\cdots+\alpha_{n-1}^{(n)}(\lambda_n-\lambda_{n-1})x_{n-1}\in L_{n-1},$$

再注意到当 $m<n$ 时，$Ty_m=\alpha_1^{(m)}\lambda_1x_1+\cdots+\alpha_m^{(m)}\lambda_mx_m\in L_m\subset L_n$.
因此

$$\lambda_ny_n-Ty_n+Ty_m\in L_{n-1}.$$

故

$$\|Ty_n-Ty_m\|=\|\lambda_ny_n-(\lambda_ny_n-Ty_n+Ty_m)\|$$
$$=|\lambda_n|\|y_n-\frac{1}{\lambda_n}(\lambda_ny_n-Ty_n+Ty_m)\|\geqslant\frac{|\lambda_n|}{2}.$$

由于 $\lambda_n\to\lambda_0\neq0$，故存在 $\alpha_0>0$，对任意的 $m$、$n$，当 $m<n$ 而 $n$ 充分大时，有

$$\|Ty_n-Ty_m\|\geqslant\alpha_0. \tag{20}$$

另一方面，由 $\|y_n\|=1$ 及 $T$ 是紧算子可知，$\{Ty_n\}$ 列紧因而有在收敛的子列，这显然与(20)矛盾. 因此 $\sigma(T)$ 是有限集或者是仅以零为聚点的无限集. 当后一情形出现时，$\sigma(T)$ 必为可列集.

(iii) 设 $T$、$T^*$ 对应于 $\lambda$、$\mu$ 的特征向量空间分别为 $L_\lambda$、$L_\mu^*$. 任取 $x_0\in L_\lambda$，$f_0\in L_\mu^*$. 因 $\lambda\neq\mu$，$\lambda$、$\mu$ 中至少有一个不等于零，不妨设 $\lambda\neq0$. 于是

$$f_0(x_0)=\frac{1}{\lambda}f_0(\lambda x_0)=\frac{1}{\lambda}f_0(Tx_0)=\frac{1}{\lambda}(T^*f_0)(x_0)$$
$$=\frac{\mu}{\lambda}f_0(x_0).$$

因 $\frac{\mu}{\lambda}\neq1$，故 $f_0(x_0)=0$. $L_\lambda$ 与 $L_\mu^*$ 直交. 证毕.

下面进一步证明 $T$ 及 $T^*$ 对应于同一特征值 $\lambda\neq0$ 的特征向量空间有相同的维数. 由于证明比较困难，初次学习时可以略去，现先作若干准备. 准备过程中出现的引理 1 、引理 2 及引理 3 本身亦有独立的意义而且不必假定其中的空间 $E$ 是复的.

**引理 1** 设 $E$ 为赋范线性空间，$E$ 中的点集 $\{x_1, x_2,\cdots, x_n\}$ 线性独立，则存在 $E$ 上的一族有界线性泛函 $f_1, f_2,\cdots, f_n$ 使得

$$f_k(x_l)=\begin{cases}1, 若\ k=l;\\0, 若\ k\neq l.\end{cases}\quad (k、l=1,2,\cdots,n).$$

**证** 对于 $k=1, 2, \cdots, n$，令 $Y_k=\mathrm{span}\{x_1, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots, x_n\}$. 因 $Y_k$ 是有限维的，故为 $E$ 的闭子空间. 由 $x_k \overline{\in} Y_k$ 可知，存在 $E$ 上的有界线性泛函 $f_k$ 使 $f_k(x_k)=1$，而 $f_k$ 在 $Y_k$ 上为零. 因此 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 满足引理的要求. 证毕.

**引理 2** **设 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是赋范线性空间 $E$ 上的一族有界线性泛函，则 $E$ 上任一于 $f_1, f_2\cdots, f_n$ 的零空间的交上为零的有界线性泛函 $f$ 必定是 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 的线性组合.**

**证** 作由 $E$ 到 $\mathbf{R}^n$(或 $\mathbf{C}^n$)的映射 $T$：

$$Tx=(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)). \tag{21}$$

容易证明 $T$ 是由 $E$ 到 $\mathbf{R}^n$(或 $\mathbf{C}^n$) 中的有界线性算子. 线性是显然的，由

$$\|Tx\|=\left(\sum_{k=1}^n |f_k(x)|^2\right)^{1/2}$$

$$\leqslant\left(\sum_{k=1}^n \|f_k\|^2\|x\|^2\right)^{1/2}=\left(\sum_{k=1}^n \|f_k\|^2\right)^{1/2}\|x\|$$

可知 $T$ 有界.

在 $T(E)$ 上定义泛函 $F$ 如下：

$$F(y)=f(x) \quad (y=Tx).$$

需要证明 $F$ 由 $y$ 唯一确定. 设另有 $x'\in E$ 使 $y=Tx'$，于是 $T(x-x')=0$，由 (21) 可知，$f_j(x-x')=0$ 对 $j=1,2,\cdots,n$ 均成立. 由关于 $f$ 的假定可知，$f(x-x')=0$ 即 $f(x)=f(x')$. 因此不论用 $f(x)$ 或 $f(x')$ 作为 $F(y)$ 的值，其结果相同. 故 $F(y)$ 由 $y$ 唯一确定. 由 $F$ 的定义容易看出，$F$ 是线性的. 在 $\mathbf{R}^n$(或 $\mathbf{C}^n$) 中取一子空间 $M$ 使 $\mathbf{R}^n$(或 $\mathbf{C}^n$) $=T(E)\oplus M$. 再令 $F$ 在 $M$ 上等于零，于是 $F$ 可以

很容易地延拓到 $\mathrm{R}^n$(或 $\mathrm{C}^n$)上. 延拓后的线性泛函仍记为 $F$. $F$ 便成为 $\mathrm{R}^n$(或$\mathrm{C}^n$)上的线性泛函. 由第34题可知, 存在数 $c_j(j=1, 2, \cdots, n)$ 使得对一切 $y=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)\in\mathrm{R}^n$(或 $\mathrm{C}^n$), 有

$$F(y)=\sum_{j=1}^{n}c_j\xi_j\left(\text{或}F(y)=\sum_{j=1}^{k}c_j\xi_j\right). \tag{22}$$

任取 $x\in E$, 令 $y=Tx$. 由(21), $f_j(x)$是$y$的第$j$个坐标($j=1, 2, \cdots, n$). 代入(22), 可得

$$f(x)=F(y)=\sum_{j=1}^{n}c_jf_j(x)=\left(\sum_{j=1}^{k}c_jf_j\right)(x).$$

$$\left(\text{或}\quad f(x)=\left(\sum_{j=1}^{k}\bar{c}_jf_j\right)(x)\right).$$

由 $x$ 的任意性可知

$$f=\sum_{j=1}^{k}c_jf_j\left(\text{或}\quad f=\sum_{j=1}^{k}\bar{c}_jf_j\right).$$

即 $f$ 为 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 的线性组合. 证毕.

引理3 设$f_1, f_2, \cdots, f_n$是赋范线性空间$E$上 $n$ 个线性独立的有界线性泛函, 则存在$E$中的元素 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 使得

$$f_k(x_l)=\begin{cases}1, \text{若 } k=l;\\0, \text{若 } k\neq l.\end{cases}\quad (k, l=1, 2, \cdots, n).$$

**证** 当 $n=1$ 时引理显然成立. 今设 $n=k$ 时引理成立. 我们证明当 $n=k+1$ 时引理仍成立. 令 $\mathfrak{N}_{k+1}$ 是 $f_{k+1}$ 的零空间. 则 $f_1, f_2, \cdots, f_k$ 在 $\mathfrak{N}_{k+1}$ 上的限制 $f_1|\mathfrak{N}_{k+1}, f_2|\mathfrak{N}_{k+1}, \cdots, f_k|\mathfrak{N}_{k+1}$ 线性独立. 设不然, 则存在不全为零的数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 使

$$(\alpha_1f_1+\alpha_2f_2+\cdots+\alpha_kf_k)|\mathfrak{N}_{k+1}=\theta.$$

这表明 $\alpha_1f_1+\alpha_2f_2+\cdots+\alpha_kf_k$ 在 $f_{k+1}$ 的零空间 $\mathfrak{N}_{k+1}$ 上为零, 由引理 2, 存在 $\alpha_{k+1}$ 使

$$\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2+\cdots+\alpha_k f_k+\alpha_{k+1} f_{k+1}=\theta.$$

故 $f_1, f_2, \cdots, f_{k+1}$ 线性相关，与假设矛盾. 因此 $f_1|\mathfrak{N}_{k+1}$, $f_2|\mathfrak{N}_{k+1}, \cdots, f_k|\mathfrak{N}_{k+1}$ 线性独立. 由归纳的假设，存在 $\mathfrak{N}_{k+1}$ 中的元素 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 使得

$$f_m(x_l)=(f_m|\mathfrak{N}_{k+1})(x_l)=\begin{cases}1, 若\ m=l\\0, 若\ m\neq l\end{cases}\quad (m、l=1,2,\cdots k).\tag{23}$$

因 $f_1, f_2, \cdots, f_{k+1}$ 线性独立，由引理 2，$f_{k+1}$ 在 $f_1, f_2, \cdots, f_k$ 的零空间的交上不为零，因此在这个交中存在元素 $x_{k+1}$ 使 $f_{k+1}(x_{k+1})=1$. 而 $f_1(x_{k+1})=f_2(x_{k+1})=\cdots=f_k(x_{k+1})=0$. 于是 (23) 式对 $m, l=1,2,\cdots,k+1$ 成立. 证毕.

**定理 7.13** **设 $T$ 是 $E$ 上的紧算子，$\lambda\neq 0$ 是 $T$ 的一个特征值. 则 $T$ 及 $T^*$ 对应于 $\lambda$ 的特征向量空间有相同的维数.**

**证** 用 $L_\lambda$ 表示 $T$ 对应于 $\lambda$ 的特征向量空间，用 $L_\lambda^*$ 表示 $T^*$ 对应于 $\lambda$ 的特征向量空间. 设 $L_\lambda$ 的维数为 $m$，$L_\lambda^*$ 的维数为 $n$，则 $m$、$n$ 均 $\geqslant 1$. 以下设 $m<n$.

令 $\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ 及 $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ 分别为 $L_\lambda$、$L_\lambda^*$ 的一组基. 由引理 1，存在 $E$ 上的有界线性泛函 $g_1, g_2, \cdots, g_m$ 使

$$g_k(x_l)=\begin{cases}1, 若\ k=l\\0, 若\ k\neq l\end{cases}\quad (k、l=1,2,\cdots,m).\tag{24}$$

由引理 3，存在 $E$ 中的元素 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 使

$$f_k(y_l)=\begin{cases}1, 若\ k=l\\0, 若\ k\neq l\end{cases}\quad (k、l=1,2,\cdots,n).\tag{25}$$

作 $E$ 上的线性算子 $S$:

$$Sx=\sum_{l=1}^{m} g_l(x)y_l \quad (x\in E),$$

则 $S$ 是有界的且为有限秩的，于是为紧算子. 又因 $T$ 为紧算子

故 $T+S$ 为紧算子.

现在证明 $\lambda I-(T+S)$ 是单映射. 设 $x_0\in E$ 满足

$$[\lambda I-(T+S)]x_0=\theta.$$

则

$$(\lambda I-T)x_0=Sx_0=\sum_{l=1}^{m}g_l(x_0)y_l. \tag{26}$$

由(25)及(26), 对于 $k=1,2,\cdots,m$, 有

$$f_k[(\lambda I-T)x_0]=\sum_{l=1}^{m}g_l(x_0)f_k(y_l)=g_k(x_0).$$

注意到 $f_k$ 是 $T^*$ 对应于 $\lambda$ 的一个特征向量, 故

$$f_k[(\lambda I-T)x_0]=[(\lambda I^*-T^*)f_k](x_0)=0.$$

于是

$$g_k(x_0)=0\quad(k=1,2,\cdots,m). \tag{27}$$

代入(26)的右端, 可得 $(\lambda I-T)x_0=0$. 这表明 $x_0\in L_\lambda$. 因 $\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$ 是 $L_\lambda$ 的一个基, 存在数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$, 使 $x_0=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_mx_m$. 由(24)可得 $\alpha_k=g_k(x_0)$, 再由(27)可知 $\alpha_k=0$. 因此 $x_0=\theta$. 这表明 $\lambda I-(T+S)$ 是单映射. $T+S$ 是紧算子, 由定理 7.11, $\lambda I-(T+S)$ 是满映射. 故对 $E$ 中的元素 $y_{m+1}$, 有 $x\in E$ 使 $[\lambda I-(T+S)]x=y_{m+1}$. 于是由(25)及 $f_{m+1}$ 为 $T^*$ 对应于 $\lambda$ 的一个特征向量, 有

$$\begin{aligned}1=f_{m+1}(y_{m+1})&=f_{m+1}([\lambda I-(T+S)]x)\\&=f_{m+1}[(\lambda I-T)x]-f_{m+1}(Sx)\\&=[(\lambda I^*-T^*)f_{m+1}](x)\\&\quad-\sum_{l=1}^{m}g_l(x)f_{m+1}(y_l)=0.\end{aligned}$$

矛盾, 这个矛盾说明 $m<n$ 不可能成立. 故 $m\geqslant n$.

注意，$\lambda$ 也是$T^{**}$的特征值. 设 $L_\lambda^{**}$是 $T^{**}$对应于$\lambda$的特征向量空间，设它的维数为$p$. 由以上的论证可知，$p\leqslant n$.

于是 $p\leqslant n\leqslant m$. 但 $m\leqslant p$ 显然成立. 故 $m=n=p$. 证毕.

综合定理 7.10.—定理 7.13，得到紧算子的Riesz-Schauder理论，我们将它总结成下面的定理.

**定理 7.14** 设$T$是$E$上的紧算子，则

(i) $\sigma(T)$（即$\sigma(T^*)$）或者是有限集或者是以零为聚点的可列集，$\sigma(T)$中任一不为零的数都是$T$及$T^*$的特征值，当$E$为无限维时，则 0 必属于$\sigma(T)$及$\sigma(T^*)$；

(ii) $T$及$T^*$对应于同一非零特征值的特征向量空间有相同的维数且维数有限；

(iii) $T$、$T^*$对应于不同特征值的特征向量空间相互直交；

(iv) 设$\lambda\neq 0$是任一复数，则$\lambda$是$T$的正则值的充分必要条件是下列两性质之一成立：(a)$\lambda I-T$是单映射，(b)$\lambda I-T$是满映射；

(v) 设$\lambda\neq 0$是$T$的特征值（于是也是$T^*$的特征值），则方程

$$(\lambda I-T)x=y$$

有解的充分必要条件是$y$与$\lambda I^*-T^*$的零空间直交，而方程

$$(\lambda I^*-T^*)f=g$$

有解的充分必要条件是$g$与$\lambda I-T$的零空间直交.

在这一节中，我们系统地研究了紧算子，获得了比较整齐的理论，希望读者注意：

1° $\mathscr{B}(E,E_1)$中全部紧算子构成的集合在$\mathscr{B}(E, E_1)$中按算子范数导出的拓扑是闭子空间（这里设$E_1$是 Banach空间）. 如果考察$\mathscr{B}(E)$中的全部紧算子构成的集合，那么这个集合也是$\mathscr{B}(E)$中的一个闭子空间（这里则需设$E$为Banach 空间）. 这个闭子空间

还有许多特性，由于已超出本书范围，故从略；

2° 紧算子的共轭算子也是紧的，这一性质的重要性在定理7.14中已充分显示出来；

3° 定理7.14总结了紧算子的谱的主要特性，这些特性之所以成立，关键原因在于紧算子将有界集映成列紧集.

## §8 非线性泛函分析初步

非线性泛函分析的历史可以追溯到古典变分学. 古典变分学中重要的课题是求定义在函数空间上以积分形式出现的泛函的极大或极小值. 这是一类非线性问题. 此外，物理学、力学以及工程技术中出现的问题大都是非线性微分方程、非线性积分方程以及非线性积分微分方程. 因此从泛函分析的角度来研究非线性问题就成为非常必要的了. 早在本世纪卅年代，M. Fréchet 在 Cantor 集合论的基础上建立了无限维空间上的分析学，从而奠定了非线性泛函分析的基础. 现在，非线性泛函分析已经与拓扑学等分支有机地结合起来成为解决各类非线性问题强有力的工具.

这一节的目的在于介绍非线性泛函分析几个最基本的内容，主要包括 Gâteaux 导数、Fréchet 导数、隐函数存在定理以及一类特殊泛函的极值等.

### 8.1 Gâteaux 导数

在这一段以及下一段中我们将分别介绍两种常用的导数，一种是Gâteaux 意义下的导数，它是古典分析中方向导数与变分学中弱变分概念的自然推广. 它的好处是要求条件较少，甚至不必要求映射连续，因此适用范围较广；另一种是 Fréchet 意义下的强导数，它是古典分析中全微分与变分学中强变分概念的自然推广. 它的意义在于能借助线性算子去局部地逼近非线性算子，因而能

将非线性问题线性化.

在本节中,如不作特别声明,均设 $E$、$E_1$ 等等为实赋范线性空间.

**定义 8.1** 设 $\Omega$ 是 $E$ 中的一个开集,$F$ 是由 $\Omega$ 到 $E_1$ 中的映射,$x\in\Omega$,$h\in E$ 都是给定的.如果在范数意义下,极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{F(x+th)-F(x)}{t} \tag{1}$$

存在,则称它为 $F$ 在 $x$ 处沿方向 $h$ 的弱微分或称它为沿方向 $h$ 的 Gâteaux 意义下的微分,记为 $DF(x,h)$.如果对每个 $h\in E$,弱微分 $DF(x,h)$ 均存在,则称 $F$ 在 $x$ 处弱可微或称 $F$ 在 $x$ 处按Gâteaux 意义可微.

对于弱微分,比较常用的是下面的特殊情形.

**定义 8.2** 设 $E$、$E_1$ 及 $F$ 同定义 8.1,$x\in\Omega$ 是给定的.如果 $F$ 在 $x$ 处弱可微且存在由 $E$ 到 $E_1$ 的有界线性算子,记为 $DF(x)$,使得

$$DF(x,h)=DF(x)h, \tag{2}$$

则称 $F$ 在 $x$ 处线性弱可微而称 $DF(x)$ 是 $F$ 在 $x$ 处的弱导算子或 Gâteaux 导算子.

如果 $F$ 在 $\Omega$ 中的每一点处弱可微,则称 $F$ 在 $\Omega$ 中弱可微.如果 $F$ 在 $\Omega$ 中的每一点处线性弱可微,则称 $F$ 在 $\Omega$ 中线性弱可微.弱导算子 $DF(x)$ 有时也称为弱导数或 Gâteaux 导数.

**例 1** 设 $T\in\mathscr{B}(E,E_1)$.则 $T$ 作为由 $E$ 到 $E_1$ 中的映射在 $E$ 中的每一点处都是线性弱可微的而且弱导数恒等于 $T$.

**证** 由定义 8.1,对任一 $x\in E$,

$$DT(x,h)=\lim_{t\to 0}\frac{T(x+th)-Tx}{t}=Th.$$

再由定义 8.2 可知,$T$ 在 $E$ 中的每一点处都有弱导数而且弱导数恒为 $T$.

**例 2** 设 $H$ 是实 Hilbert 空间，在 $H$ 上考察泛函 $f(x)=\|x\|^2$ $(x\in H)$ 的弱微分。

**解** 根据定义 8.1，对任一 $x\in H$，有

$$\begin{aligned}Df(x,h)&=\lim_{t\to 0}\frac{\|x+th\|^2-\|x\|^2}{t}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{\|x\|^2+2t(x,h)+t^2\|h\|^2-\|x\|^2}{t}\\&=2(x,h).\end{aligned}$$

再由定义 8.2 可知，$f$ 在 $H$ 中的每一点 $x$ 处都有弱导数而且弱导数等于 $2x$。

**例 3** 考察二元函数（在 $\mathbb{R}^2$ 中）

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x_1^3+x_2^3}{x_1^2+x_2^2}, & \text{当 } x=(x_1,x_2)\neq(0,0)\text{ 时；}\\ \quad , & \text{当 } x=(x_1,x_2)=(0,0)\text{ 时.}\end{cases}$$

则 $f$ 在点 $x_0=(0,0)$ 处沿方向 $h=(h_1,h_2)$ 的弱微分是

$$\begin{aligned}Df(x_0,h)&=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\frac{t^3(h_1^3+h_2^3)}{t^2(h_1^2+h_2^2)}=\frac{h_1^3+h_2^3}{h_1^2+h_2^2},\end{aligned}$$

它关于 $h$ 显然不是线性的。

例 3 说明，即使存在弱微分，但线性弱微分未必存在。

对于实赋范线性空间 $E$ 中的元素 $x$、$h$，集合

$$L=\{x+th:\ 0\leqslant t\leqslant 1\}$$

称为 $E$ 中的线段。弱微分具有下述定理中所列的各项性质。

**定理 8.1** 设 $E$、$E_1$ 均为实赋范线性空间。

(i) **中值定理：设 $f$ 是定义在某一包含线段 $L$ 的开集 $\Omega\subset E$ 上的泛函，且在 $L$ 上的每一点处都有弱微分，则存在 $t_0$：$0<t_0<1$ 使**

$$f(x+h)-f(x)=Df(x+t_0h,h);\tag{3}$$

(ii) 设$F$是定义在某一包含线段$L$的开集$\Omega\subset E$上而值域包含在$E_1$中的映射，且$F$在$L$上的每一点处沿方向$h$有弱微分，则存在$t_0$：$0<t_0<1$使

$$\|F(x+h)-F(x)\|\leqslant\|DF(x+t_0h,h)\|;\tag{4}$$

(iii) 设$F$除了满足(ii)中的各项条件外，再设$E_1$是Banach空间，$DF(x+th,h)$关于$t\in[0,1]$是连续的，则

$$F(x+h)-F(x)=\int_0^1 DF(x+th,h)dt,\tag{5}$$

上式右端是 Riemann 意义下的向量值函数的积分.

**证** (i) 令$\varphi(t)=f(x+th)$ $(t\in[0,1])$. 由$f$的假定，$\varphi$在$[0,1]$上处处有导数，由古典分析中的微分中值定理，存在$t_0$：$0<t_0<1$，使$\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(t_0)$. 由$\varphi(1)=f(x+h)$，$\varphi(0)=f(x)$，$\varphi'(t_0)=Df(x+t_0h,h)$可知(3)成立.

(ii) 由定理4.2推论1，对$E_1$中的元素$F(x+h)-F(x)$，存在$g\in E_1^*$，使$\|g\|=1$且

$$g[F(x+h)-F(x)]=\|F(x+h)-F(x)\|.\tag{6}$$

令$\varphi(t)=g[F(x+th)]$. 仍由古典分析中的微分中值定理，存在$t_0$：$0<t_0<1$，使$\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(t_0)$. 由$\varphi(1)=g[F(x+h)]$，$\varphi(0)=g[F(x)]$，$\varphi'(t_0)=g[DF(x+t_0h,h)]$及(6)可知

$$\begin{aligned}\|F(x+h)-F(x)\|&=g[DF(x+t_0h,h)]\\&\leqslant\|DF(x+t_0h,h)\|.\end{aligned}$$

因此(4)成立.

(iii) 由假设，$DF(x+th,h)$关于$t\in[0,1]$连续. 再由第六章定理4.8推论1，$DF(x+th,h)$关于$t\in[0,1]$一致连续. 又因$E_1$是Banach 空间，因此下面的 Riemann 和

$$\sum_{j=1}^{k}DF(x+t_jh,h)\Delta t_j$$

当$\delta=\max\{\Delta t_j: 1\leqslant j\leqslant n\}\to 0$时，收敛于$\int_0^1 DF(x+th,h)dt$. 另一方面，对任一$g\in E_1^*$，$\varphi(t)=g[F(x+th)]$是$t\in[0,1]$的连续可微函数，且$\varphi'(t)=g[DF(x+th,h)]$. 因此

$$
\begin{aligned}
g[F(x+h)-F(x)] &= \varphi(1)-\varphi(0)\\
&=\int_0^1 \varphi'(t)dt=\int_0^1 g[DF(x+th,h)]dt\\
&=g\left[\int_0^1 DF(x+th,h)dt\right].
\end{aligned}
$$

由$g$的任意性可知(5)成立. 证毕.

### 8.2 Fréchet 导数

这一段讨论 Fréchet 意义下的导数，仍设$E$、$E_1$均为实赋范线性空间.

**定义 8.3** 设$\Omega$是$E$中的一个开集，$F$是由$\Omega$到$E_1$中的映射，$x\in\Omega$是给定的. 如果存在由$E$到$E_1$的有界线性算子$T$，使得

$$
\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|F(x+h)-F(x)-Th\|}{\|h\|}=0, \tag{7}
$$

则称$F$在$x$处强可微或称$F$在$x$处按Fréchet 意义可微，而称$Th$为$F$在$x$处的强微分，记为$dF(x,h)$，称$T$为$F$在$x$处的强导算子或强导数，记为$dF(x)$或$F'(x)$. 如果$F$在$\Omega$中的每一点处都是强可微的，则称$F$在$\Omega$中强可微. 而$dF(x)=F'(x)$则是从$\Omega$到$\mathscr{B}(E,E_1)$中的一个映射，称它为$F$的导映射.

除了已知$x\in\Omega$外，再设$x+h\in\Omega$. 令

$$
\omega(x,h)=F(x+h)-F(x)-Th, \tag{8}
$$

由(7)，$\omega(x,h)$满足

$$
\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|\omega(x,h)\|}{\|h\|}=0. \tag{9}
$$

(8)、(9)可以合并写成：

$$
F(x+h)-F(x)-Th=o(\|h\|)\quad(x,x+h\in\Omega). \tag{10}
$$

(10)式是$F$在$x$处强可微的一个等价写法，今后常用到它.

**推论　若$F$在$x\in\Omega$处强可微，则$F$在$x$处连续.**

**证**　当$\|h\|$充分小时，由(10)可得

$$\|F(x+h)-F(x)\|\leqslant(\|T\|+1)\|h\|.$$

故$F$在$x$处连续. 证毕.

**例 4**　设$T\in\mathscr{B}(E,E_1)$, $F(x)=Tx$. 则$F$在$E$中的每一点处是强可微的，且在每一点处的强导数均为$T$.

**例 5**　设$F$是由下列诸函数

$$\begin{cases} y_1=f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ y_2=f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m=f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n) \end{cases}$$

定义的由$\mathbf{R}^n$到$\mathbf{R}^m$中的映射，其中$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_m)\in\mathbf{R}^m$. 由定义 8.3, $F$在$x$处强可微的充分必要条件是对每个$j(j=1,2,\cdots,m)$, $f_j$在$x$处有全微分. 再由古典分析可知，$f_j$在$x$处的全微分具有如下的形式

$$df_j(x,h)=\frac{\partial}{\partial x_1}f_j(x)\,h_1+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_n}f_j(x)\,h_n.$$

因此$F$在$x$处的强导数由等式

$$F'(x)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

给出，它是$F$在$x$处的 Jacobi 矩阵.

现在讨论强微分的几个基本性质.

**定理 8.2　设$E$、$E_1$都是实赋范线性空间，则**

(i) $E$ 中开集 $\Omega$ 上的常映射的导映射恒为零，即若对任何 $x\in\Omega$，都有 $F(x)=y_0\in E_1$，则 $F'(x)=0$ 在$\Omega$中处处成立；

(ii) 有界线性算子的导映射为常映射，即若 $F(x)=Tx$，其中 $T\in\mathscr{B}(E,E_1)$，则 $F'(x)=T$ 在 $E$ 中处处成立；

(iii) 设 $F_1$、$F_2$ 均为由 $E$ 中开集 $\Omega$ 到 $E_1$ 中的映射，且在$x\in\Omega$ 处都是强可微的，则对任意的实数 $\alpha_1,\alpha_2$ 有

$$(\alpha_1F_1+\alpha_2F_2)'(x)=\alpha_1F_1'(x)+\alpha_2F_2'(x).$$

(iv) 现在再设 $E_2$ 也是实赋范线性空间，$F$ 是由$E$ 中的开集 $\Omega$ 到 $E_1$ 中的映射，$H$ 是由 $E_1$ 中的开集 $\Omega_1$ 到 $E_2$ 中的映射，$F(\Omega)\subset\Omega_1$，$F$ 在点 $x\in\Omega$ 处强可微，$H$ 在点 $y=F(x)$ 处强可微. 则复合映射 $H\circ F$ 在点 $x$ 处强可微且

$$(H\circ F)'(x)=H'(y)\cdot F'(x). \tag{11}$$

**证** (i) 是显然的. (ii) 就是例 4. (iii) 也是显然的. 剩下的只需证明 (iv). 任取 $h\in E$, $k\in E_1$，则

$$F(x+h)-F(x)-F'(x)h=o(\|h\|) \quad (x+h\in\Omega), \tag{12}$$

$$H(y+k)-H(y)-H'(y)k=o(\|k\|) \quad (y+k\in\Omega_1). \tag{13}$$

今取 $k=F(x+h)-F(x)$. 由(12)，有

$$k=F'(x)h+o(\|h\|). \tag{14}$$

将 $y=F(x)$, $y+k=F(x+h)$ 代入(13)并利用(14)，得

$$H(F(x+h))-H(F(x))-H'(y)F'(x)h=o(\|h\|),$$

即

$$(H\circ F)(x+h)-(H\circ F)(x)-H'(y)F'(x)h=o(\|h\|).$$

因此 $H\circ F$ 在点 $x$ 处是强可微的，且(11)成立. 证毕.

**定理 8.3** 设 $F$ 是由 $E$ 中开集 $\Omega$ 到 $E_1$ 中的映射，$x\in\Omega$，则 $F$ 在 $x$ 处强可微的充分必要条件是 $F$ 在 $x$ 处线性弱可微且极限

$$\lim_{t\to 0}\left\|\frac{F(x+th)-F(x)}{h}-DF(x)h\right\|=0 \tag{15}$$

关于 $h\in E$, $\|h\|=1$ 一致地成立. 当这一条件满足时, 强导数与弱导数相等: $dF(x)=DF(x)$.

**证** 充分性 任给 $\varepsilon>0$, 由假设, 存在与 $h\in E$, $\|h\|=1$ 无关的 $\delta>0$, 使得当 $|t|<\delta$ 时,

$$\left\|\frac{F(x+th)-F(x)}{t}-DF(x)h\right\|<\varepsilon \quad (x,\ x+th\in\Omega).$$

记 $h'=th$, 上式表明, 当 $\|h'\|<\delta$ 时,

$$\|F(x+h')-F(x)-DF(x)h'\|\leqslant\varepsilon\|h'\|,$$

即

$$F(x+h')-F(x)-DF(x)h'=o(\|h'\|),$$

因此 $F$ 在 $x$ 处强可微且

$$dF(x)=DF(x).$$

必要性 任给 $\varepsilon>0$, 由强可微的定义可知, 存在 $\delta>0$, 使得对任一 $h'\in E$, 当 $\|h'\|<\delta$ 时,

$$\|F(x+h')-F(x)-dF(x)h'\|<\varepsilon\|h'\| \quad (x,x+h'\in\Omega),$$

今任取 $h\in E$, $\|h\|=1$. 对 $|t|<\delta$, 记 $h'=th$, 代入以上不等式, 得

$$\|F(x+th)-F(x)-dF(x)th\|<\varepsilon|t| \quad (因\|h\|=1),$$

于是

$$\left\|\frac{F(x+th)-F(x)}{t}-dF(x)h\right\|<\varepsilon. \tag{16}$$

(16) 对一切 $h\in E$, $\|h\|=1$ 一致地成立. 因此 $F$ 在 $x$ 处弱可微且 (15) 对一切 $h\in E$, $\|h\|=1$ 一致地成立. 证毕.

**推论** 设 $F$ 在 $x\in E$ 的某个邻域内处处存在弱导数 $DF(\cdot)$, 且 $DF(\cdot)$ 在 $x$ 处连续. 则 $F$ 在 $x$ 处强可微且强、弱导数相等:

$$dF(x)=DF(x).$$

**证** 由定理 8.3, 只需证明 (15) 关于 $h\in E$, $\|h\|=1$ 一致地成立. 任意取定 $h\in E$, $\|h\|=1$ 并设 $t>0$. 由定理 4.2 推论 1, 存在

$g\in E_1^*, \|g\|=1$ 使

$$g\left(\frac{F(x+th)-F(x)}{t}-DF(x)h\right)$$
$$=\left\|\frac{F(x+th)-F(x)}{t}-DF(x)h\right\|. \qquad (17)$$

另一方面，由定理 8.1(i)，存在 $\tau$：$0<\tau<t$ 使

$$g\left(\frac{F(x+th)-F(x)}{t}-DF(x)h\right)$$
$$=g(DF(x+\tau h)h-DF(x)h)$$
$$\leqslant\|DF(x+\tau h)-DF(x)\| \quad (因\|g\|=\|h\|=1). \qquad (18)$$

因 $DF(\cdot)$在 $x$ 处连续，故当 $t\to 0$ 时，(18) 中最后一个表达式关于 $h\in E, \|h\|=1$ 一致地趋于零．再由(17)可知

$$\lim_{t\to 0}\left\|\frac{F(x+th)-F(x)}{t}-DF(x)h\right\|=0$$

关于 $h\in E, \|h\|=1$ 一致地成立．由定理 8.3 可知推论成立．证毕．

在古典分析中，求导与求导的逆问题是一个事物的两个方面，有时求导是事物的主要方面，有时求导的逆问题是事物的主要方面．在无限维空间中也有类似的情形．这表明在无限维空间中，求导的逆问题同样是重要的．所谓求导的逆问题，粗略地说，是指给定了映射 $f(\cdot)$，求另一个映射 $F(\cdot)$ 使 $DF(x)=f(x)$ 或 $dF(x)=f(x)$ 对 $f$ 的定义域中的一切 $x$ 成立．

以下设 $E$ 是实赋范线性空间，$E_1$ 是实 Banach 空间．

**定义 8.4** 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 $E$ 中 $n$ 个给定的点($n$为自然数)，称定义在 $t\in[1,n]$上而取值于 $E$ 的抽象函数

$$x(t)=x_j+(t-j)(x_{j+1}-x_j) \text{当 } j\leqslant t\leqslant j+1 (j=1,2,\cdots, n-1) \qquad (19)$$

为连结 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的折线，记为 $L$．若 $x_1=x_n$，则称 $L$ 为封闭折线．

现在假定 $f$ 是定义在折线 $L$ 上而在 $\mathscr{B}(E, E_1)$ 中取值的连续映射. 定义 $f$ 沿折线 $L$ 的积分为

$$\int_L f(x)\,dx=\sum_{j=1}^{n-1}\int_0^1 f(x_j+t(x_{j+1}-x_j))(x_{j+1}-x_j)\,dt,$$

上式右端中每一项是向量值函数的 Riemann 积分.

**定理 8.4** **设 $f$ 为定义在 $E$ 中的凸开集 $\Omega$ 上而在 $\mathscr{B}(E, E_1)$ 中取值的连续映射. 则存在由 $\Omega$ 到 $E_1$ 中的映射 $F$ 使 $f$ 为 $F$ 在 $\Omega$ 中的强导数, 即对任一 $x\in\Omega$, 有 $dF(x)=f(x)$ 的充分必要条件是沿 $\Omega$ 中任何封闭折线 $L$, 有**

$$\int_L f(x)\,dx=0.$$

**证** 必要性 设 $L$ 是位于 $\Omega$ 中的任一封闭折线, 由(19)给出. 对给定的 $j(j=1,2,\cdots,n-1)$, 记 $L_j=\{x_j+t(x_{j+1}-x_j):0\leqslant t\leqslant1\}$. 因 $f(x)=dF(x)=DF(x)$, 由积分的定义可知

$$\begin{aligned}\int_{L_j} f(x)dx&=\int_0^1 f(x_j+t(x_{j+1}-x_j))(x_{j+1}-x_j)\,dt\\&=\int_0^1 DF(x_j+t(x_{j+1}-x_j))(x_{j+1}-x_j)\,dt\\&=F(x_{j+1})-F(x_j),\end{aligned}$$

其中最后一个等式由定理 8.1(iii) 导出. 由于 $L$ 是封闭的, 故

$$\begin{aligned}\int_L f(x)\,dx&=\sum_{j=1}^{n-1}\int_{L_j} f(x)\,dx=\sum_{j=1}^{n-1}[F(x_{j+1})-F(x_j)]\\&=F(x_n)-F(x_1)=0.\end{aligned}$$

充分性 取定 $x_0\in\Omega$, 对于任一 $x\in\Omega$, 作 $F$ 如下:

$$F(x)=\int_0^1 f(x_0+t(x-x_0))(x-x_0)\,dt, \tag{20}$$

则 $F$ 是由 $\Omega$ 到 $E_1$ 的映射. 今证明 $F$ 就是待求的. 由于 $x$ 是 $\Omega$ 的内点, 存在 $\delta>0$, 使当 $0<\tau<\delta$ 时, $x+\tau h\in\Omega$ 对任何 $h\in E$, $\|h\|$

$=1$成立．现在让 $\tau$ 固定且满足$0<\tau<\delta$. 记

$$L_1=\{x_0+t(x-x_0):0\leqslant t\leqslant 1\},L_2=\{x+t\tau h:0\leqslant t\leqslant 1\},$$

则 $L_1$ 是连结 $x_0$、$x$ 的线段，$L_2$ 是连结 $x$ 与 $x+\tau h$ 的线段．再记

$$L_3=\{x_0+t(x+\tau h-x_0),0\leqslant t\leqslant 1\},$$

则 $L_3$ 是连结 $x_0$ 与 $x+\tau h$ 的线段．由假设，$f$ 沿任何封闭折线的积分等于零，故

$$\int_{L_1}f(y)dy+\int_{L_2}f(y)dy=\int_{L_3}f(y)dy$$

即

$$\int_{L_3}f(y)dy-\int_{L_1}f(y)dy=\int_{L_2}f(y)dy.$$

注意，在以上几个积分中，$y$ 表示积分变元，这与古典分析中定积分类似，积分变元可用任何符号表示．由 $F$ 的定义，$F(x+\tau h)$ 是 $f$ 沿 $L_3$ 的积分，$F(x)$ 则是 $f$ 沿 $L_1$ 的积分，再由等式

$$\int_{L_2}f(y)dy=\int_0^1 f(x+t\tau h)\tau h dt$$

可知，

$$\begin{aligned}F(x+\tau h)-F(x)&=\int_0^1 f(x+t\tau h)\tau h dt\\&=\int_0^\tau f(x+th)h dt.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{F(x+\tau h)-F(x)}{\tau}-f(x)h\right\|\\&=\frac{1}{\tau}\left\|\int_0^\tau [f(x+th)-f(x)]h dt\right\|\\&\leqslant\sup_{0\leqslant t\leqslant\tau}\|f(x+th)-f(x)\|\quad(\text{因}\|h\|=1).\end{aligned}$$

由于 $f$ 在 $\Omega$ 内连续，故当 $\tau\to 0$，$\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant\tau}\|f(x+th)-f(x)\|\to 0$ 关于 $h\in E$，$\|h\|=1$ 一致地成立，因此

$$\lim_{\tau\to 0}\left\|\frac{F(x+\tau h)-F(x)}{\tau}-f(x)h\right\|=0$$

关于 $h\in E$, $\|h\|=1$ 一致地成立. 由定理 8.3, 对每个 $x\in\Omega$, $dF(x)$ 存在且 $dF(x)=f(x)$. 证毕.

## 8.3 隐函数定理

古典分析中的隐函数定理在无限维空间中也有相应的推广, 但这不是为推广而推广, 因为无限维空间中的隐函数定理是分歧理论的重要基础, 而后者则是非线性泛函分析中当前的中心课题之一.

**定理 8.5** (隐函数存在定理) 设 $E$、$E_1$、$E_2$ 都是实 Banach 空间, $G$ 是 $E\oplus E_1$ 中的开集, $(x_0, y_0)$ 是 $G$ 中一给定的点, $F$ 是从 $G$ 到 $E_2$ 中的连续映射且满足:

(i) $F(x_0, y_0)=\theta$, $F$ 在 $(x_0, y_0)$ 的某个邻域内强可微;

(ii) $F'_y(x_0, y_0)$ 作为从 $E_1$ 到 $E_2$ 中的有界线性算子有有界的逆算子 $[F'_y(x_0, y_0)]^{-1}$, 而 $F'_y(x, y)$ 在 $(x_0, y_0)$ 处连续.

则存在 $\delta>0$, $\gamma>0$, 当 $\|x-x_0\|\leqslant\delta$ 时, 方程

$$F(x, y)=\theta$$

在 $\|y-y_0\|\leqslant\gamma$ 内存在唯一的连续解 $y=f(x)$ 满足 $y_0=f(x_0)$.

**证** 因 $[F'_y(x_0, y_0)]^{-1}$ 为有界线性算子, 故存在 $M>0$, 使

$$\|[F'_y(x_0, y_0)]^{-1}\|\leqslant M. \tag{21}$$

$F'_y(x, y)$ 在点 $(x_0, y_0)$ 处连续, 故存在 $\delta>0$, $\gamma>0$, 使当 $\|x-x_0\|\leqslant\delta$, $\|y-y_0\|\leqslant\gamma$ 时, 有

$$\|F'_y(x, y)-F'_y(x_0, y_0)\|<\frac{1}{2M}. \tag{22}$$

又因 $F(x, y_0)$ 关于 $x$ 连续且 $F(x_0, y_0)=\theta$, 可设当 $\|x-x_0\|\leqslant\delta$ 时,

$$\|F(x, y_0)\|<\frac{\gamma}{2M}. \tag{23}$$

今证对于每个满足 $\|x-x_0\|\leqslant\delta$ 的元素 $x$, 以 $y$ 为变元的映射

$$\varphi(x,y)=y-[F'_y(x_0,y_0)]^{-1}F(x,y)$$

在$\|y-y_0\|\leqslant\gamma$内存在唯一的不动点. 当$\|y-y_0\|\leqslant\gamma$时, 由(21), (22), 有

$$\begin{aligned}\|\varphi'_y(x,y)\|&=\|I-[F'_y(x_0,y_0)]^{-1}F'_y(x,y)\|\\&\leqslant\|[F'_y(x_0,y_0)]^{-1}\|\|F'_y(x_0,y_0)-F'_y(x,y)\|\\&\leqslant M\frac{1}{2M}=\frac{1}{2}.\end{aligned}\tag{24}$$

由定理8.1(ii)以及强可微必定弱可微这一事实, 当$\|y-y_0\|\leqslant\gamma$时, 由(23)可知

$$\begin{aligned}\|\varphi(x,y)-y_0\|&\leqslant\|\varphi(x,y)-\varphi(x,y_0)\|+\|\varphi(x,y_0)-y_0\|\\&\leqslant\sup_{\|y-y_0\|\leqslant\gamma}\|\varphi'_y(x,y)\|\|y-y_0\|\\&\quad+\|[F'_y(x_0,y_0)]^{-1}\|\|F(x,y_0)\|<\frac{\gamma}{2}+\frac{\gamma}{2}=\gamma.\end{aligned}$$

因此$\varphi(x,\cdot)$将球$\|y-y_0\|\leqslant\gamma$映入其自身. 再由(24)可知, $\varphi(x,\cdot)$在球$\|y-y_0\|\leqslant\gamma$内是压缩的.

由压缩映射原理, $\varphi(x,\cdot)$在球$\|y-y_0\|\leqslant\gamma$内存在唯一的不动点, 记为$y^*$. $y^*$显然与$x$的取法有关, 这里$\|x-x_0\|\leqslant\delta$. 因此$y^*$是$x$的函数, 记$y^*=f(x)$. 由$\varphi$的定义及$\varphi(x, y^*)=y^*$可知, $F(x, y^*)=0$. 即函数$y^*=f(x)$满足方程$F(x, y)=0$. 由$y^*$的唯一性, 当$x=x_0$时, $y^*$显然等于$y_0$, 即$y_0=f(x_0)$.

现在证明$f$在$\|x-x_0\|\leqslant\delta$内连续. 在球$\|x-x_0\|\leqslant\delta$内任取两点$x_1, x_2$. 记$y_j=f(x_j)$ $(j=1,2)$. 因$y_j$满足$\|y_j-y_0\|\leqslant\gamma$ $(j=1,2)$, 由定理8.1(ii)及强可微必定弱可微并利用(24)可知,

$$\|\varphi(x_2,y_1)-\varphi(x_2,y_2)\|\leqslant\frac{1}{2}\|y_1-y_2\|.$$

于是(注意$y_j$为$\varphi(x_j,\cdot)$的不动点)

$$\|y_1-y_2\|=\|\varphi(x_1,y_1)-\varphi(x_2,y_2)\|$$

$$\leqslant\|\varphi(x_1,y_1)-\varphi(x_2,y_1)\|+\|\varphi(x_2,y_1)-\varphi(x_2,y_2)\|$$

$$\leqslant\|\varphi(x_1,y_1)-\varphi(x_2,y_1)\|+\frac{1}{2}\|y_1-y_2\|.$$

因此

$$\|y_1-y_2\|\leqslant 2\|\varphi(x_1,y_1)-\varphi(x_2,y_1)\|,$$

即

$$\|f(x_1)-f(x_2)\|\leqslant 2\|\varphi(x_1,y_1)-\varphi(x_2,y_1)\|.$$

让 $x_1$ 固定，于是 $y_1$ 也固定，由 $\varphi$ 的连续性，当 $x_2\to x_1$ 时，$\|\varphi(x_2,y_1)-\varphi(x_1,y_1)\|\to 0$. 故 $\|f(x_2)-f(x_1)\|\to 0$, $f$ 在 $\|x-x_0\|\leqslant\delta$ 内连续. 证毕.

作为隐函数定理的特例，我们考察反函数定理.

**定理 8.6** （反函数定理） **设 $E$、$E_1$ 均为实 Banach 空间，$\Omega$ 是 $E$ 中的开集，$x_0$ 是 $\Omega$ 中一给定的点，$f$ 是由 $\Omega$ 到 $E_1$ 中的连续映射，记 $y_0=f(x_0)$. $f$ 还满足：**

**(i) $f$ 在 $x_0$ 的某个邻域内强可微；**

**(ii) $f'(x_0)$ 作为由 $E$ 到 $E_1$ 中的有界线性算子有有界的逆算子 $[f'(x_0)]^{-1}$，而 $f'(x)$ 在 $x_0$ 处连续.**

**则存在 $\delta>0,\gamma>0$ 使映射 $y=f(x)$ 在 $\|y-y_0\|\leqslant\delta$ 内存在连续的逆映射 $x=f^{-1}(y)$ 且 $x$ 满足 $\|x-x_0\|\leqslant\gamma$，而 $x_0=f^{-1}(y_0)$.**

**证** 令 $F(x,y)=y-f(x)$，则 $F$ 是由 $E\oplus E_1$ 中的开集 $\Omega\times E_1$ 到 $E_1$ 中的连续映射且满足

(i) $F(x_0,y_0)=\theta$;

(ii) $F'_x(x_0,y_0)=f'(x_0)$ 作为从 $E$ 到 $E_1$ 的有界线性算子有有界逆算子 $[F'_x(x_0,y_0)]^{-1}=[f'(x_0)]^{-1}$，$F'_x(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 处连续.

由定理 8.5 可知，存在 $\delta>0,\gamma>0$，当 $\|y-y_0\|\leqslant\delta$ 时方程

$$F(x,y)=0\ (\text{即 } y=f(x))$$

在 $\|x-x_0\|\leqslant\gamma$ 内存在唯一的连续解 $x=g(y)$ 满足 $x_0=g(y_0)$. $x=$

$g(y)$显然就是映射 $y=f(x)$ 的逆映射，且满足定理中的各项条件. 证毕.

我们举一个例子，说明如何运用隐函数定理求方程的解.

**例6** 设$E$是实 Banach 空间，用 $C_1([0, 1], E)$表示定义在$[0, 1]$上值域包含在$E$中的全部连续可微抽象函数构成的集. 在$C_1([0,1],E)$中定义线性运算及范数如下:

$$(x_1+x_2)(t)=x_1(t)+x_2(t) \quad (x_1, x_2\in C_1([0,1],E));$$

$$(\alpha x)(t)=\alpha x(t) \quad (x\in C_1([0,1],E));$$

$$\|x\|=\max_{t\in[0,1]}\|x(t)\|+\max_{t\in[0,1]}\|x'(t)\| \quad (x\in C_1([0,1],E)).$$

可以证明 $C_1([0,1],E)$按照以上定义的线性运算及范数是一个实 Banach 空间.

现在再设 $f(t,x)$是定义在$[0, 1]\times E$ 上而值域包含在$E$中的连续映射，$f(t,x)$关于 $x$ 是强可微的且 $f'_x(t,x)$在$[0, 1]\times E$ 上连续. 考察下列具有初始条件的微分方程

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x),\ x(0)=x_0. \tag{25}$$

我们的目的是证明(25)的解关于$x_0$连续. (25)等价于积分方程

$$x(t)-x_0-\int_0^t f(\tau,x(\tau))d\tau=0. \tag{26}$$

作映射 $F$:

$$[F(x_0, x)](t)=x(t)-x_0-\int_0^t f(\tau,x(\tau))d\tau.$$

$F(x_0,x)$既与 $x_0\in E$ 有关也与 $x\in C_1([0,1], E)$有关，因此是由 $E\oplus C_1([0,1],E)$到 $C_1([0,1],E)$中的映射，而且连续. 根据关于$f(t,x)$的假定可知，$F(x_0, x)$关于 $x$ 强可微，而且 $F'_x(x_0, x)$在 $E\oplus C_1([0,1],E)$上是连续的. 对于任给的 $h\in C_1([0,1],E)$，经过简单地计算，可以证明

$$[F'_x(x_0,x)h](t)=h(t)-\int_0^t f'_x(\tau,x(\tau))h(\tau)d\tau. \tag{27}$$

因此对于给定的 $x_0\in E$, $x\in C_1([0,1],E)$, $F'_x(x_0,x)$ 是由 $C_1([0,1],E)$ 到 $C_1([0,1],E)$ 的有界线性算子.

下面证明, $F'_x(x_0,x)$ (简记为 $F'_x$) 有有界的逆算子, 也就是说

$$F'_x h=k \tag{28}$$

对任何 $k\in C_1([0,1],E)$ 有唯一的解 $h\in C_1([0,1],E)$. (28) 事实上就是方程

$$h(t)-\int_0^t f'_x(\tau,x(\tau))h(\tau)d\tau=k(t),$$

它等价于关于 $h$ 的线性微分方程

$$\frac{dh(t)}{dt}=f'_x(t,x(t))h(t)+k'(t) \text{ 和 } h(0)=k(0). \tag{29}$$

由于(29) 关于 $h$ 是线性的, 容易证明它存在唯一的解 $h\in C_1([0,1],E)$. 这表明 $F'_x$ 有有界的逆算子. 因此我们找到了使用隐函数定理的一个条件. 于是方程 (25) 的解 $x=x(t,x_0)$, 属于 $C_1([0,1],E)$ 且关于 $x_0$ 连续.

### 8.4 泛函的极值

这一节开始时, 我们就已指出, 非线性泛函分析的历史可以追溯到古典变分学, 而古典变分学中重要的课题是求定义在函数空间上以积分形式出现的泛函的极大或极小值. 这一段的目的便是对泛函的极值作初步探讨.

设 $f$ 是定义在实赋范线性空间 $E$ 上的泛函, 如 $f$ 在 $x\in E$ 处有线性弱微分, 则称 $Df(x)$ 为 $f$ 在 $x$ 处的梯度, 记为 grad $f(x)$. 显然 grad$f(x)\in E^*$.

**定义 8.5** 设 $E$ 是实赋范线性空间, $f$ 是定义在 $E$ 上的实泛函. $M$ 为 $E$ 中一给定的集合, $x_0$ 为 $M$ 中一给定的点. 如果存在 $\delta>0$, 使得当 $x\in M\cap S(x_0,\delta)$ 时, 有

$$f(x_0) \leqslant f(x), \tag{30}$$

则称 $f$ 在 $x_0$ 处达到关于 $x \in M$ 条件下的局部极小，这里 $S(x_0, \delta)$ 表示$E$中以 $x_0$ 为中心以 $\delta$ 为半径的开球.

如果不等式(30)对一切 $x \in S(x_0, \delta)$ 成立，则称 $f$ 在 $x_0$ 处达到无条件局部极小. 这时 $M$ 已不起作用，甚至不必假定 $M$ 存在.

古典分析中极值存在的必要条件，如 Rolle 定理等，对于一般的实赋范线性空间上的泛函仍旧成立.

**定理 8.7** **设 $E$ 是实赋范线性空间，$f$ 是定义在 $E$ 上的实泛函，$x_0 \in E$ 且 $f$ 在 $x_0$ 处是线性弱可微的，那么当 $f$ 在 $x_0$ 处达到无条件局部极小时，必有**

$$Df(x_0) = \theta. \tag{31}$$

**证** 任取 $h \in E$，考察 $t$ 的函数 $\varphi(t) = f(x_0 + th)$. 由假设，$\varphi$在 $t=0$ 处可微且在 $t=0$ 处达到局部极小，由古典分析中的 Rolle 定理可知，$\varphi'(0)=0$. 因 $\varphi'(0) = Df(x_0)h$，故$Df(x_0)h=0$. 由于 $h \in E$ 是任取的，等式(31)成立. 证毕.

为了研究泛函存在极值的充分条件，先引进泛函弱连续及下半弱连续的定义.

**定义 8.6** 设 $E$ 是实赋范线性空间，$M$ 是 $E$ 的子集，$f$ 是定义在 $E$ 上的实泛函，$x \in M$. 如果对 $M$ 中任一弱收敛于 $x$ 的点列 $\{x_n\}$，有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x),$$

则称 $f$ 于 $M$ 中在 $x$ 处弱连续. 如果对 $M$ 中任一弱收敛于 $x$ 的点列 $\{x_n\}$，有

$$\varliminf_{n\to\infty} f(x_n) \geqslant f(x),$$

则称 $f$ 于 $M$ 中在 $x$ 处下半弱连续.

$E$ 中的子集 $M$ 称为弱序列紧的，如果对于 $M$ 中的任一点列

$\{x_n\}$，必存在子列$\{x_{n_k}\}$使$\{x_{n_k}\}$弱收敛于 $M$ 中的一个点.

**定理 8.8　设 $M$ 是 $E$ 中弱序列紧的子集，$f$ 是定义在 $M$ 上的下半弱连续实泛函，则存在 $x_0\in M$ 使 $f(x_0)=\inf\limits_{x\in M}f(x)$，即 $f$ 在 $x_0$ 处达到关于 $x\in M$ 条件下的极小值.**

**证**　记 $c=\inf\limits_{x\in M}f(x)$. 则存在点列$\{x_n\}\subset M$ 使

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=c.$$

因 $M$ 弱序列紧，故存在$\{x_n\}$的子列$\{x_{n_k}\}$弱收敛于 $M$ 中的某个点 $x_0$. 注意到 $f$ 弱下半连续，故

$$c=\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})\geqslant f(x_0).$$

但 $c$ 是下确界，故 $c\leqslant f(x_0)$. 因此 $c=f(x_0)$. 由此可知，$c$ 是有限数且为 $f$ 关于 $x\in M$ 条件下的极小值. 证毕.

自反 Banach 空间有一个重要特性，其中任一有界弱闭集必为弱序列紧的.

**推论 1　设 $E$ 是实自反Banach 空间，$M$ 是 $E$ 中的有界弱闭子集，$f$ 是定义在 $M$ 上的下半弱连续实泛函，则存在 $x_0\in M$ 使 $f(x_0)=\inf\limits_{x\in M}f(x)$.**

**证**　因自反 Banach 空间中的有界弱闭集必为弱序列紧的，由定理 8.8 可知，推论成立.

**推论 2　设 $E$ 是实自反 Banach 空间，$f$ 是定义在 $E$ 上的下半弱连续实泛函. 若 $\lim\limits_{\|x\|\to\infty}f(x)=\infty$，则存在 $x_0\in E$ 使 $f(x_0)=\inf\limits_{x\in E}f(x)$.**

**证**　由假设，存在 $r_0>0$，当 $\|x\|>r_0$ 时

$$f(x)>\inf_{x\in E}f(x). \tag{32}$$

令 $M=\{x:\|x\|\leqslant r_0\}$，则 $M$ 是有界弱闭集. 由 (32) 可知 $\inf\limits_{x\in M}f(x)=\inf\limits_{x\in E}f(x)$. 再由推论 1，存在 $x_0\in M$ 使 $f(x_0)=\inf\limits_{x\in M}f(x)$，于是 $f(x_0)$

$=\inf\limits_{x\in E} f(x)$. 证毕.

在定理 8.8 及其推论中，均假定了泛函 $f$ 是下半弱连续的，为了有效地运用这些结论，需要讨论泛函下半弱连续的判别准则.

**定义 8.7** 设 $E$、$E_1$ 都是实赋范线性空间，$M$ 是 $E$ 的子集，$f$ 为由 $M$ 到 $E_1$ 中的映射，如果 $\overline{f(M)}$ 是 $E_1$ 中的紧集，则称 $f$ 为紧映射.

**定理 8.9** **设 $f$ 是定义在 $E$ 上的线性弱可微实泛函，$\mathrm{grad}f$ 在 $E$ 的每个有界子集上是紧映射，则 $f$ 在 $E$ 上是弱连续的.**

**证** 设 $f$ 在 $E$ 中的某一点 $x_0$ 处不是弱连续的，则存在 $\varepsilon_0>0$ 以及点列 $\{x_n\}\subset E$ 使 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $x_0$ 但

$$|f(x_n)-f(x_0)|\geqslant\varepsilon_0. \tag{33}$$

由中值定理，对每个 $n$，有 $\tau_n: 0<\tau_n<1$，使

$$f(x_n)-f(x_0)=\mathrm{grad}f(x_0+\tau_n(x_n-x_0))(x_n-x_0). \tag{34}$$

记 $x_n'=x_0+\tau_n(x_n-x_0)\ (n=1,2,3,\cdots)$. 因 $\{x_n\}$ 有界，故 $\{x_n'\}$ 也有界. 由假设，$\overline{\{\mathrm{grad}f(x_n')\}_{n=1}^{\infty}}$ 作为 $E^*$ 中的集合是紧的. 因此 $\{\mathrm{grad}f(x_n')\}_{n=1}^{\infty}$ 存在子列收敛于 $E^*$ 中的某一点 $g$. 不失一般性，我们设 $\{\mathrm{grad}f(x_n')\}_{n=1}^{\infty}$ 本身收敛于 $g$. 由 (33) 及 (34)，得

$$\begin{aligned}\varepsilon_0&\leqslant|\mathrm{grad}f(x_n')(x_n-x_0)|\\&\leqslant|g(x_n-x_0)|+\|\mathrm{grad}f(x_n')-g\|\|x_n-x_0\|\to 0.\end{aligned}$$

显然不可能. 因此 $f$ 在 $E$ 上弱连续. 证毕.

现在讨论泛函下半弱连续的条件.

**定义 8.8** 设 $\Omega$ 是 $E$ 中的凸子集，$f$ 是定义在 $\Omega$ 上的实泛函. 如果对任意的 $x_1, x_2\in\Omega$ 以及任意的 $t: 0\leqslant t\leqslant 1$，有

$$f(tx_1+(1-t)x_2)\leqslant tf(x_1)+(1-t)f(x_2), \tag{35}$$

则称 $f$ 是定义在 $\Omega$ 上的凸泛函.

**定理 8.10** **设 $f$ 是定义在 $E$ 中的凸开集 $\Omega$ 上的凸泛函，且 $f$ 在 $\Omega$ 上是线性弱可微的. 则 $f$ 在 $\Omega$ 上为下半弱连续.**

**证** 由不等式(35)，对任意的 $x_1$、$x_2\in\Omega$ 以及任意的 $t$：$0<t<1$，有

$$\frac{f(x_2+t(x_1-x_2))-f(x_2)}{t}=\frac{f(tx_1+(1-t)x_2)-f(x_2)}{t}$$

$$\leqslant\frac{tf(x_1)+(1-t)f(x_2)-f(x_2)}{t}=f(x_1)-f(x_2).$$

令 $t\to0$，有

$$\operatorname{grad}f(x_2)(x_1-x_2)\leqslant f(x_1)-f(x_2). \tag{36}$$

同理

$$\operatorname{grad}f(x_1)(x_2-x_1)\leqslant f(x_2)-f(x_1). \tag{37}$$

(36)与(37)两边分别相加，得

$$[\operatorname{grad}f(x_2)-\operatorname{grad}f(x_1)](x_2-x_1)\geqslant0. \tag{38}$$

今设点列 $\{x_n\}\subset\Omega$ 弱收敛于 $x\in\Omega$. 由中值定理并利用(38)，有 $\tau_n$：$0<\tau_n<1$ 使

$$\begin{aligned}f(x_n)-f(x)&=\operatorname{grad}f(x+\tau_n(x_n-x))(x_n-x)\\&=[\operatorname{grad}f(x+\tau_n(x_n-x))-\operatorname{grad}f(x)](x_n-x)\\&\quad+\operatorname{grad}f(x)(x_n-x)\\&\geqslant\operatorname{grad}f(x)(x_n-x).\end{aligned}$$

因此

$$f(x_n)\geqslant f(x)+\operatorname{grad}f(x)(x_n-x).$$

令 $n\to\infty$，有

$$\varliminf_{n\to\infty}f(x_n)\geqslant f(x).$$

$f$ 在 $\Omega$ 上是下半弱连续的. 证毕.

## 第八章 习 题

§1. §2. §3.

1. 设 $\alpha(\cdot)$ 是定义在$[a,b]$上的函数. 令

$$(Tx)(t)=\alpha(t)x(t)\quad(x\in C[a,b]),$$

则 $T$ 是由 $C[a,b]$ 到其自身的有界线性算子的充分必要条件是 $\alpha(\cdot)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

2. 设 $\alpha(\cdot)$ 是定义在有界可测集 $E$ 上的函数. 令

$$(Tx)(t)=\alpha(t)x(t)\quad(x\in L^2(E)),$$

则 $T$ 是由 $L^2(E)$ 到其身的有界线性算子的充分必要条件是 $\alpha(\cdot)$ 在 $E$ 上可测且本性有界.

3. 设无穷矩阵 $(\alpha_{ij})$ $(i,j=1,2,3,\cdots)$ 满足

$$\sup_j\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_{ij}|<+\infty,$$

则

$$y=Tx:\eta_j=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_{ij}\xi_i$$

其中 $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}$, $y=\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots\}$, 是由 $l^\infty$ 到 $l^\infty$ 中的有界线性算子, 且

$$\|T\|=\sup_j\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_{ij}|.$$

4. 设 $K(t,s)$ 是 $a\leqslant t\leqslant b$, $a\leqslant s\leqslant b$ 上的可测函数, $\int_a^b|K(t,s)|dt$ 对 $[a,b]$ 上几乎所有的 $s$ 存在, 且作为 $s$ 的函数是本性有界的, 令

$$y=Tx:y(t)=\int_a^b K(t,s)x(s)ds,$$

则 $T$ 是 $L[a,b]$ 到其自身的有界线性算子, 且

$$\|T\|=\underset{a\leqslant s\leqslant b}{\operatorname{vraisup}}\int_a^b|K(t,s)|dt.$$

5. 设 $\sup\limits_{n\geqslant1}|\alpha_n|<+\infty$, 在 $l$ 中定义线性算子:

$$y=Tx:\eta_n=\alpha_n\xi_n\quad(n=1,2,3,\cdots),$$

其中 $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}$, $y=\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots\}$, 则 $T$ 是有界线性算子, 且

$$\|T\|=\sup_{n\geqslant1}|\alpha_n|.$$

6. 设无穷矩阵 $(\alpha_{ij})$ 适合条件

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_{kj}|^q\right)^{\frac{p}{q}}<+\infty,$$

作算子 $T$ 如下:

$$y=Tx:\eta_j=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{kj}\xi_k\quad(k=1,2,3,\cdots),$$

其中 $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}$，$y=\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots\}$，证明 $T$ 是由 $l^p$ 到其自身的有界线性算子.

7. 设 $E$、$E_1$、$E_2$ 都是赋范线性空间，$T_n$、$T\in\mathscr{B}(E,E_1)$，$S_n$、$S\in\mathscr{B}(E_1,E_2)$. 若 $\{T_n\}$、$\{S_n\}$ 分别依算子范数收敛于 $T$、$S$，则 $\{S_nT_n\}$ 依算子范数收敛于 $ST$.

8. 设 $E$、$E_1$ 都是赋范线性空间，$T_n$、$T\in\mathscr{B}(E,E_1)$. 若 $\{x_n\}\subset E$ 依范数收敛于 $x\in E$，$\{T_n\}$ 依算子范数收敛于 $T$，则 $\{T_nx_n\}$ 依范数收敛于 $Tx$.

9. 设有 $C[0,1]$ 上的算子序列 $\{T_n\}$，其中 $(T_nx)(t)=x(t^{1+\frac{1}{n}})$，则 $\{T_n\}$ 强收敛于某一有界线性算子，但不依算子范数收敛于该算子.

10. 设 $E$ 是赋范线性空间，$L$ 是 $E$ 的闭子空间，对任何 $x\in E$，令 $\Phi x=x+L$. 证明 $\Phi$ 是由 $E$ 到 $E/L$ 上的有界线性算子且 $\|\Phi\|\leqslant 1$.

11. 对于那些 $\alpha>0$，算子 $T:(Tx)(t)=x(t^\alpha)$ 在 $C[0,1]$ 上是有界线性算子？试求其范数.

12. 设 $E$、$E_1$ 是赋范线性空间，$T\in\mathscr{B}(E,E_1)$，$S\in\mathscr{B}(E_1,E)$. 若 $ST=I_E$，其中 $I_E$ 是 $E$ 上的单位算子，则 $T(E)$ 在 $E_1$ 中是闭的.

13. 试计算空间 $C[0,1]$ 中下列算子的范数：

(a) $(Tx)(t)=\int_0^1\sin\pi(t-s)x(s)ds$;

(b) $(Tx)(t)=\int_0^1 e^{t-s}x(s)ds$;

(c) $(Tx)(t)=\int_0^1 t^ns^nx(s)ds$ ($n$ 是给定的自然数).

14. 设 Banach 空间 $E$ 是它的闭子空间 $L$、$M$ 的直接和：$E=L\oplus M$. 证明存在 $K>0$ 使得对任何 $x\in E$，有 $\|y\|\leqslant K\|x\|$，$\|z\|\leqslant K\|x\|$，这里 $y\in L$，$z\in M$，$x=y+z$.

15. 设 $E$、$E_1$ 是 Banach 空间，$T\in\mathscr{B}(E,E_1)$ 是满映射，则对 $E$ 中任何稠密子集 $D$，有 $\overline{T(D)}=E_1$.

16. 设 Banach 空间 $E$ 是它的闭子空间 $L$、$M$ 的直接和，$M$ 是有限维的，$T\in\mathscr{B}(E)$. 则 $T(E)$ 是闭子空间的充分必要条件是 $T(L)$ 为闭的.

17. 设 $E$、$E_1$、$E_2$ 都是 Banach 空间，$T_n$、$T\in\mathscr{B}(E,E_1)$，$S_n$、$S\in\mathscr{B}(E_1,E_2)$，若 $\{T_n\}$、$\{S_n\}$ 分别强收敛于 $T$、$S$，证明 $\{S_nT_n\}$ 强收敛于 $ST$.

18. 设$E$、$E_1$是 Banach 空间. $T_n$、$T\in\mathscr{B}(E,E_1)$. 若$\{x_n\}\subset E$ 依范数收敛于$x\in E$, $\{T_n\}$弱收敛于$T$,证明$\{T_nx_n\}$弱收敛于$Tx$. $\{T_n\}$弱收敛于$T$ 的含义是:对任一$x\in E$,任一$g\in E_1^*$,有$\{g(T_nx)\}\longrightarrow g(Tx)$.

19. 举例说明:存在赋范线性空间$E$以及$T_n\in\mathscr{B}(E)$,使$\{T_n\}$ 强收敛于某一有界线性算子,但$\{\|T_n\|\}$无界.

20. 设$g(\cdot)$是可测集$F$上的可测函数,如果对任何 $f\in L^p(F)$ $(1<p<\infty)$, $g(\cdot)f(\cdot)$可积,则$g\in L^q(E)$,这里$q$满足$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

21. 设$g(\cdot)$是可测集$F$上的可测函数,如果对任何$f\in L(E)$, $f(\cdot)g(\cdot)$可积,则$g$是本性有界的.

22. 设 Banach 空间$E$其有基$\{x_n\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$. 证明:

(a) $\{x_n\}$是线性无关的;

(b) 令$f_n(x)=c_n(n=1,2,3,\cdots)$,这里$x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_nx_n$, 则$f_n$是$E$上的有界线性泛函;

(c) 令$W$为使$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_nx_n$在$E$中收敛的序列$w=\{c_n\}$的全体,在$W$中定义范数

$$\|w\|=\sup_m\left\|\sum_{n=1}^{m}c_nx_n\right\|,$$

则$W$为 Banach 空间.

23. 赋范线性空间$E$称为一致凸的,是指对任给的$\varepsilon>0$,存在$\delta>0$,只要$\|x-y\|\geqslant\varepsilon$ $(\|x\|=\|y\|=1)$,就有$\|x+y\|\leqslant 2-\delta$. 证明

(a) $C[a,b]$不是一致凸的;

(b) $L[a,b]$、$l$都不是一致凸的.

24. 设$\{\eta_n\}$为一数列,若对一切$x=\{\xi_n\}\in l^p$ $(1<p<\infty)$,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\eta_n\xi_n$收敛,则$\{\eta_n\}\in l^q$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$.

25. 设$\{\eta_n\}$为一数列,若对一切$x=\{\xi_n\}\in l$,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\eta_n\xi_n$收敛,则$\{\eta_n\}$有界.

§ 4. § 5.

26. $C[0,1]$上的下列泛函是线性的吗?

(a) $f(x)=\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}x(t^2)\,dt$;

(b) $f(x)=\int_0^1 x(t)\operatorname{sign}\left(t-\frac{1}{2}\right)dt$;

(c) $f(x)=\int_0^1 |x(t)|\,dt$;

(d) $f(x)=\max\limits_{0\le t\le 1} x(t)$;

(e) $f(x)=\int_0^1 [x(t)]^2\,dt$.

27. 试求下列泛函在 $c_0$ 中的范数,其中$x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k,\cdots\}$为$c_0$中的元素:

(a) $f(x)=\xi_{k_0}$($k_0$ 是给定的自然数);

(b) $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k}{2^k}$;

(c) $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k}{k^2}$.

28. 举例说明当赋范线性空间$E$中线性无关的元素族$\{x_k\}$ 含有可列无限多个元素时,则不一定存在$E$上的有界线性泛函族 $\{f_k\}$ 使 $f_k(x_l)=\delta_{kl}$ $(k,l=1,2,3,\cdots)$.

29. 设$E$是赋范线性空间,$f$是$E$上的有界线性泛函,则$f$的零空间 $\mathfrak{N}$ 是$E$中余维为1的闭子空间,即存在 $x_0\in E, x_0\neq\theta$ 使 $E=\mathfrak{N}\oplus\{\alpha x_0\}$,这里 $\alpha$ 是数.

30. 设$f$是定义在赋范线空间$E$上的无界线性泛函. 证明$f$的零空间在$E$中稠密.

31. 证明题 30 的逆命题:若$f$为$E$上的非零线性泛函且$f$的零空间在$E$中稠密,则$f$无界.

32. 设 $v\in V[a,b]$,已知由

$$f(x)=\int_a^b x(t)\,dv(t)$$

定义了 $C[a,b]$上的一个有界线性泛函$f$. 举例说明,存在这样的 $v(t)$ 使

$\|f\| < \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(v)$.

33. 设 $f$ 是定义在 $C[a,b]$ 上的线性泛函，而且对 $C[a, b]$ 中一切满足 $x(t)\geqslant 0$ 的函数有 $f(x)\geqslant 0$，证明 $f$ 连续．于是进一步证明存在 $[a,b]$ 上的单调上升函数 $v(t)$，使

$$f(x)=\int_a^b x(t)dv(t).$$

34. (a) 证明 $\mathbf{R}^n$、$\mathbf{C}^n$ 上的任一线性泛函 $f$ 可分别表成

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j\xi_j, \qquad f(x)=\sum_{j=1}^{n}\overline{c_j}\xi_j,$$

其中 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 属于 $\mathbf{R}^n$ 或 $\mathbf{C}^n$，则 $c_j(j=1,2,\cdots,n)$ 为实数或复数．

(b) 求出 $L[a,b]$ 的共轭空间．

35. 求出空间 $c$、$c_0$ 的共轭空间．

36. 证明 $L^2[-\pi,\pi]$ 上的有界线性泛函序列

$$f_n(x)=\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\cos nt\,dt$$

弱收敛于零．

37. 证明 $C^1[a,b]$ 上的线性泛函

$$f(x)=x'(t_0) \quad (x\in C^1[a,b],\ t_0\in[a,b])$$

是连续的．

38. 设 $E$ 是 Banach 空间，如果对任一 $x\in E$，$E$ 上的有界线性泛函序列 $\{f_n\}$ 均有 $\{f_n(x)\}$ 收敛．则存在 $E$ 上的有界线性泛函 $f$，使 $\{f_n\}$ 弱* 收敛于 $f$，且 $\|f\|\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}\|f_n\|$.

39. 证明任何有限维赋范线性空间都是自反的．

40. 证明无穷维赋范线性空间的共轭空间是无穷维的．

41. 证明 Banach 空间 $E$ 为自反的充要条件是 $E^*$ 为自反的．

42. 求出 $l^p(1\leqslant p<\infty)$ 的共轭空间．

43. 设 $E$ 是赋范线性空间，如果 $E$ 的共轭空间 $E^*$ 是可分的，则 $E$ 也是可分的．

44. 在 $L^p[a,b]\,(1<p<+\infty)$ 中作一个弱收敛，但不强收敛的点列．

45. 设 $x_n=\{\xi_k^{(n)}\}\in l^p\,(n=1,2,3,\cdots)$，则 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $x=\{\xi_k\}\in l^p$ 的充要条件是 $\sup\limits_{n\geqslant 1}\|x_n\|<+\infty$，且对每个 $k$，$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_k^{(n)}=\xi_k$.

46. 证明 $l$ 中点列的弱收敛与强收敛等价.

47. Banach 空间 $E$ 称为序列弱完备的，是指对每个 $f\in E^*$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ 存在，则存在 $x\in E$ 使 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $x$. 证明

(a) 自反空间都是序列弱完备的；

(b) $L[a,b]$、$l$ 是序列弱完备的；

(c) $C[a,b]$ 不是序列弱完备的.

48. 证明：在一致凸空间中，若 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $x$，且 $\{\|x_n\|\}\longrightarrow\|x\|$，则 $\{x_n\}$ 依范数收敛于 $x$.

49. 设 $\{x_n\}$ 是 Banach 空间 $E$ 中的一个点列，如果对于每个 $f\in E^*$，

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f(x_n)|<+\infty,$$

则必存在正数 $\mu$ 使对一切 $f\in E^*$，

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f(x_n)|\leqslant\mu\|f\|.$$

50. $\{x_n\}$ 同 49 题，则对每个 $f\in E^*$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f(x_n)|$ 收敛的充要条件是存在正数 $\mu$，使对一切自然数 $m$，以及任意的 $\varepsilon_n=\pm1$，有

$$\left\|\sum_{n=1}^{m}\varepsilon_n x_n\right\|\leqslant\mu.$$

51. 求证上题中的条件等价于：存在 $\mu>0$，使对任意的一串自然数 $n_1<n_2<\cdots<n_k$(这里 $k$ 也是任意的)，有

$$\left\|\sum_{i=1}^{k}x_{n_i}\right\|\leqslant\mu.$$

52. 设 $\{f_n\}$ 是 Banach 空间 $E$ 的共轭空间 $E^*$ 中的点列，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$ 对每个 $x\in E$ 收敛的充要条件是对每个 $F\in E^{**}$，

$$\sum_{n=1}^{\infty}|F(f_n)|$$

收敛.

53. 设 $M$ 为赋范线性空间 $E$ 的闭子空间，$x_0$ 是 $M$ 中某个弱收敛点列的

极限，则 $x_0 \in M$.

54. 试求下列定义于 $L^2[0,1]$ 上的算子的共轭算子：

(a) $(Tx)(t)=\int_0^t x(s)ds$;

(b) $(E_\lambda x)(t)=\begin{cases} x(t), & t\leqslant\lambda \\ 0, & t>\lambda \end{cases}$ $(\lambda\in[0,1])$.

(c) $(Tx)(t)=x(t^\alpha)$ $(\alpha>0)$;

(d) $(Tx)(t)=\alpha(t)x(t)$ （$\alpha$ 为 $[0,1]$ 上的连续函数）.

55. 试求下列定义于 $l^p$ 上的算子的共轭算子：

(a) $T\{x_1,x_2,\cdots\}=\{0,x_1,x_2,\cdots\}$;

(b) $T\{x_1,x_2,\cdots\}=\{\alpha_1x_1,\alpha_2x_2,\cdots\}$,

其中 $\{\alpha_k\}$ 是有界数列；

(c) $T\{x_1,x_2,\cdots\}=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,0\cdots\}$;

其中 $n$ 是给定的.

(d) $T\{x_1,x_2,\cdots\}=\{\alpha_nx_n,\alpha_{n+1}x_{n+1},\cdots\}$，其中 $\{\alpha_k\}$ $(k\geqslant n)$ 是有界数列，$n$ 是给定的.

56. 设 $E$、$E_1$ 都是赋范线性空间，$T\in\mathscr{B}(E,E_1)$. 证明 $T$ 是由 $E$ 到 $E_1$ 上的等距同构映射的充分必要条件是 $T^*$ 为由 $E_1^*$ 到 $E$ 上的等距同构映射.

§6.

57. 证明在题 5 中的 $T$ 存在有界逆算子的充分必要条件是 $\inf\limits_{n\geq1}|\alpha_n|>0$.

在题 58—70 中，均设所涉及的空间是复的.

58. 设 $E$ 为 Banach 空间，$T$ 为从 $E$ 到 $E$ 中的有界线性算子，$\lambda$、$\mu\in\rho(T)$，则 $R_\lambda-R_\mu=(\mu-\lambda)R_\lambda R_\mu$（第一豫解算子方程）.

59. 设 $E$ 为 Banach 空间，$T_1$、$T_2$ 均为 $E$ 到 $E$ 上的有界线性算子，且可换. 设 $\lambda\in\rho(T_1)\cap\rho(T_2)$，则 $R_\lambda(T_1)-R_\lambda(T_2)=(T_1-T_2)R_\lambda(T_1)R_\lambda(T_2)$（第二豫解算子方程），其中 $R_\lambda(T_j)$ $(j=1,2)$ 是 $T_j$ 的豫解式.

60. 承 58 题，证明 $\frac{d^n}{d\lambda^n}R_\lambda=(-1)^n n!R_\lambda^{n+1}$.

61. 设 $E$ 是 Banach 空间，$T_\lambda$ 是定义在复平面的某一非空集 $G$ 上而在 $\mathscr{B}(E)$ 中取值的抽象函数适合 $T_\lambda-T_\mu=(\mu-\lambda)T_\lambda T_\mu$. 又设对 $G$ 中的某个 $\lambda$，$T_\lambda^{-1}$ 存在且有界，则 $T_\lambda^{-1}$ 对一切 $\lambda\in G$ 都存在且有界，而且存在 $E$ 中的有界线性算子 $T$，使 $T_\lambda$ 是 $T$ 的豫解式，$\rho(T)\supset G$.

62. 设$F$是复平面上一有界闭集，$\{\alpha_n\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 为$F$的一个稠密子集，在$l$中定义算子$T$如下，$Tx=y$：$x=\{\xi_n\}$，$y=\{\alpha_n\xi_n\}$. 则每个$\alpha_n$是$T$的特征值，$\sigma(T)=F$，$F\setminus\{\alpha_n\}$中的每个点属于$T$的连续谱.

63. 在$l$中定义如下的算子，$y=Tx$：$x=\{\xi_n\}$，$y=\{\eta_n\}$；$\eta_1=0$，$\eta_k=-\xi_{k-1}(k\geqslant 2)$. 证明$T$没有特征值，$\rho(T)$由一切满足$|\lambda|>1$的点组成，且$\|R_\lambda\|=(|\lambda|-1)^{-1}$.

64. 在$l^p(1\leqslant p<\infty)$中定义算子$T$：$x\longmapsto y$，其中$x=\{\xi_1,\xi_2,\xi_3,\cdots\}$，$y=\{\xi_2,\xi_3,\cdots\}$. 证明$\rho(T)$由满足$|\lambda|>1$的一切点$\lambda$组成，$T$的特征值由满足$|\lambda|<1$的一切点组成，对于$|\lambda|=1$，$\lambda I-T$是单映射.

65. 设$T$是定义在Banach空间$E$上的有界线性算子，$\alpha\in\rho(T)$，$A=R_\alpha$. 设$\mu$，$\lambda$满足$\mu(\alpha-\lambda)=1$，则$\mu\in\sigma(A)$的充要条件是$\lambda\in\sigma(T)$. 若$\mu\in\rho(A)$，且$\mu(\alpha-\beta)=1$，则$(\mu I-A)^{-1}=\dfrac{1}{\mu}+\dfrac{1}{\mu^2}R_\beta$.

66. 设$E$为Banach空间，$\{T_n\}\subset\mathscr{B}(E)$ $(n=1,2,3,\cdots)$依算子范数收敛于$T\in\mathscr{B}(E)$. $\lambda_0$是$T$的正则值，则当$n$充分大时，$\lambda_0$也是$T_n$的正则值，且

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda_0 I-T_n)^{-1}=(\lambda_0 I-T)^{-1}.$$

67. 设$E$为Banach空间，$T\in\mathscr{B}(E)$，设$\mu_0$是$T^n$的特征值，则$\mu_0$至少有一个$n$次根是$T$的特征值.

68. 设$E$是Banach空间，$T_1$、$T_2\in\mathscr{B}(E)$可换，则

$$r_{T_1T_2}\leqslant r_{T_1}r_{T_2}(r_T\text{ 是算子 }T\text{ 的谱半径}).$$

69. 设$E$是Banach空间，$T_1$、$T_2\in\mathscr{B}(E)$可换，则

$$r_{T_1+T_2}\leqslant r_{T_1}+r_{T_2}(r_T\text{ 是算子 }T\text{ 的谱半径}).$$

70. 设$E_1$、$E_2$均为Banach空间，$T_k\in\mathscr{B}(E_k)$ $(k=1,2)$，令$E=E_1\oplus E_2$. 对$x=(x_1,x_2)\in E(x_k\in E_k, k=1,2)$，再令$\|x\|=\|x_1\|+\|x_2\|$，已知$E$按照这样定义的范数及它的线性运算是Banach空间. 记$Tx=(T_1x_1,T_2x_2)$，证明$\sigma(T)=\sigma(T_1)\cup\sigma(T_2)$.

§ 7.

71. 试举例说明存在有界线性但非紧的算子$T$使$T^2$是紧的.

72. 试证：Banach空间$E$中的点集$M$是列紧的一个充分条件是

(a) $M$是有界的；

(b) 存在强收敛于单位算子的紧算子序列$\{T_n\}$，使得在$M$上一致地有$\|T_nx-x\|\longrightarrow 0$.

73. 设 $E$、$E_1$ 都是无限维的 Banach 空间，$T\in\mathscr{B}(E,E_1)$ 是紧而非有限秩的。证明 $T$ 的值域 $T(E)$ 在 $E_1$ 中不可能是闭的。

74. 证明由 $l^2$ 到 $l$ 的任何有界线性算子必是紧的。

75. 设 $E$、$E_1$ 均为 Banach 空间，$T\in\mathscr{B}(E,E_1)$，若 $T^*$ 是紧算子，则 $T$ 也是紧算子。

76. 设 $E$、$E_1$ 均为赋范线性空间，$S$、$T\in\mathscr{B}(E,E_1)$，且 $S$、$T$ 均为紧算子，证明 $\alpha S+\beta T$ 也是紧算子，这里 $\alpha$、$\beta$ 是数。

77. 设$\{\alpha_n\}$ 是有界数列。在 $l$ 中定义算子 $T: x\longmapsto y$，其中 $x=\{\xi_n\}$，$y=\{\alpha_n\xi_n\}$。证明 $T$ 是紧算子的充分必要条件是 $\{\alpha_n\}\to 0$。

78. 设 $\alpha(\cdot)$ 是 $[a,b]$ 上的有界可测函数，乘法算子 $(Tx)(t)=\alpha(t)x(t)$ 在 $L^2[a,b]$ 中可能是紧算子吗？

79. 设 $\alpha(\cdot)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数。乘法算子 $(Tx)(t)=\alpha(t)x(t)$ 在 $C[a,b]$ 中可能是紧算子吗？

80. 设 $E$、$E_1$ 是赋范线性空间，$T\in\mathscr{B}(E,E_1)$ 是紧算子，$L$ 是 $T$ 的零空间，令 $\check{T}(x+L)=Tx$。证明

(a) $\check{T}$ 是 $E/L$ 到 $E_1$ 的线性算子；

(b) $\check{T}$ 是紧算子。

81. 下列算子在空间 $C[0,1]$ 上是紧算子吗？

(a) $(Tx)(t)=\int_0^1\frac{x(s)}{\sqrt{|t-s|}}ds$;

(b) $(Tx)(t)=\int_0^1(ts+t^2s^2)x(s)ds$;

(c) $(Tx)(t)=\int_0^1\operatorname{tg}\frac{1}{|t-s|}x(s)ds$.

82. 证明：按等式 $Jx=x$ 定义的嵌入算子 $J: C^1[a,b]\to C[a,b]$ 是紧算子。

§ 8.

83. 设 $\mathfrak{U}$ 是实 Hilbert 空间，$f(x)=\|x\|\ (x\in\mathfrak{U})$。证明：

(a) $f$ 在原点不存在弱微分；

(b) $f$ 在任一 $x\neq\theta$，$x\in\mathfrak{U}$处存在弱导数并求出之。

84. 在实 Banach 空间 $c_0$ 中，令 $f(x)=\|x\|\ (x\in c_0)$。设 $x_0=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}\in c_0$ 满足：存在下标 $n_0$ 使$|\xi_{n_0}|>|\xi_n|$对一切 $n\neq n_0$ 成立。证明 $f$ 在

$x_0$ 处存在弱导数，试求出之.

85. 设 $E$、$F$ 均为实 Banach 空间，$f$ 为由 $E$ 中开子集 $\Omega$ 到 $F$ 的强可微映射. 试证 $f'$ 在 $x_0\in\Omega$ 处连续的充分必要条件是：对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $\|h\|<\delta$，$\|k\|<\delta$ 时，

$$\|f(x_0+h)-f(x_0+k)-f'(x_0)(h-k)\|$$
$$\leqslant\varepsilon\|h-k\|.$$

# 第九章　内积空间上的有界线性算子

## §1　Hilbert 空间的共轭空间·共轭算子

在第七章§3、§4中，我们系统地研究了内积空间，特别是完备内积空间即 Hilbert 空间的理论。在第七章§4的小结中，我们还指出，最佳逼近元的存在及其特例直交投影的存在是 Hilbert空间理论中的一个基本事实。在这一章中，我们将比较系统地研究 Hilbert 空间上几类特殊的有界线性算子（自共轭算子、酉算子及正常算子）。对于这几类特殊的有界线性算子比较系统的研究却有赖于 Hilbert 空间理论中另一基本事实的确立——有界线性泛函的表示，因此我们先来讨论这一问题。

### 1.1　Hilbert 空间上的有界线性泛函·共轭空间

**定理 1.1(Riesz)　对于** Hilbert **空间** $\mathfrak{U}$ **上的每个有界线性泛函** $f$**，必存在唯一的** $u\in\mathfrak{U}$ **使得下述等式成立**

$$f(x)=(x,u)\text{且}\|f\|=\|u\|. \tag{1}$$

**反之，对任一元素** $u\in\mathfrak{U}$**，由等式** $f(x)=(x,u)$ **定义了** $\mathfrak{U}$ **上的一个有界线性泛函** $f$**，且** $f$ **的范数满足** $\|f\|=\|u\|$**.**

**证**　设 $f$ 为定义在 $\mathfrak{U}$ 上的有界线性泛函。若 $f=\theta$，取 $u=\theta$ 好了。今设 $f\neq\theta$，令

$$L=\{x:f(x)=0,x\in\mathfrak{U}\}.$$

则 $L$ 是 $\mathfrak{U}$ 的真闭子空间。取非零元素 $x_0\in L^{\perp}$，并设 $\|x_0\|=1$。因 $x_0\overline{\in}L$，故 $f(x_0)\neq0$。由下面的等式

$$f\left(x-\frac{f(x)}{f(x_0)}x_0\right)=f(x)-\frac{f(x)}{f(x_0)}f(x_0)=0$$

有，$x-\dfrac{f(x)}{f(x_0)}x_0\in L$. 因此$\left(x-\dfrac{f(x)}{f(x_0)}x_0,\ x_0\right)=0$，即$\dfrac{f(x)}{f(x_0)}(x_0,x_0)$

$=(x,x_0)$. 因$(x_0,x_0)=\|x_0\|^2=1$，故$\dfrac{f(x)}{f(x_0)}=(x,x_0)$. 令$u=\overline{f(x_0)}\,x_0$，得$f(x)=(x,u)$. 这样我们就证明了满足等式(1)的元素$u$存在.

现在证明$u$的唯一性以及$\|f\|=\|u\|$. 设另有$u'$，使等式$f(x)=(x,u')$对一切$x\in\mathfrak{U}$成立，于是

$$(x,u-u')=0.$$

故$u-u'$与一切$x\in\mathfrak{U}$直交，因此$u-u'=\theta$，唯一性成立. 由Schwarz不等式，$|f(x)|=|(x,u)|\leqslant\|x\|\|u\|$，故$\|f\|\leqslant\|u\|$. 另一方面

$$\|f\|\|u\|\geqslant|f(u)|=|(u,u)|=\|u\|^2,$$

故$\|f\|\geqslant\|u\|$，于是$\|f\|=\|u\|$.

反之，设$u\in\mathfrak{U}$为任一元素，由内积的性质以及Schwarz不等式，等式$f(x)=(x,u)$确实定义了$\mathfrak{U}$上的有界线性泛函$f$. 至于$\|f\|=\|u\|$，则在上面已经证明. 证毕.

定理1.1称为Riesz表示定理. 利用Riesz表示定理可以对空间$\mathfrak{U}$作进一步探讨. 我们证明空间$\mathfrak{U}$是自反的.

由等式(1)，可作$\mathfrak{U}$到$\mathfrak{U}^*$上的映射$J: Ju=f$. 为清楚起见，将$f$改写成$f_u$以表示它是在$J$作用下$u$的象. 现在研究映射$J$的特性. 设$u,v$是$\mathfrak{U}$中任意两个元素. 则

$$f_{u+v}(x)=(x,u+v)=(x,u)+(x,v)=f_u(x)+f_v(x)$$
$$=(f_u+f_v)(x),$$

故$f_{u+v}=f_u+f_v$，即

$$J(u+v)=Ju+Jv,$$

因此$J$是可加的. 对任一数$\alpha\in K$，有

$$f_{\alpha u}(x)=(x,\alpha u)=\bar{\alpha}(x,u)=\bar{\alpha}f_u(x)=(\bar{\alpha}f_u)(x),$$

故 $f_{\alpha u}=\bar{\alpha}f_u$，即

$$J(\alpha u)=\bar{\alpha}Ju.$$

因此当 $\mathfrak{U}$ 是实空间时，$J$ 是线性的. 当 $\mathfrak{U}$ 是复空间时，我们称 $J$ 是反线性的或共轭线性的. 在定理 1.1 中，我们还证明了 $\|f_u\|=\|u\|$，即

$$\|Ju\|=\|u\|.$$

故映射 $J$ 是等距的. 于是 $J$ 是从 $\mathfrak{U}$ 到 $\mathfrak{U}^*$ 上的线性或反线性等距同构映射.

利用 $J$ 的逆映射 $J^{-1}$，可以在 $\mathfrak{U}^*$ 中定义内积如下:

$$(f,g)=(J^{-1}g,J^{-1}f),\tag{2}$$

其中 $f,g\in\mathfrak{U}^*$. 不难证明，由(2)式定义的$(\cdot,\cdot)$ 确实满足内积的全部条件，于是 $\mathfrak{U}^*$ 按照(2) 式定义的内积是内积空间，还可以证明 $\mathfrak{U}^*$ 中原来的范数等于由 (2)式导出的范数. 而 $\mathfrak{U}^*$ 按原来的范数是完备的，故 $\mathfrak{U}^*$ 是 Hilbert 空间. 既然 $\mathfrak{U}^*$是 Hilbert 空间，$\mathfrak{U}^*$ 与它的共轭空间 $\mathfrak{U}^{**}$ 是线性或反线性等距同构的. 因此 $\mathfrak{U}$ 与 $\mathfrak{U}^{**}$等距同构. 于是在等距同构的意义下 $\mathfrak{U}$ 是 $\mathfrak{U}^*$ 的共轭空间. 因此 $\mathfrak{U}$ 是自反空间.

### 1.2 共轭算子及其性质

现在讨论 Hilbert空间上有界线性算子的共轭算子. 为了便于分析比较，先将赋范线性空间上有界线性算子的共轭算子作一简单回顾.

设 $E$、$E_1$ 都是赋范线性空间，$T\in\mathscr{B}(E,E_1)$，对任一 $f\in E_1^*$，由

$$f^*(x)=f(Tx)$$

定义了 $E$ 上唯一的有界线性泛函 $f^*$，$f^*$ 是 $E^*$ 中的元素. 令 $T^*f=f^*$，于是

$$(T^*f)(x)=f(Tx).\tag{3}$$

称 $T^*$ 为 $T$ 的共轭算子. 由此可见，共轭算子是定义在共轭空间 $E_1^*$ 上而值域包含在共轭空间 $E^*$ 中的算子.

以上定义的共轭算子对 Hilbert 空间上的有界线性算子无疑是适用的. 但利用 Riesz 表示定理，我们可以从另一角度来定义共轭算子.

设 $T\in\mathscr{B}(\mathfrak{H})$，那末对于给定的 $y\in\mathfrak{H}$，式 $(Tx, y)$ 给出了 $\mathfrak{H}$ 上关于 $x$ 的一个有界线性泛函，由 Riesz 表示定理，必有 $y'\in\mathfrak{H}$，使

$$(Tx, y)=(x, y')$$

对于一切 $x\in\mathfrak{H}$ 成立. 当 $y$ 确定时，$y'$ 唯一地被确定，于是可作映射 $T'$: $T'y=y'$. 由此可知，

$$(Tx, y)=(x, T'y). \tag{4}$$

利用等式(4)可以证明 $T'$ 是有界线性算子. $T'$ 的线性是显然的. 今证有界性. 由于(4)中的 $x$、$y$ 均为 $\mathfrak{H}$ 中的任意元素，特别地取 $x=T'y$，于是

$$\|T'y\|^2=(TT'y, y)\leqslant\|T\|\|T'y\|\|y\|,$$

因此 $\|T'y\|\leqslant\|T\|\|y\|$ 故 $T'$ 是有界线性算子且 $\|T'\|\leqslant\|T\|$. 如果在(4)中取 $y=Tx$，则可得 $\|T\|\leqslant\|T'\|$. 因此 $\|T'\|=\|T\|$. 这样我们不但证明了 $T'$ 是有界线性算子而且还证明了等式 $\|T'\|=\|T\|$. 这与赋范线性空间中共轭算子的性质类似.

**定义 1.1** 称 $T'$ 为 $T$ 的共轭算子.

这样我们就有了两个共轭算子：$T'$ 及 $T^*$. 应当弄清楚它们有那些区别、有那些联系. 先来考察它们有那些联系. 根据第一段中映射 $J$ 的定义，对任何 $y\in\mathfrak{H}$，$Jy=f_y$，由(4)、(1)及(3)式，有

$$\begin{aligned}(x, T'y)&=(Tx, y)=f_y(Tx)\\&=(T^*f_y)(x)=(x, J^{-1}T^*f_y)\\&=(x, J^{-1}T^*Jy),\end{aligned}$$

故

$$T' = J^{-1}T^*J. \tag{5}$$

(5)建立了 $T'$ 与 $T^*$ 的联系。

至于 $T'$ 与 $T^*$ 的区别，首先，$T'$ 是 $\mathfrak{U}$ 上的算子，$T^*$ 是 $\mathfrak{U}^*$上的算子，这是它们的第一个区别．下面的性质 1° 与性质 6° 则是它们的另两个区别，原因在于当$\mathfrak{U}$为复空间时，映射$J$是反线性的．

现在我们先指出，在 Hilbert 空间的算子理论中，通常均取 $T'$ 作为 $T$ 的共轭算子．为了符号上的统一，我们将 $T'$ 改记为 $T^*$，于是(4)变成：

$$(Tx, y) = (x, T^*y). \tag{4'}$$

Hilbert 空间中的共轭算子具有下列性质：

1° $(\alpha T)^* = \bar{\alpha}T^*$（在赋范线性空间中，$(\alpha T)^* = \alpha T^*$）；

2° $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$；

3° $(T_1T_2)^* = T_2^*T_1^*$；

4° $T^*$ 的共轭算子 $T^{**}$ 满足 $T^{**} = T$；

5° $T$ 有有界逆算子的充分必要条件是 $T^*$ 有有界逆算子，且当 $T$ 有有界逆算子时，$(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$．

6° 当 $\mathfrak{U}$ 为复空间时，$\sigma(T^*) = [\sigma(T)]^-$，这里$[\sigma(T)]^-$表示 $\sigma(T)$ 中的数取共轭后构成的集（在赋范线性空间中，$\sigma(T^*) = \sigma(T)$）．

我们只证明性质 1°、4°、6°．

**性质 1° 的证明** 对任何 $x$、$y \in \mathfrak{U}$，有

$$(x, (\alpha T)^*y) = ((\alpha T)x, y) = \alpha(Tx, y) = \alpha(x, T^*y) = (x, \bar{\alpha}T^*y),$$

故 $(\alpha T)^* = \bar{\alpha}T^*$．

**性质 4° 的证明** 对任何 $x$、$y \in \mathfrak{U}$，有

$$(x, T^{**}y) = (x, (T^*)^*y) = (T^*x, y) = (x, Ty),$$

故 $T^{**} = T$．

**性质 6° 的证明** 设 $\lambda$ 为复数，由性质 1° 以及 $I^* = I$，有

$$(\lambda I-T)^*=\bar{\lambda}I-T^*.$$

再由性质 5° 可知，$\lambda I-T$ 有有界逆算子的充分必要条件是 $\bar{\lambda}I-T^*$ 有有界逆算子，故 $\sigma(T^*)=[\sigma(T)]^-$

值得注意的是，如果内积空间 H 不完备，那末 Riesz 表示定理不成立，因此我们仍应用等式(3)作为共轭算子的定义。

**例 1** 考察空间$\mathbf{C}^n$中由矩阵

$$A=(\alpha_{ij})\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$$

定义的算子

$$T:x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\longrightarrow x'=(\xi_1',\xi_2',\cdots,\xi_n'),$$

其中

$$\xi_j'=\sum_{i=1}^n\alpha_{ij}\xi_i\quad(j=1,2,\cdots,n).$$

现在求 $T$ 的共轭算子。对任何 $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)\in\mathbf{C}^n$，有

$$(x,T^*y)=(Tx,y)=\sum_{j=1}^n\left(\sum_{i=1}^n\alpha_{ij}\xi_i\right)\bar{\eta}_j=\sum_{i,j=1}^n\alpha_{ij}\xi_i\bar{\eta}_j$$

$$=\sum_{i=1}^n\xi_i\overline{\left(\sum_{j=1}^n\bar{\alpha}_{ij}\eta_j\right)}=\sum_{j=1}^n\xi_j\overline{\left(\sum_{i=1}^n\bar{\alpha}_{ji}\eta_i\right)}.$$

由此可见 $T^*$ 由$(\alpha_{ij})$的共轭转置矩阵$(\bar{\alpha}_{ji})$定义。

**例 2** 设 $K(t,s)$是定义在 $a\leqslant t\leqslant b$，$a\leqslant s\leqslant b$ 上的平方可积函数。由核 $K(t,s)$定义了 $L^2[a,b]$上的有界线性算子 $T$：

$$(Tx)(t)=\int_a^b K(t,s)x(s)\,ds.$$

现在求 $T$ 的共轭算子。任取 $y\in L^2[a,b]$，有

$$(x,T^*y)=(Tx,y)=\int_a^b\int_a^b K(t,s)x(s)\overline{y(t)}\,ds\,dt$$

$$=\int_a^b x(s)\left[\overline{\int_a^b\overline{K(t,s)}y(t)\,dt}\right]ds$$

$$=\int_a^b x(t)\left[\overline{\int_a^b\overline{K(s,t)}y(s)\,ds}\right]dt,$$

故
$$T^*y(t)=\int_a^b \overline{K(s,t)}\,y(s)\,ds$$
即 $T^*$ 是以 $K^*(t,s)=\overline{K(s,t)}$ 为核的积分算子.

**例 3** 作为例 2 的特殊情形,我们考察 $L^2[0,1]$ 上的 Volterra 积分算子:
$$Tx(t)=\int_0^t x(s)\,ds,$$
则
$$T^*x(t)=\int_t^1 x(s)\,ds.$$

事实上,Volterra 积分算子的核为
$$K(t,s)=\begin{cases}1, 当\ 0\leqslant t\leqslant 1,\ 0\leqslant s\leqslant t,\\ 0, 当\ 0\leqslant t\leqslant 1,\ t<s\leqslant 1,\end{cases}$$
由例 2,$T$ 的共轭算子 $T^*$ 的核为
$$K^*(t,s)=\begin{cases}1, 当\ 0\leqslant t\leqslant 1,\ t\leqslant s\leqslant 1\\ 0, 当\ 0\leqslant t\leqslant 1,\ 0\leqslant s<t.\end{cases}$$
故
$$T^*x(t)=\int_t^1 x(s)\,ds.$$

## § 2　自共轭算子的基本性质

按照 § 1 中的定义，当 $H$ 为 Hilbert 空间时，$H$ 上的有界线性算子 $T$ 的共轭算子 $T^*$ 也是 $H$ 上的算子，于是 $T$ 与 $T^*$ 都定义在同一空间 $H$ 上. 这样便可以将 $T$ 与 $T^*$ 进行种种比较. 例如考察它们是否相等、是否可换,等等. 在这一节中，我们将着重研究 $T$ 与 $T^*$ 相等这一情形.

### 2.1　自共轭算子的基本概念

**定义 2.1**　设 $T$ 是定义在 Hilbert 空间 $H$ 上的有界线性算子，如果 $T^*=T$,则称 $T$ 是自共轭算子或自伴算子.

今后我们常用自共轭这一名称,而且始终假定 $T$ 是有界的. 容

易看出自共轭算子是线性代数中 Hermite 矩阵的一种推广. 在微分方程、积分方程中也不乏自共轭算子的例, 至于量子力学中, 自共轭算子更是一种常见的、基本的算子.

自共轭算子有下列性质:

1° $T$ 为自共轭算子的充分必要条件是对任何 $x$、$y\in\mathfrak{U}$, 有

$$(Tx, y) = (x, Ty). \tag{1}$$

其实, 若 $T$ 自共轭, (1) 显然成立. 反之, 若 (1) 成立, 则由

$$(Tx, y) = (x, T^*y)$$

得出 $(x, Ty) = (x, T^*y)$, 故 $T = T^*$, $T$ 自共轭.

我们称满足条件 (1) 的有界线性算子 $T$ 为对称的, 于是性质 1° 又可表成: $T$ 为自共轭算子的充分必要条件是 $T$ 为对称的.

2° 当 $\mathfrak{U}$ 是复空间时, $T$ 为自共轭的充分必要条件是对任何 $x\in\mathfrak{U}$, $(Tx, x)$ 为实数.

这是因为, 当 $T$ 自共轭时, 对任何 $x\in\mathfrak{U}$, 有

$$(Tx, x) = (x, Tx) = \overline{(Tx, x)},$$

故 $(Tx, x)$ 为实数. 反之, 若对任何 $x\in\mathfrak{U}$, $(Tx, x)$ 为实数, 则 $(Tx, x) = (x, Tx)$. 通过直接验算, 我们有关于算子的极化恒等式:

$$\begin{aligned}(Tx, y) = &\frac{1}{4}[(T(x+y), x+y) - (T(x-y), x-y)]\\ &+\frac{i}{4}[(T(x+iy), x+iy) - (T(x-iy), x-iy)].\end{aligned}$$

再由 $(T(x+y), x+y) = (x+y, T(x+y))$ 等等, 得

$$\begin{aligned}(Tx, y) = &\frac{1}{4}[(x+y, T(x+y)) - (x-y, T(x-y))]\\ &+\frac{i}{4}[(x+iy, T(x+iy)) - (x-iy, T(x-iy))]\\ = &(x, Ty).\end{aligned}$$

故 $T$ 是对称的因而是自共轭的.

现在考察§1.2中的三个例子. 如果在例1中,

$$\alpha_{ij}=\overline{\alpha}_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n),$$

则由矩阵$(\alpha_{ij})$定义的算子是自共轭的. 如果在例2中, $K(t,s)=\overline{K(s,t)}$, 则以$K(t,s)$为核的积分算子也是自共轭的. 但例3中的Volterra积分算子不是自共轭的. 我们再考察一个例子.

**例1** 在$L^2[0,1]$中,考察乘法算子:

$$(Tx)(t)=tx(t)(x\in L^2[0,1])$$

显然$T$是定义在$L^2[0,1]$上的有界线性算子,由于

$$(Tx,x)=\int_0^1 t|x(t)|^2dt$$

为实数,故$T$自共轭. 这里假定$L^2[a,b]$是复空间.

**定理2.1** 设$T_1$、$T_2$都是定义在Hilbert空间$\mathfrak{U}$上的自共轭算子,则$T_1T_2$是自共轭算子的充分必要条件是$T_1$与$T_2$可换.

**证** 必要性. 设$T_1T_2$是自共轭算子,则

$$T_1T_2=(T_1T_2)^*=T_2^*T_1^*=T_2T_1,$$

故$T_1$、$T_2$可换.

充分性. 设$T_1$、$T_2$可换,则

$$(T_1T_2)^*=T_2^*T_1^*=T_2T_1=T_1T_2,$$

故$T_1T_2$为自共轭算子.

**定理2.2** 设$T$为Hilbert空间$\mathfrak{U}$上的自共轭算子. 记$\mathfrak{M}$为$T$的值域,$\mathfrak{N}$为$T$的零空间,则$\mathfrak{N}=\mathfrak{M}^{\perp}$.

**证** 任取$x\in\mathfrak{U}$, $y\in\mathfrak{N}$,则

$$0=(x,Ty)=(Tx,y),$$

即$Tx\perp y$. 当$x$跑遍$\mathfrak{U}$时,$Tx$跑遍$\mathfrak{M}$, 而$y$则为$\mathfrak{N}$内任一元素,故$\mathfrak{N}\subset\mathfrak{M}^{\perp}$. 反之,设$y\in\mathfrak{M}^{\perp}$,则对任何$x\in\mathfrak{U}$, 有

$$0=(Tx,y)=(x,Ty).$$

因$x$任意,故$Ty=\theta$, $y\in\mathfrak{N}$,因此$\mathfrak{N}\supset\mathfrak{M}^{\perp}$. 证毕.

**定理 2.3** 设$T$是 Hilbert 空间 H 上的自共轭算子. 那末 $T$ 的任一特征值必为实数，对应于$T$的不同特征值的特征向量相互直交.

**证** 设$\lambda$为$T$的一个特征值，任取一个对应的特征向量$x$，由等式$Tx=\lambda x$可知$(Tx,x)=\lambda(x,x)$，因$(Tx,x)$与$(x,x)$均为实数，故$\lambda$必为实数.

定理第二部分的证明与第八章定理 7.12(iii) 的证明完全类似，为完整起见，我们仍将详细过程写于下：

设$\lambda_1$、$\lambda_2$是算子$T$的两个不同的特征值，$x_1$、$x_2$是对应的特征向量. 由$Tx_1=\lambda_1x_1$，$Tx_2=\lambda_2x_2$，有

$$(Tx_1,x_2)=\lambda_1(x_1,x_2),$$

$$(Tx_1,x_2)=(x_1,Tx_2)=\lambda_2(x_1,x_2)$$

(注意：这里用到了$\lambda_2$是实数这一事实)，

于是$\lambda_1(x_1,x_2)=\lambda_2(x_1,x_2)$，因$\lambda_1\neq\lambda_2$，故$(x_1,x_2)=0$. 证毕.

**定理 2.4** 设$T$是 Hilbert 空间 H 上的自共轭算子. 令

$$m=\inf\{(Tx,x):x\in H,\ \|x\|=1\};$$

$$M=\sup\{(Tx,x):x\in H,\ \|x\|=1\},$$

则
$$\|T\|=\max\{|m|,|M|\}.$$

$m$，$M$分别称为算子$T$的下界与上界.

**证** 令$K=\max\{|m|,|M|\}$. 根据$M$、$m$的定义，有

$$|M|\leqslant\sup_{\|x\|=1}|(Tx,x)|\leqslant\|T\|;$$

$$|m|\leqslant\sup_{\|x\|=1}|(Tx,x)|\leqslant\|T\|,$$

故$K\leqslant\|T\|$. 下面证明$K\geqslant\|T\|$. 任取$\lambda>0$，根据$T$的对称性，可直接验证下面的等式：

$$\|Tx\|^2=\frac{1}{4}\left[\left(T\left(\lambda x+\frac{1}{\lambda}Tx\right),\lambda x+\frac{1}{\lambda}Tx\right)\right.$$

$$-\left(T\left(\lambda x-\frac{1}{\lambda}Tx\right),\lambda x-\frac{1}{\lambda}Tx\right)\Big],$$

故

$$\|Tx\|^2\leqslant\frac{1}{4}K\left(\|\lambda x+\frac{1}{\lambda}Tx\|^2+\|\lambda x-\frac{1}{\lambda}Tx\|^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}K\left(\lambda^2\|x\|^2+\frac{1}{\lambda^2}\|Tx\|^2\right).$$

不妨设 $x\neq\theta$. 令 $\lambda=\left(\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\right)^{\frac{1}{2}}$, 得

$$\|Tx\|^2\leqslant\frac{1}{2}K\left(\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\|x\|^2+\frac{\|x\|}{\|Tx\|}\|Tx\|^2\right)=K\|Tx\|\|x\|,$$

故 $$\|Tx\|\leqslant K\|x\|.$$

于是 $\|T\|\leqslant K$, 因此 $\|T\|=K$. 证毕.

**推论** 设 $T$ 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的自共轭算子, 则

$$\|T\|=\sup\{|(Tx,x)|:x\in\mathcal{H},\ \|x\|=1\}. \tag{2}$$

**证** 其实, 由下面显然的等式:

$$\max\{|m|,|M|\}=\sup\{|(Tx,x)|:x\in\mathcal{H},\|x\|=1\}.$$

及定理 2.4 可知, (2) 成立. 证毕.

**2.2 正算子**

为了研究自共轭算子的谱分解理论, 我们引进一类特殊的自共轭算子——正算子.

**定义 2.2** 设 $\mathcal{H}$ 是 Hilbert空间, $T\in B(\mathcal{H})$ 自共轭, 如果对任意的 $x\in\mathcal{H}$,

$$(Tx,x)\geqslant 0,$$

则称 $T$ 为正算子, 记为 $T\geqslant\theta$.

如果 $\mathcal{H}$ 是复空间, 则在定义 2.2 中, 无需事先假定 $T$ 是自共轭的.

现在设 $T_1$、$T_2$ 均为自共轭算子, 若 $T_1$、$T_2$ 满足 $T_1-T_2\geqslant\theta$, 则称

$T_1$大于 $T_2$ 或称 $T_2$ 小于 $T_1$，并分别记为 $T_1 \geqslant T_2$ 或 $T_2 \leqslant T_1$.

大家知道，一个不等于零的实数，或者为正数或者为负数，二者必居其一. 但对于一般的自共轭算子 $T$，决不能认为或者 $T \geqslant \theta$ 或者 $T \leqslant \theta$，也是二者必居其一.

**例 2** 由矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

显然定义了 $\mathbf{C}^2$ 上的一个自共轭算子 $T$，$T$ 的特征值是 $\pm 1$. 设 $x_1$ 是 $T$ 对应于 1 的一个特征向量，则 $(Tx_1, x_1) = (x_1, x_1) > 0$. 设 $x_2$ 是 $T$ 对应于 $-1$ 的一个特征向量，则 $(Tx_2, x_2) = -(x_2, x_2) < 0$. 故 $T$ 即不大于 $\theta$ 也不小于 $\theta$.

由定义 2.2 可以导出下列性质：

$1^\circ$ 设自共轭算子 $T_1 \geqslant T_2$; $S_1 \geqslant S_2$，则

$$T_1 + S_1 \geqslant T_2 + S_2;$$

若 $c$ 是非负实数，则

$$cT_1 \geqslant cT_2.$$

显然成立，证明从略.

设 $p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n$ 是 $\lambda$ 的多项式，则称

$$p(T) = a_0 I + a_1 T + \cdots + a_n T^n$$

是 $T$ 的多项式.

$2^\circ$ 设 $T$ 是正算子，则 $T$ 的任何非负整数幂 $T^n$ 也是正算子，因此 $T$ 的任何具有非负实系数的多项式 $p(T)$ 也是正算子.

事实上，若 $n$ 为偶数，则 $n = 2k$，于是

$$(T^n x, x) = (T^{2k} x, x) = (T^k x, T^k x) \geqslant 0.$$

若 $n$ 为奇数，则 $n = 2k + 1$，于是

$$(T^n x, x) = (T^{2k+1} x, x) = (T(T^k x), T^k x) \geqslant 0,$$

故无论哪一种情形，$T^n$ 都是正算子. 再根据性质 $1^\circ$ 可知，$T$ 的任

何具有非负实系数的多项式 $p(T)$ 是正算子.

3° (广义 Schwarz 不等式) 设 $T$ 为正算子, 则对一切 $x$, $y\in\mathfrak{U}$, 有

$$|(Tx,y)|^2\leqslant(Tx,x)(Ty,y). \tag{3}$$

我们可以用证明 Schwarz 不等式的方法来证明 (3), 但为使读者了解更多的泛函分析技巧, 现在用稍微不同的方法来证明.

令 $z_\lambda=x+\lambda(Tx,y)y$, 其中 $\lambda$ 为实数, 则

$$\begin{aligned}0\leqslant(Tz_\lambda,z_\lambda)&=(T(x+\lambda(Tx,y)y),x+\lambda(Tx,y)y)\\&=(Tx,x)+2\lambda|(Tx,y)|^2+\lambda^2|(Tx,y)|^2(Ty,y).\end{aligned}$$

右端是 $\lambda$ 的二次三项式, 由于它的值总是非负的, 故其判别式不大于零, 即

$$|(Tx,y)|^4\leqslant|(Tx,y)|^2(Tx,x)(Ty,y),$$

(3)式成立.

单调有界数列必有极限, 这是古典分析中早为人们熟知的事实. 对于自共轭算子, 类似的性质也成立. 为此先引入单调自共轭算子列的概念.

**定义 2.3** 设 $\{T_n\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 为自共轭算子列, 如果对一切 $n$ 有 $T_n\leqslant T_{n+1}$, 则称 $\{T_n\}$ 是单调上升的. 如果对一切 $n$ 有 $T_n\geqslant T_{n+1}$, 则称 $\{T_n\}$ 是单调下降的. 单调上升或单调下降的自共轭算子列统称为单调的.

**定理 2.5** **设 $\{T_n\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 为一致有界的单调自共轭算子列, 则存在唯一的自共轭算子 $T$ 使**

$$\{T_n\}\xrightarrow{\text{强}}T.$$

**证** 不妨设 $\{T_n\}$ 是单调上升的. 任取自然数 $m$、$n$ 并设 $n>m$. 令 $T_{mn}=T_n-T_m$, 易见 $T_{mn}$ 是正算子. 因 $\{T_n\}$ 一致有界, 故 $\{T_{mn}\}$ 也一致有界, 即存在 $\alpha>0$ 使得对一切 $m,n(n>m)$, 有

$$\|T_{mn}\|\leqslant\alpha.$$

由定理 2.4 的推论及 $T_{mn}$ 的正性，得

$$0\leqslant(T_{mn}x,x)\leqslant\|T_{mn}\|(x,x)\leqslant\alpha(x,x)\ (x\in\mathfrak{U}).$$

再由广义 Schwarz 不等式，对任一 $x\in\mathfrak{U}$，有

$$\|T_{mn}x\|^4=|(T_{mn}x,T_{mn}x)|^2\leqslant(T_{mn}x,x)(T_{mn}^2x,T_{mn}x)$$
$$\leqslant\alpha(T_{mn}x,x)(T_{mn}x,T_{mn}x)=\alpha(T_{mn}x,x)\|T_{mn}x\|^2,$$

故

$$\|T_{mn}x\|^2\leqslant\alpha(T_{mn}x,x). \tag{4}$$

因 $\{T_n\}$ 单调上升且一致有界，故 $\{(T_nx,x)\}$ 是单调上升的有界数列，它有有限的极限，于是当 $m,n\to\infty$ 时，$(T_{mn}x,x)\to0$. 由(4)

$$\|(T_n-T_m)x\|=\|T_{mn}x\|\to0.$$

根据第八章定理 3.2，存在唯一的有界线性算子 $T$ 使

$$\{T_n\}\xrightarrow{\text{强}}T.$$

因每个 $T_n$ 为自共轭的，故 $T$ 也是自共轭的. 证毕.

任一非负实数有唯一的非负平方根，这也是早为人们熟知的事实，对于正算子，类似的性质也成立.

**定理 2.6　设 $T$ 为正算子，则存在唯一的正算子 $S$ 使 $S^2=T$. 称 $S$ 为 $T$ 的正平方根，记为 $T^{\frac{1}{2}}$. $T^{\frac{1}{2}}$ 是 $T$ 的某一多项式序列在算子强收敛意义下的极限. 于是与 $T$ 可换的任何算子必与 $T^{\frac{1}{2}}$ 可换.**

**证**　不妨设 $\theta\leqslant T\leqslant I$. 若 $T$ 存在正平方根 $S$，则由 $T=S^2$，有

$$-2S=-T+S^2-2S,$$

因此

$$2(I-S)=I-T+(I-S)^2.$$

令 $A=I-S$，$B=I-T$，则有

$$A=\frac{1}{2}(B+A^2). \tag{5}$$

因此问题归结为证明存在满足等式(5) 的算子 $A$. 我们用迭代法证明这一事实. 令

$$A_0=\theta,\ A_1=\frac{1}{2}(B+A_0^2),\ \cdots,\ A_{n+1}=\frac{1}{2}(B+A_n^2),\ \cdots. \tag{6}$$

现在先用归纳法证明 $\{A_n\}$ 是单调上升的正算子列. 显然 $A_0$, $A_1$ 以及 $A_1-A_0$ 都是正算子 $B$ 的多项式且系数都是非负实数, 因此都是正算子. 今设 $A_{n-1}$、$A_n$ 以及 $A_n-A_{n-1}$ 也都是 $B$ 的具有非负系数的多项式. 由此不难看出, $A_n$、$A_{n-1}$ 可换, 故

$$A_{n+1}-A_n=\frac{1}{2}(A_n^2-A_{n-1}^2)=\frac{1}{2}(A_n+A_{n-1})(A_n-A_{n-1}).$$

由关于 $A_n$、$A_{n-1}$ 的假设可知, $A_n+A_{n-1}$ 也是 $B$ 的具有非负系数的多项式, 因而 $A_{n+1}-A_n$ 也是 $B$ 的具有非负系数的多项式. 这样我们便证明了 $\{A_n\}$ 是单调上升的正算子列. 现在证明对一切 $n$, $\|A_n\|\leqslant 1$. 当 $n=0$, 不等式 $\|A_0\|\leqslant 1$ 显然成立. 今设对某个 $n$, 不等式 $\|A_n\|\leqslant 1$ 成立. 由 $B$ 的定义并将定理 2.4 的推论运用于 $B$, 得 $\|B\|\leqslant 1$. 于是

$$\|A_{n+1}\|=\frac{1}{2}\|B+A_n^2\|\leqslant\frac{1}{2}(\|B\|+\|A_n\|^2)\leqslant 1.$$

因此不等式 $\|A_n\|\leqslant 1$ 对一切 $n$ 成立. 由定理2.5, $\{A_n\}$ 在算子强收敛意义下有极限, 记其极限为 $A$. 显然 $\|A\|\leqslant 1$.

由于 $\{A_n\}$ 中任意两个算子可换, 于是每个 $A_n$ 均与 $A$ 可换. 因此 $A_n^2-A^2=(A_n+A)(A_n-A)$, 再由

$$\begin{aligned}\|(A_n^2-A^2)x\|&=\|(A_n+A)(A_n-A)x\|\\&\leqslant(\|A_n\|+\|A\|)\|(A_n-A)x\|\\&\leqslant 2\|(A_n-A)x\|\longrightarrow 0\quad(x\in H),\end{aligned}$$

可知 $A_n^2$ 在算子强收敛意义下收敛于 $A^2$. 在等式

$$A_{n+1}=\frac{1}{2}(B+A_n^2)$$

中，令 $n\to\infty$，可得 $A=\frac{1}{2}(B+A^2)$. 再回到 $S=I-A$，则 $S$ 就是 $T$ 的一个正平方根. 根据以上的作法，任一与 $T$ 可换的有界线性算子必与 $S$ 可换.

最后证明正平方根的唯一性. 设 $S'$ 也是 $T$ 的一个正平方根：$S'^2=T$. 易见 $S'$ 与 $T$ 可换，于是 $S'$ 与 $S$ 可换. 令 $V$、$V'$ 分别是 $S$、$S'$ 按照上面的作法得到的正平方根. 任取 $x\in\mathfrak{U}$，令 $y=(S-S')x$，则

$$\begin{aligned}\|Vy\|^2+\|V'y\|^2&=(V^2y,y)+(V'^2y,y)=(Sy,y)+(S'y,y)\\&=((S+S')y,y)=((S+S')(S-S')x,y)\\&=((S^2-S'^2)x,y)=((T-T)x,y)=0.\end{aligned}$$

故 $Vy=V'y=\theta$，于是更有

$$\begin{aligned}\|y\|^2&=(y,y)=((S-S')x,y)\\&=(V^2x,y)-(V'^2x,y)=(Vx,Vy)-(V'x,V'y)=0,\end{aligned}$$

因此 $y=\theta$，而 $y=(S-S')x$. 故 $Sx=S'x$. 因 $x$ 是 $\mathfrak{U}$ 中任一元素，我们有 $S=S'$. 唯一性成立. 证毕.

**推论 1** 设 $T$ 为正算子，$x_0\in\mathfrak{U}$，若 $(Tx_0,x_0)=0$，则 $Tx_0=\theta$.

**证** 因

$$\begin{aligned}\|T^{\frac{1}{2}}x_0\|^2&=(T^{\frac{1}{2}}x_0,T^{\frac{1}{2}}x_0)=(T^{\frac{1}{2}}T^{\frac{1}{2}}x_0,x_0)\\&=(Tx_0,x_0)=0,\end{aligned}$$

故 $T^{\frac{1}{2}}x_0=\theta$. 于是 $Tx_0=T^{\frac{1}{2}}(T^{\frac{1}{2}}x_0)=\theta$. 证毕.

**推论 2** 设自共轭算子 $T_1$、$T_2$ 满足：$T_1\geqslant T_2$，而正算子 $T$ 与 $T_1$、$T_2$ 均可换，则 $TT_1\geqslant TT_2$. 特别地，当 $T_2=\theta$ 时，则有 $TT_1\geqslant\theta$.

**证** 任取 $x\in\mathfrak{U}$，我们有

$$\begin{aligned}(TT_1x,x)&=(T^{\frac{1}{2}}T^{\frac{1}{2}}T_1x,x)=(T^{\frac{1}{2}}T_1x,\ T^{\frac{1}{2}}x)\\&=(T_1T^{\frac{1}{2}}x,\ T^{\frac{1}{2}}x)\geqslant(T_2T^{\frac{1}{2}}x,\ T^{\frac{1}{2}}x)\end{aligned}$$

$$=(T^{\frac{1}{2}}T_2T^{\frac{1}{2}}x,x)=(TT_2x,x).$$

因此 $TT_1\geqslant TT_2$.

若 $T_2=\theta$, 则 $TT_2=\theta$, 故 $TT_1\geqslant\theta$. 证毕.

**2.3 双线性 Hermite 泛函**

在这一段中我们介绍内积的一种推广并研究它与有界线性算子及其特例自共轭算子的关系. 为明确起见, 始终假定这一段中所涉及的空间为复空间.

**定义 2.4** 设 $\mathfrak{U}$ 是内积空间, $A(\cdot,\cdot)$ 是定义在 $\mathfrak{U}$ 上的二元泛函. 如果对任意的 $x$、$y$、$z\in\mathfrak{U}$ 及任意的复数 $\alpha$、$\beta$ 有

$$A(\alpha x+\beta y,z)=\alpha A(x,z)+\beta A(y,z);$$

$$A(x,\alpha y+\beta z)=\bar{\alpha}A(x,y)+\bar{\beta}A(x,z),$$

则称 $A(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathfrak{U}$ 上的一个双线性泛函. 如果对任意的 $x$、$y\in\mathfrak{U}$, 有

$$A(x,y)=\overline{A(y,x)},$$

则称 $A(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathfrak{U}$ 上的一个双线性Hermite 泛函. 对双线性Hermite 泛函 $A(\cdot,\cdot)$, 若还有 $A(x,x)\geqslant0\ (x\in\mathfrak{U})$, 则称 $A(\cdot,\cdot)$ 是正的双线性泛函.

**定义 2.5** 设 $A(\cdot,\cdot)$ 是内积空间 $\mathfrak{U}$ 上的双线性泛函, 如果存在正数 $C$ 使

$$|A(x,y)|\leqslant C\|x\|\|y\|,$$

则称 $A(\cdot,\cdot)$ 是有界的. 当 $A(\cdot,\cdot)$ 有界时, 令

$$\|A\|=\sup_{\substack{\|x\|=1\\ \|y\|=1}}|A(x,y)|.$$

称 $\|A\|$ 为 $A(\cdot,\cdot)$ 的范数.

**例 3** 设 $(\alpha_{ij})_{i,j=1,2,\cdots,n}$ 是 $n\times n$ 矩阵. 对 $\mathbb{C}^n$ 中任一 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 及任一 $y=(y_1,\cdots,y_n)$, 令

$$A(x,y)=\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}x_i\bar{y}_j.$$

那么当 $(\alpha_{ij})_{i,j=1,2,\cdots,n}$ 是 Hermite 矩阵时，$A(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathbf{C}^n$ 上双线性 Hermite 泛函.

**定理 2.7** **设 $T$ 是 Hilbert 空间 $\mathfrak{U}$ 上的有界线性算子，那么由等式**

$$A(x,y)=(Tx,y) \tag{7}$$

**定义了 $\mathfrak{U}$ 上的一个有界双线性泛函且 $\|A\|=\|T\|$. 反之，设 $A(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathfrak{U}$ 上的一个有界双线性泛函，则存在 $\mathfrak{U}$ 上唯一的有界线性算子 $T$，使(7)式成立. $A(\cdot,\cdot)$ 为 Hermite 泛函的充分必要条件是 $T$ 为自共轭的. $A(\cdot,\cdot)$ 为正的充分必要条件是 $T$ 为正的.**

**证** 定理的第一部分非常明显，因为当 $\mathfrak{U}$ 上有界线性算子 $T$ 给定后，(7)式显然定义了 $\mathfrak{U}$ 上的一个有界双线性泛函. 再由

$$\sup_{\substack{\|x\|=1\\ \|y\|=1}}|A(x,y)|=\sup_{\substack{\|x\|=1\\ \|y\|=1}}|(Tx,y)|=\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|$$

可知

$$\|A\|=\|T\|. \tag{8}$$

反之，设 $A(\cdot,\cdot)$ 是给定的. 对于每个 $y\in\mathfrak{U}$，令

$$f_y(x)=A(x,y).$$

因 $A(\cdot,\cdot)$ 关于第一个变元是线性的，$f_y$ 是 $\mathfrak{U}$ 上的线性泛函. 再由

$$|f_y(x)|=|A(x,y)|\leqslant\|A\|\|x\|\|y\|$$

可知 $f_y$ 有界且

$$\|f_y\|\leqslant\|A\|\|y\|. \tag{9}$$

由 Riesz 表示定理，存在唯一的 $y^*\in\mathfrak{U}$ 使

$$f_y(x)=(x,y^*) \tag{10}$$

且 $\|y^*\|=\|f_y\|$. 由于对每个 $y\in\mathfrak{U}$，$y^*$ 是唯一确定的，我们可以定义映射 $S$ 使 $Sy=y^*$. 由(10)，得

$$A(x,y)=(x,Sy).$$

现在证明 $S$ 是线性算子. 除了以上的 $x$、$y$ 外，再任取 $z\in\mathfrak{U}$.

那么对任意两个数 $\alpha,\beta$,有

$$
\begin{aligned}
(x, S(\alpha y+\beta z)) &= A(x, \alpha y+\beta z) \\
&= \bar{\alpha} A(x,y)+\bar{\beta} A(x,z) \\
&= \bar{\alpha}(x, Sy)+\bar{\beta}(x, Sz) \\
&= (x, \alpha Sy+\beta Sz),
\end{aligned}
$$

故 $S(\alpha y+\beta z)=\alpha Sy+\beta Sz$, $S$ 是线性的. 由(9)可知,

$$
|(x,Sy)|=|f_y(x)|\leqslant\|f_y\|\|x\|\leqslant\|A\|\|x\|\|y\|.
$$

因此 $S$ 有界且 $\|S\|\leqslant\|A\|$. 设 $T$ 为 $S$ 的共轭算子, 由

$$
(Tx,y)=(x,Sy)=A(x,y),
$$

(7)成立. 定理的第一部分证毕.

现在证明定理的第二部分. 设 $T$ 为有界线性算子, $A(x, y)=(Tx,y)$. 则 $T$ 自共轭的充分必要条件是对任何 $x$、$y\in\mathfrak{U}$,有

$$
(Tx,y)=(x,Ty)=\overline{(Ty,x)},
$$

它等价于

$$
A(x,y)=\overline{A(y,x)},
$$

这个等式正是 $A(\cdot,\cdot)$为 Hermite 泛函的定义. 于是 $T$ 为自共轭算子的充分必要条件是 $A(\cdot,\cdot)$为 Hermite 的.

定理的最后一个结论,即 $A(\cdot,\cdot)$为正的充分必要条件是 $T$ 为正的,这一事实显然成立,证明从略. 证毕

由定理 2.7 可知, Hilbert 空间上的有界双线性泛函对应于有界线性算子,而有界 Hermite 泛函则对应于自共轭算子. 因此,为了研究有界双线性(Hermite)泛函的性质, 只需研究与之对应的有界线性(自共轭)算子,反之也成立. 在第一段中,我们已比较详细地研究了自共轭算子的性质,将这些性质移植于有界 Hermite 泛函 $A(\cdot,\cdot)$上,便有

**推论 1** $A(\cdot,\cdot)$ 为有界 Hermite 泛函的充分必要条件是对

任意的 $x\in\mathfrak{U}$, $A(x,x)$ 为实数且 $A(\cdot,\cdot)$ 有界.

**推论 2** 设 $A(\cdot,\cdot)$ 为有界 Hermite 泛函, 令

$$m=\inf_{\|x\|=1}A(x,x),\ M=\sup_{\|x\|=1}A(x,x),$$

则 $\|A\|=\max\{|m|,|M|\}$.

这一段剩下的部分研究二次泛函及它与双线性泛函的关系.

**定义 2.6** 设 $\tilde{A}(\cdot)$ 是定义在内积空间 $\mathfrak{U}$ 上的泛函, 如果它满足下面的条件

(i) 二次齐次性: 对任何复数 $\alpha$ 及任何 $x\in\mathfrak{U}$, 有

$$\tilde{A}(\alpha x)=|\alpha|^2\tilde{A}(x);$$

(ii) 中线公式成立: 对任何 $x$、$y\in\mathfrak{U}$, 有

$$\tilde{A}(x+y)+\tilde{A}(x-y)=2[\tilde{A}(x)+\tilde{A}(y)],$$

则称 $\tilde{A}(\cdot)$ 是 $\mathfrak{U}$ 上的一个*二次泛函*. 如果 $\tilde{A}(\cdot)$ 还满足

$$\sup\{|\tilde{A}(x)|:x\in\mathfrak{U},\|x\|=1\}<\infty,$$

则称 $\tilde{A}(\cdot)$ 是*有界的*. 如果对任何 $x\in\mathfrak{U}$, $\tilde{A}(x)$ 是实数, 则称 $\tilde{A}(\cdot)$ 是*实的*. 当 $\tilde{A}(\cdot)$ 有界时, 令

$$\|\tilde{A}\|=\sup\{|\tilde{A}(x)|:x\in\mathfrak{U},\|x\|=1\},$$

并称 $\|\tilde{A}\|$ 为 $\tilde{A}(\cdot)$ 的范数.

我们感兴趣的是有界实二次泛函与有界 Hermite 泛函的关系.

**定理 2.8** 设 $A(\cdot,\cdot)$ 是内积空间 $\mathfrak{U}$ 上的有界 Hermite 泛函, 令

$$\tilde{A}(x)=A(x,x)\quad(x\in\mathfrak{U}),\tag{11}$$

则 $\tilde{A}(\cdot)$ 是 $\mathfrak{U}$ 上的有界实二次泛函, 且

$$\|\tilde{A}\|=\|A\|.\tag{12}$$

反之, 设 $\tilde{A}(\cdot)$ 是 $\mathfrak{U}$ 上的有界实二次泛函, 则存在 $\mathfrak{U}$ 上唯一的有界 Hermite 泛函 $A(\cdot,\cdot)$ 使

$$A(x,x)=\tilde{A}(x)\quad (x\in\mathfrak{U}),$$

且(12)成立.

**证** 设 $A(\cdot,\cdot)$是$\mathfrak{U}$上的有界 Hermite 泛函，由(11)式定义的 $\tilde{A}(\cdot)$ 显然是$\mathfrak{U}$上的实二次泛函. 再由 $\tilde{A}(\cdot)$ 范数的定义及定理 2.7 推论 2 可知,(12)成立.

反之,设 $\tilde{A}(\cdot)$是$\mathfrak{U}$上的有界实二次泛函. 令

$$A(x,y)=\frac{1}{4}[\tilde{A}(x+y)-\tilde{A}(x-y)]$$

$$+\frac{i}{4}[\tilde{A}(x+iy)-\tilde{A}(x-iy)]\quad (x、y\in\mathfrak{U}).\qquad(13)$$

现在证明 $A(\cdot,\cdot)$ 是 Hermite 泛函. 利用第七章 §3 定理 3.1 的方法可以证明: 对任何 $x、y、z\in\mathfrak{U}$, 有

$$A(x+z,y)=A(x,y)+A(z,y).\qquad(14)$$

进而可以证明: 对任何有理数 $r$,

$$A(rx,y)=rA(x,y).\qquad(15)$$

由(13)及(14)式，得

$$|A(x,y)|=\frac{1}{|r|}|A(rx,y)|$$

$$\leqslant\frac{1}{4|r|}\|\tilde{A}\|(\|rx+y\|^2+\|rx-y\|^2+\|rx+iy\|^2+\|rx-iy\|^2)$$

$$=\|\tilde{A}\|\left(|r|\|x\|^2+\frac{1}{|r|}\|y\|^2\right).\qquad(16)$$

先设 $x\neq\theta, y\neq\theta$, 取 $r_n$ 使 $|r_n|\longrightarrow\frac{\|y\|}{\|x\|}$并将 $r_n$ 代入(16), 得

$$|A(x,y)|\leqslant 2\|\tilde{A}\|\|x\|\|y\|.\qquad(17)$$

若 $x、y$ 中有一个为零，(17)显然成立，因此(17)对一切 $x、y\in\mathfrak{U}$ 成立.

由(17)式可知, $A(\cdot,\cdot)$是有界的. 于是由(15),不难证明 $A(\cdot,\cdot)$ 关于第一个变元是实齐次的. 再由(14), $A(\cdot,\cdot)$关于第一个变元是

可加的因此是实线性的. 最后由 $A(\cdot,\cdot)$的定义可直接验证:

$$A(x,y)=\overline{A(y,x)};$$

$$A(ix,y)=iA(x,y).$$

以上的全部论证表明, $A(\cdot,\cdot)$ 是有界 Hermite 泛函. $A(\cdot,\cdot)$的范数则满足

$$\|A\|=\sup\{|A(x,x)|:x\in\mathfrak{U},\|x\|=1\}$$
$$=\sup\{|\tilde{A}(x)|:x\in\mathfrak{U},\|x\|=1\}=\|\tilde{A}\|.$$

因此(12)成立.

剩下的还需证明 $A(\cdot,\cdot)$的唯一性. 设不然,则存在另一有界 Hermite 泛函 $B(\cdot,\cdot)$使

$$B(x,x)=\tilde{A}(x)\,(x\in\mathfrak{U}).$$

于是 $A(x,x)=B(x,x)\,(x\in\mathfrak{U})$, 由(13)可知, $A(x,y)=B(x,y)\,(x、y\in\mathfrak{U})$. 唯一性成立. 证毕.

**推论** **设 $\tilde{A}(\cdot)$是 $\mathfrak{U}$ 上的有界实二次泛函, 则存在 $\mathfrak{U}$ 上唯一的自共轭算子 $T$ 使得**

$$(Tx,x)=\tilde{A}(x)\quad(x\in\mathfrak{U})$$

**且$\|T\|=\|\tilde{A}\|$.**

**证** 这是定理 2.7 及定理 2.8 的直接推论.

在 §1、§2 中, 我们研究了 Hilbert 空间上的有界线性泛函, 讨论了 Hilbert 空间上的有界线性算子的共轭算子, 最后还讨论了自共轭算子及其特例正算子的性质,等等. 希望读者注意:

1° Riesz 关于 Hilbert 空间上有界线性泛函的表示定理是 Hilbert 空间理论中的第二个基本事实. 有了这个事实,任何一个有界线性算子及其共轭算子就成了同一个空间上的算子. 于是可以对它们进行种种比较, 因而出现了自共轭算子以及后面 §5 及 §6 中的酉算子、正常算子等;

2° 自共轭算子 $T$ 有很多重要特性: 例如它的零空间与它的

值域的闭包互为直交补空间；$T$ 的范数满足

$$\|T\|=\max\{|m|,|M|\}=\sup_{\|x\|=1}|(Tx,x)|;$$

一致有界的单调自共轭算子列在算子强收敛意义下必有极限. 自共轭算子的一个特例是正算子，正算子除了具有自共轭算子的全部性质外，还有一些独特的性质：例如每个正算子有唯一的正平方根；

3° 与复 Hilbert 空间上的有界线性算子有着密切联系的是有界双线性泛函，具体说，下列对应成立：

有界线性算子⟷有界双线性泛函；

自共轭算子⟷有界 Hermite 泛函；

正算子⟷有界正泛函.

作为最后一个对应的特例，我们有：单位算子⟷内积.

由此可见，有界线性算子与有界双线性泛函是同一事物的两个不同方面，据此，我们可以将算子转化为泛函，也可以将泛函转化为算子. 有的泛函分析教科书就是根据这一观点研究自共轭算子、酉算子等的谱分解定理的.

## §3 投 影 算 子

### 3.1 投影算子的基本概念

利用 Hilbert 空间中元素的直交分解，可以很自然地引进直交投影算子的概念. 而直交投影算子在算子的谱理论中起着基本的作用.

设 $H$ 为 Hilbert 空间，$L$ 为 $H$ 的闭子空间，由第七章定理4.2，任一元素 $x\in H$ 可唯一地分解为

$$x=x_1+x_2,$$

其中 $x_1\in L$, $x_2\in L^{\perp}$.

**定义 3.1** 令 $Px=x_1$，则 $P$ 为定义在 $\mathfrak{U}$ 上的算子，称 $P$ 为 $L$ 上的直交投影算子，简称为投影算子．称 $L$ 为 $P$ 的投影子空间．

容易证明下面的性质：

1° $P$ 是有界线性算子且 $P$ 的范数满足：$\|P\|=0$ 或 $1$．

先证 $P$ 的线性．设 $x$、$y\in\mathfrak{U}$，作直交分解

$$x=x_1+x_2;\ y=y_1+y_2\ \ (x_1、y_1\in L;\ x_2、y_2\in L^{\perp}).$$

于是对任意的数 $\alpha$、$\beta$，有

$$\alpha x+\beta y=(\alpha x_1+\beta y_1)+(\alpha x_2+\beta y_2),$$

其中 $\alpha x_1+\beta y_1\in L$，$\alpha x_2+\beta y_2\in L^{\perp}$．因此

$$P(\alpha x+\beta y)=\alpha x_1+\beta y_1=\alpha Px+\beta Py.$$

故 $P$ 为线性的．

现在证明 $P$ 有界．若 $L=\{\theta\}$，$\|P\|$ 显然等于零．今设 $L\neq\{0\}$．由投影算子的定义，$Px=x_1$，于是 $\|Px\|=\|x_1\|\leqslant\|x\|$，故 $\|P\|\leqslant 1$．任取 $x\in L$，$x\neq\theta$，由 $Px=x$，有 $\|P\|\|x\|\geqslant\|Px\|=\|x\|$，于是 $\|P\|\geqslant 1$，因此 $\|P\|=1$．

2° 若 $P$ 为闭子空间 $L$ 上的投影算子，则 $I-P$ 为 $L^{\perp}$ 上的投影算子．

性质 2° 由定义直接导出．

**定理 3.1** $\mathfrak{U}$ 上的有界线性算子 $P$ 为投影算子的充分必要条件是

(i) $P$ 是自共轭的；

(ii) $P$ 是幂等的：$P^2=P$．

**证** (i) 的必要性．设 $P$ 为某一闭子空间 $L$ 上的投影算子．任取 $x$、$y\in\mathfrak{U}$，作直交分解：

$$x=x_1+x_2;\ y=y_1+y_2(x_1、y_1\in L;\ x_2、y_2\in L^{\perp}).$$

于是

$$(Px,y)=(x_1,y_1+y_2)=(x_1,y_1);$$

$$(x,Py)=(x_1+x_2,y_1)=(x_1,y_1).$$

故 $(Px,y)=(x,Py)$，因此 $P$ 为对称的从而为自共轭的.

(ii) 的必要性. 因对一切 $x\in\mathfrak{U}$,

$$P^2x=P(Px)=Px_1=x_1=Px,$$

故 $P^2=P$. 必要性证毕.

充分性 记 $P$ 的值域为 $L$，记 $I-P$ 的零空间为 $\mathfrak{N}$. 由条件 (ii)，对任何 $x\in\mathfrak{U}$，有

$$(I-P)Px=(P-P^2)x=\theta.$$

故 $Px\in\mathfrak{N}$，于是 $L\subset\mathfrak{N}$. 反之，设 $x\in\mathfrak{N}$，由 $(I-P)x=\theta$，得出 $x=Px\in L$. 因此 $\mathfrak{N}\subset L$，所以 $L=\mathfrak{N}$. 由于 $\mathfrak{N}$ 闭，故 $L$ 也闭. 任取 $x$、$y\in\mathfrak{U}$，则

$$(x-Px,Py)=(Px-P^2x,y)=0. \tag{1}$$

当 $y$ 跑遍 $\mathfrak{U}$ 时，$Py$ 跑遍 $L$. 因此(1)式表明 $x-Px\perp L$，令

$$Px=x_1,\ x-Px=x_2,$$

则 $x=x_1+x_2$，这里 $x_1\in L$, $x_2\in L^{\perp}$. 按照定义，$P$ 是 $L$ 上的投影算子. 证毕.

**推论 1** 设 $P$ 为投影算子，则 $P$ 为正算子.

**证** 由定理 3.1(i)，$P$ 自共轭. 由定理 3.1(ii)，对任何 $x\in\mathfrak{U}$,

$$(Px,x)=(P^2x,x)=(Px,Px)=\|Px\|^2\geq 0,$$

故 $P$ 为正算子.

**推论 2** 复 Hilbert 空间 $\mathfrak{U}$ 上的有界线性算子 $P$ 为投影算子的充分必要条件是对任意的 $x\in\mathfrak{U}$，有

$$\|Px\|^2=(Px,x). \tag{2}$$

**证** 必要性. 设 $P$ 为投影算子，则

$$\|Px\|^2=(Px,Px)=(P^2x,x)=(Px,x).$$

充分性 (2)式表明对任一 $x\in\mathfrak{U}$, $(Px,x)$ 为实数且 $\geq 0$，因此 $P$ 是正算子. 再将(2)写成

$$(Px,x)=(Px,Px)=(P^2x,x)$$

并令 $Q=P^2-P$，则 $Q$ 自共轭且对一切 $x\in\mathfrak{U}$，有

$$(Qx,x)=0.$$

由 § 2自共轭算子性质2° 中关于算子的极化恒等式(第265页)，对一切 $x$、$y\in\mathfrak{U}$，有$(Qx,y)=0$，故 $Q=\theta$. 因此 $P^2=P$，$P$ 为投影算子. 证毕.

**例1** 设$\{e_n\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$是 $l^2$ 空间中的完备标准直交系：

$$e_n=\{\underbrace{0,\cdots 0,}_{n}1,0,\cdots\}\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

对 $x=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n e_n\in l^2$，令

$$Px=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_{2k}e_{2k}.$$

则$P$为投影算子，其投影子空间是由$\{e_{2k}\}$ $(k=1,2,3,\cdots)$ 张成的子空间的闭包.

**例2** 设 $F$ 为可测集，$F\subset[a,b]$. 考察 $L^2[a,b]$ 上的算子 $P_F$：

$$(P_F x)(t)=\chi_F(t)x(t),$$

这里 $\chi_F$ 是$F$的特征函数，$x\in L^2[a,b]$. 则$P_F$ 是投影算子，称它是与$F$对应的投影算子.

**3.2 投影算子的代数运算**

现在研究投影算子的代数运算. 一般说来，两个投影算子的和、差、积并不一定是投影算子，而需补充适当的条件，现在就来研究这些条件. 仍旧设 $\mathfrak{U}$ 为 Hilbert 空间.

**定义 3.2** $\mathfrak{U}$ 中两个相互直交的子空间 $L$、$M$ 的直接和称为直交和，记为 $L\dot{+}M$.

由第七章习题第 30 题，当 $L$、$M$ 都是闭子空间时，$L\dot{+}M$也是闭子空间.

**定理 3.2** 投影算子 $P_1$、$P_2$ 的和仍为投影算子的充分必要条件是下列条件之一成立:

(i) $P_1P_2=\theta$(或 $P_2P_1=\theta$);

(ii) $P_1$ 的投影子空间 $L_1$ 与 $P_2$ 的投影子空间 $L_2$ 直交. 当 $P_1+P_2$ 是投影算子时,其投影子空间是 $L_1\dot{+}L_2$.

**证** 设 $P_1+P_2$ 是投影算子. 任取 $x\in L_2$, 则

$$\begin{aligned}\|x\|^2&=\|P_2x\|^2\leqslant\|P_1x\|^2+\|P_2x\|^2\\&=(P_1x,x)+(P_2x,x)=((P_1+P_2)x,x)\\&=\|(P_1+P_2)x\|^2\leqslant\|x\|^2.\end{aligned}$$

于是 $\|x\|^2=\|P_2x\|^2=\|P_1x\|^2+\|P_2x\|^2$. 因此

$$\|P_1x\|=0. \tag{3}$$

如果 $x\in\mathfrak{U}$, 则 $P_2x\in L_2$. 由(3), $\|P_1P_2x\|=0$, 即 $P_1P_2x=\theta$, 因此 $P_1P_2=\theta$. 再由 $P_2P_1=P_2^*P_1^*=(P_1P_2)^*$ 可知, $P_2P_1=\theta$. (i)成立.

现设(i)成立. 任取 $x_1\in L_1$、$x_2\in L_2$, 则

$$(x_1,x_2)=(P_1x_1,P_2x_2)=(P_2P_1x_1,x_2)=0.$$

故 $L_1\perp L_2$. (ii)成立

最后设(ii)成立. 记 $L=L_1\dot{+}L_2$, 因 $L_1$、$L_2$ 均为闭子空间, 由第七章习题第 30 题, $L$ 是闭的. 设 $P$ 是以 $L$ 为投影子空间的投影算子. 任取 $x\in\mathfrak{U}$, 则 $Px\in L$, 于是有等式

$$Px=y+z(\text{其中 } y\in L_1,\ z\in L_2). \tag{4}$$

因此

$$x=Px+(I-P)x=y+[z+(I-P)x],$$

其中 $y\in L_1$, $z+(I-P)x\perp L_1$. 由此可知 $y$ 是 $x$ 在 $L_1$ 上的直交投影. 同理, $z$ 是 $x$ 在 $L_2$ 上的直交投影. 因此 $P_1x=y$, $P_2x=z$. 代入(4)式, 可得 $Px=P_1x+P_2x=(P_1+P_2)x$. 故 $P=P_1+P_2$, $P_1+P_2$ 是投影算子且以 $L_1\dot{+}L_2$ 为投影子空间. 证毕.

当两个投影算子的投影子空间直交时, 我们便说这两个投影

算子直交。于是定理 3.2(ii)又可改述为：投影算子 $P_1$、$P_2$ 的和 $P_1+P_2$ 为投影算子的充分必要条件是 $P_1$、$P_2$ 直交。

**定理3.3** **投影算子 $P_1$、$P_2$ 的积 $P_1P_2$ 为投影算子的充分必要条件是 $P_1P_2=P_2P_1$，即 $P_1$、$P_2$ 可换。当 $P_1P_2$ 是投影算子时，其投影子空间是 $L_1\cap L_2$，这里 $L_1$、$L_2$ 仍分别表示 $P_1$、$P_2$ 的投影子空间。**

**证** 必要性。设 $P_1P_2$ 是投影算子，则 $P_1P_2$ 自共轭，因此

$$P_2P_1=P_2^*P_1^*=(P_1P_2)^*=P_1P_2,$$

故 $P_1$、$P_2$ 可换。

充分性。设 $P_1$、$P_2$ 可换，则

$$(P_1P_2)^*=P_2^*P_1^*=P_2P_1=P_1P_2,$$

故 $P_1P_2$ 自共轭。又因

$$(P_1P_2)^2=(P_1P_2)(P_1P_2)=P_1^2P_2^2=P_1P_2,$$

由定理 3.1，$P_1P_2$ 是投影算子。

现在证明第二个结论。设 $P_1P_2$ 为投影算子，$L$ 为 $P_1P_2$ 的投影子空间。任取 $x\in L$，由 $x=P_1P_2x=P_1(P_2x)\in L_1$ 可知，$L\subset L_1$。因 $P_1$、$P_2$ 可换，于是有 $x=P_2(P_1x)\in L_2$，故 $L\subset L_2$。因此 $L\subset L_1\cap L_2$。反之，设 $x\in L_1\cap L_2$，则 $P_1P_2x=P_1x=x$，故 $x\in L$，这表明 $L_1\cap L_2\subset L$。因此 $L=L_1\cap L_2$。证毕。

**定理 3.4** **两个投影算子 $P_1$、$P_2$ 的差 $P_1-P_2$ 是投影算子的充分必要条件是下列三条件之一成立：**

**(i) $L_2\subset L_1$，这里 $L_1$、$L_2$ 仍分别表示 $P_1$、$P_2$ 的投影子空间；**

**(ii) $P_1P_2=P_2$（或 $P_2P_1=P_2$）；**

**(iii) $P_2\leqslant P_1$。**

**当 $P_1-P_2$ 是投影算子时，$P_1-P_2$ 的投影子空间是 $L_2$ 在 $L_1$ 中的直交余。**

**证** 设(i)成立。任取 $x\in H$，则 $P_2x\in L_2\subset L_1$，于是

$$P_1P_2x=P_1(P_2x)=P_2x.$$

故 $P_1P_2=P_2$，取共轭有 $P_2P_1=P_2$. (ii)成立.

再设(ii)成立. 任取 $x\in\mathfrak{U}$，则

$$(P_2x,x)=\|P_2x\|^2=\|P_2P_1x\|^2\leqslant\|P_2\|^2\|P_1x\|^2$$
$$\leqslant\|P_1x\|^2=(P_1x,x).$$

故 $P_2\leqslant P_1$. (iii)成立.

现在设(iii)成立. $P_1$、$P_2$ 的零空间分别记为 $\mathfrak{N}_1$、$\mathfrak{N}_2$. 任取 $x\in\mathfrak{N}_1$，由

$$0\leqslant(P_2x,x)\leqslant(P_1x,x)=0,$$

可得 $(P_2x,x)=0$，因此

$$\|P_2x\|^2=(P_2x,x)=0,$$

$P_2x=\theta$. 故 $x\in\mathfrak{N}_2$，这表明 $\mathfrak{N}_1\subset\mathfrak{N}_2$. 于是

$$L_2=\mathfrak{N}_2^\perp\subset\mathfrak{N}_1^\perp=L_1.$$

(i)成立. 至此我们证明了(i)、(ii)、(iii)等价.

现在证明，$P_1-P_2$ 为投影算子这一事实与(i)、(ii)、(iii)中之一等价.

先设 $P_1-P_2$ 是投影算子. 令 $P_3=P_1-P_2$，则 $P_1=P_2+P_3$. $P_1$、$P_2$、$P_3$ 均为投影算子，由定理 3.2，$P_2$ 的投影子空间必包含在 $P_1$ 的投影子空间中，即 $L_2\subset L_1$. 因此(i)成立. 而且 $P_1-P_2$ 的投影子空间(即 $P_3$ 的投影子空间)是 $L_2$ 在 $L_1$ 中的直交余.

其次设(ii)成立. 则

$$(P_1-P_2)^2=P_1^2-P_1P_2-P_2P_1+P_2^2$$
$$=P_1-P_2-P_2+P_2=P_1-P_2.$$

再由 $P_1-P_2$ 的自共轭性可知，$P_1-P_2$ 是投影算子. 定理全部证毕.

**例 3** 设 $F_1$、$F_2$ 均为可测集且均为$[a, b]$的子集. 考察空间 $L^2[a,b]$上与 $F_i$ 对应的投影算子 $P_{F_i}(i=1,2)$，则

(i) $P_{F_1}+P_{F_2}$ 为投影算子的充分必要条件是 $m(F_1\cap F_2)$

$=0$，当 $P_{F_1}+P_{F_2}$ 为投影算子时，其投影子空间为 $L^2(F_1\cup F_2)$，在这里，我们将 $L^2(F_1\cup F_2)$ 看成 $L^2[a,b]$ 的子空间，$L^2(F_1\cup F_2)$ 中的函数在 $[a,b]\setminus(F_1\cup F_2)$ 上几乎处处为零.

(ii) $P_{F_1}P_{F_2}$ 是以 $L^2(F_1\cap F_2)$ 为投影子空间的投影算子.

(iii) $P_{F_1}-P_{F_2}$ 为投影算子的充分必要条件是 $m(F_2\setminus F_1)=0$，当 $P_{F_1}-P_{F_2}$ 是投影算子时，其投影子空间是 $L^2(F_1\setminus F_2)$.

在 (ii)、(iii) 中，空间 $L^2(F_1\cap F_2)$、$L^2(F_1\setminus F_2)$ 也看成 $L^2[a,b]$ 的子空间，它们中的函数分别在 $[a,b]\setminus(F_1\cap F_2)$ 及 $[a,b]\setminus(F_1\setminus F_2)$ 上几乎处处等于零.

## §4 谱系与自共轭算子的谱分解定理

在这一节中，我们研究自共轭算子的谱分解定理并将获得相当完整的结论. 作为先导，现在先引入一般的谱系概念并研究其基本性质. 在这一节中，我们将始终假定 $H$ 是复 Hilbert 空间.

### 4.1 谱系的基本概念

先研究几个例子.

**例 1** 设 $T$ 是 $\mathbf{C}^n$ 上的自共轭算子. 由线性代数可知，$T$ 存在 $n$ 个特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，其中某些个可能相等. 设 $e_j$ 是 $T$ 对应于 $\lambda_j$ 的特征向量而且设 $\{e_1, e_2,\cdots, e_n\}$ 是 $\mathbf{C}^n$ 中的一个标准直交系. 那么

$$Te_j=\lambda_j e_j \quad (j=1,2,\cdots,n).$$

记 $P_j$ 为 $\mathbf{C}^n$ 到由 $e_j$ 张成的一维子空间上的投影算子. 于是对于任一 $x=\sum\limits_{j=1}^{n}\xi_j e_j$，有 $P_j x=\xi_j e_j$，因此

$$Tx=T\left(\sum_{j=1}^{n}\xi_j e_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\xi_j Te_j$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\xi_j e_j=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j P_j x.$$

故 $T$ 可表示成 $T=\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j P_j$. 而 $P_j(j=1, 2, \cdots, n)$ 则满足 $\sum\limits_{j=1}^{n}P_j=I$.

**例 2** 设 $\{\lambda_n\}(n=1,2,3,\cdots)$ 是一有界实数列，$\{e_n\}$ 为复 $l^2$ 中的完备标准直交系：

$$e_n=\{\underbrace{0,\cdots,0,1}_{n},0\cdots\}\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

在 $l^2$ 中定义算子 $T$ 如下：对任何 $x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\xi_n e_n$,

$$Tx=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\lambda_n e_n, \tag{1}$$

则 $T$ 为自共轭算子. 令 $P_n$ 为 $l^2$ 到由 $e_n$ 张成的一维子空间上的投影算子，则 $P_n x=\xi_n e_n$. 由(1)，$Tx=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n P_n x$. 这个等式表明 $\sum\limits_{n=1}^{m}\lambda_n P_n$ 在算子强收敛意义下收敛于 $T$(当 $m\to\infty$ 时)，因此

$$T=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n P_n.$$

另一方面，显然有

$$I=\sum_{n=1}^{\infty}P_n.$$

在例 1 中，所讨论的算子只有特征值，在例 2 中，除了 $\lambda_n(n=1, 2,3,\cdots)$ 是 $T$ 的特征值外，$\overline{\{\lambda_n\}}\setminus\{\lambda_n\}$ 中所有的点都属于 $T$ 的连续谱.

**例 3** 设 $\varphi(\cdot)$ 为 $[a,b]$ 上的连续实函数，在复 $L^2[a,b]$ 中定义算子 $T$ 如下：对任何 $x\in L^2[a,b]$，令

$$(Tx)(t)=\varphi(t)x(t).$$

容易验证 $T$ 为自共轭算子，现在研究 $T$ 的谱. 任取复数 $\lambda_0$.

令
$$m=\min_{t\in[a,b]}\varphi(t),\quad M=\max_{t\in[a,b]}\varphi(t).$$

当 $\lambda_0\overline{\in}[m,M]$ 时，$\dfrac{1}{\lambda_0-\varphi(t)}$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数. 令 $S_{\lambda_0}$ 为由下述等式定义的算子:

$$(S_{\lambda_0}x)(t)=\frac{1}{\lambda_0-\varphi(t)}x(t),$$

则 $S_{\lambda_0}$ 有界且为 $\lambda_0I-T$ 的逆算子，故 $\lambda_0\in\rho(T)$.

今设 $\lambda_0\in[m,M]$. 令 $e_{\lambda_0}=\{t:\varphi(t)=\lambda_0,t\in[a,b]\}$，则 $e_{\lambda_0}$ 为 $[a,b]$ 的闭子集. 设 $x\in L^2[a,b]$ 满足

$$(\lambda_0I-T)x=0.$$

于是

$$[\lambda_0-\varphi(t)]x(t)=0\quad(\text{对于几乎所有的 } t\in[a,b]).\qquad(2)$$

若 $me_{\lambda_0}=0$，则 $x(t)$ 几乎处处等于零，因此 $\lambda_0$ 不是 $T$ 的特征值. 今证明 $\lambda_0$ 属于 $T$ 的连续谱. 对任一自然数 $n$，令

$$\check{e}_{\lambda_0,n}=\left\{t:\left|\varphi(t)-\lambda_0\right|<\frac{1}{n},\ t\in[a,b]\right\},$$

则 $\check{e}_{\lambda_0,n}$ 是非空开集，故 $m\check{e}_{\lambda_0,n}>0$. 作区间 $[a,b]$ 上的函数

$$x_n(t)=\begin{cases}1/[m\check{e}_{\lambda_0,n}]^{1/2}, & \text{当 } t\in\check{e}_{\lambda_0,n};\\ 0, & \text{当 } t\in[a,b]\setminus\check{e}_{\lambda_0,n},\end{cases}$$

则 $x_n\in L^2[a,b]$ 且 $\|x_n\|=1$. 另一方面

$$\|(\lambda_0I-T)x_n\|=\left(\int_a^b|\lambda_0-\varphi(t)|^2|x_n(t)|^2dt\right)^{1/2}\leqslant\frac{1}{n},$$

故 $\lambda_0$ 不可能是 $T$ 的正则值，于是 $\lambda_0$ 属于 $T$ 的连续谱.

若 $me_{\lambda_0}>0$，取 $x$ 为 $e_{\lambda_0}$ 的特征函数，则 $x\in L^2[a,b]$，$x\neq\theta$ 且 $x$ 满足(2)，故 $\lambda_0$ 是 $T$ 的特征值.

对于例 3 来说，要想象例 1 或例 2 那样，用有限和或级数来表

示算子$T$是不现实的．面对这类复杂的情况，必需寻求新的更一般的形式．谱系就是在这样的背景下提出的．

**定义4.1** 设在$\mathfrak{U}$上有一依赖于实参数$\lambda$的投影算子族$\{E_\lambda\}$，满足下面的条件：

(i) 当$\lambda$增大时，$E_\lambda$不减，即当$\lambda<\mu$时，$E_\lambda\leqslant E_\mu$；

(ii) $E_\lambda$关于$\lambda$在算子强收敛意义下右连续，即

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0+0}E_\lambda=E_{\lambda_0}.$$

在算子强收敛意义下成立．记$E_{\lambda_0+0}=\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0+0}E_\lambda$.

(iii) 在算子强收敛意义下，

$$\lim_{\lambda\to-\infty}E_\lambda=\theta,\qquad \lim_{\lambda\to+\infty}E_\lambda=I.$$

那么称$\{E_\lambda\}$为一个谱系.

对于谱系$\{E_\lambda\}$，如果存在实数$m<M$使得当$\lambda<m$时，$E_\lambda=\theta$，当$\lambda\geqslant M$时，$E_\lambda=I$，则称$\{E_\lambda\}$为区间$[m,M]$上的谱系.

由定义及投影算子的一系列性质，谱系具有下列性质：

1° 对任意的$\lambda_0$，$E_{\lambda_0+0}=\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0+0}E_\lambda$在算子强收敛意义下存在，且$E_{\lambda_0\pm0}$是投影算子；

2° 对任意的$\lambda$及$\mu$，当$\lambda\leqslant\mu$时，$E_\lambda E_\mu=E_\mu E_\lambda=E_\lambda$；

3° 对任意的左开右闭区间$\Delta=(\alpha,\beta]$，令$E(\Delta)=E_\beta-E_\alpha$，则$E(\Delta)$是投影算子；

4° 当$\Delta_1\cap\Delta_2=\Delta$时，$E(\Delta_1)E(\Delta_2)=E(\Delta)$.

我们来考察例1、例2、例3中几个算子对应的谱系.

**例4** 1° 考察例1中的算子$T$，它的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$以及投影算子$P_1,P_2,\cdots,P_n$均为已知的．对给定的实数$\lambda$，令

$$E_\lambda=\begin{cases}\sum\limits_{\lambda_j\leqslant\lambda}P_j, & \text{若 } \lambda\geqslant\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\lambda_j;\\ \theta, & \text{若 } \lambda<\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\lambda_j.\end{cases}$$

不难验证$\{E_\lambda\}$是一个谱系.

**2°** 考察例 2 中的算子 $T$,它的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\cdots$以及投影算子 $P_1,P_2,\cdots,P_n\cdots$也均为已知的. 对给定的实数 $\lambda$,令

$$E_\lambda=\begin{cases}\sum\limits_{\lambda_j\leqslant\lambda}P_j, & \text{若 } \lambda\geqslant\inf\limits_j\lambda_j;\\ \theta, & \text{若 } \lambda<\inf\limits_j\lambda_j,\end{cases}$$

则$\{E_\lambda\}$也是谱系.

我们只证明$\{E_\lambda\}$满足定义 4.1 中的条件(ii), 因为条件(i)是显然的,条件(iii)的证法与条件(ii)类似,故均从略.

设 $\lambda>\lambda_0$,由定义

$$E_\lambda-E_{\lambda_0}=\sum_{\lambda_0<\lambda_j\leqslant\lambda}P_j.$$

因此为了证明在算子强收敛意义下, $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0+0}E_\lambda=E_{\lambda_0}$成立, 只需证明在算子强收敛意义下,有

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0+0}\sum_{\lambda_0<\lambda_j\leqslant\lambda}P_j=0. \tag{3}$$

因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}P_n=I$ 在算子强收敛意义下成立, 任取$x\in\mathrm{H}$, 并任取 $\varepsilon>0$,存在 $j_0$ 使

$$\sum_{j>j_0}\|P_jx\|^2<\varepsilon. \tag{4}$$

再令 $\delta=\min\limits_{\substack{1\leqslant j\leqslant j_0\\ \lambda_j>\lambda_0}}|\lambda_j-\lambda_0|$,则 $\delta>0$. 于是当 $0<\lambda-\lambda_0<\delta$ 时,一切满足 $\lambda_0<\lambda_j\leqslant\lambda$ 的$\lambda_j$ 也同时满足 $j>j_0$. 由(4),

$$\sum_{\lambda_0<\lambda_j\leqslant\lambda}\|P_jx\|^2<\varepsilon\quad(\text{这里}0<\lambda-\lambda_0<\delta).$$

故(3)成立. 因此在算子强收敛意义下,$\{E_\lambda\}$右连续. 于是$\{E_\lambda\}$是一个谱系.

**例 5** 现在考察例 3 中的算子 $T$. 对任给的实数 $\lambda$, 令 $\mathscr{X}_\lambda$ 为集合 $\mathscr{E}_\lambda=\{t:\varphi(t)\leqslant\lambda,\ t\in[a,b]\}$ 的特征函数. 通过 $\mathscr{X}_\lambda(t)$ 作算子 $E_\lambda$ 如下:

$$(E_\lambda x)(t)=\mathscr{X}_\lambda(t)x(t),$$

则 $\{E_\lambda\}$ 是一个谱系.

我们只验证定义 4.1 中的条件(ii).

任给实数 $\lambda_0$. 由于 $\bigcap\limits_{\lambda>\lambda_0}\mathscr{E}_\lambda=\mathscr{E}_{\lambda_0}$, 故 $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0+0}\mathscr{X}_\lambda(t)=\mathscr{X}_{\lambda_0}(t)$ 对于所有的 $t\in[a,b]$ 成立. 任取 $x\in L^2[a,b]$, 由 Lebesgue 控制收敛定理, 有

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0+0}\|E_\lambda x-E_{\lambda_0}x\|^2=\lim_{\to\lambda_0+0}\int_a^b|\mathscr{X}_\lambda(t)-\mathscr{X}_{\lambda_0}(t)|^2|x(t)|^2dt=0.$$

故 $\{E_\lambda\}$ 右连续. 因此 $\{E_\lambda\}$ 是一个谱系.

**定理 4.1** **设 $\{E_\lambda\}$ $(-\infty<\lambda<\infty)$ 是空间 $\mathfrak{U}$ 中一个投影算子族. 那么 $\{E_\lambda\}$ 为谱系的充分必要条件是对任何 $x\in\mathfrak{U}$, 函数 $(E_\lambda x,x)$ 满足**

**(i) $(E_\lambda x,x)$ 是不减的;**

**(ii) $(E_\lambda x,x)$ 是右连续的;**

**(iii) $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}(E_\lambda x,x)=0$, $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}(E_\lambda x,x)=\|x\|^2$.**

**证** 必要性是显然的.

现在证明充分性.

条件(i). 设 $\lambda<\mu$, 于是 $(E_\lambda x,x)\leqslant(E_\mu x,x)$. 故 $E_\lambda\leqslant E_\mu$.

条件(ii). 任给 $\lambda_0$ 并设 $\lambda>\lambda_0$. 于是

$$\begin{aligned}\|(E_\lambda-E_{\lambda_0})x\|^2&=((E_\lambda-E_{\lambda_0})x,(E_\lambda-E_{\lambda_0})x)\\&=((E_\lambda-E_{\lambda_0})x,x)\to0\quad(\text{当 }\lambda\to\lambda_0+0\text{ 时}),\end{aligned}$$

故 $\{E_\lambda\}$ 右连续.

条件(iii). 由

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\|E_\lambda x\|^2=\lim_{\lambda\to-\infty}(E_\lambda x,\ E_\lambda x)=\lim_{\lambda\to-\infty}(E_\lambda x,x)=0,$$

可得 $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}E_\lambda=\theta$. 类似地，$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E_\lambda=I$.

故$\{E_\lambda\}$是一个谱系. 证毕.

**4.2　自共轭算子的谱分解定理**

现在着手讨论本章的主要内容之一——自共轭算子的谱分解定理.

设$T$为自共轭算子，$\lambda$为实数，记 $T_\lambda=\lambda I-T$.

**定理 4.2　设$T$为空间$\mathfrak{U}$上的自共轭算子，则存在投影算子族$\{E_\lambda\}(-\infty<\lambda<\infty)$满足下列条件：**

**(i) 对给定的$\lambda$，如果 $T_\lambda x=\theta$，则 $E_\lambda x=x$；**

**(ii) 对任何$\lambda$，均有 $T_\lambda E_\lambda\geqslant\theta$，$T_\lambda(I-E_\lambda)\leqslant\theta$；**

**(iii) 凡与$T$可换的有界线性算子均与 $E_\lambda$ 可换.**

**证**　令 $S_\lambda$ 为 $T_\lambda^2$ 的正平方根，再记 $E_\lambda$ 是 $S_\lambda-T_\lambda$ 的零空间 $\mathfrak{N}_\lambda$ 上的投影算子. 今证$\{E_\lambda\}$ $(-\infty<\lambda<\infty)$ 满足定理的全部条件.

(i) 若对某个 $x\in\mathfrak{U}$，有 $T_\lambda x=\theta$，则 $S_\lambda^2x=T_\lambda^2x=\theta$，于是

$$\|S_\lambda x\|^2=(S_\lambda x,S_\lambda x)=(S_\lambda^2x,x)=0,$$

故 $S_\lambda x=\theta$，从而$(S_\lambda-T_\lambda)x=\theta$. 根据 $E_\lambda$ 的定义，$E_\lambda x=x$.

在证(ii)之前，先证(iii). 设$A$为与$T$可换的有界线性算子，则$A$与$T_\lambda$从而与$S_\lambda$可换. 任取 $x\in\mathfrak{U}$，有

$$(S_\lambda-T_\lambda)AE_\lambda x=A(S_\lambda-T_\lambda)E_\lambda x=\theta,$$

这表明 $AE_\lambda x\in\mathfrak{N}_\lambda$，于是 $AE_\lambda x=E_\lambda AE_\lambda x$. 因$x$任意，故

$$AE_\lambda=E_\lambda AE_\lambda. \tag{5}$$

又因 $AT=TA$，两边同取共轭算子，得

$$TA^*=A^*T.$$

故 $A^*$ 与$T$因而与 $T_\lambda$、$S_\lambda$ 均可换，用证明式(5)的方法可以证明

$$A^*E_\lambda=E_\lambda A^*E_\lambda. \tag{6}$$

再对(6)的左右两边同取共轭算子，有

$$E_\lambda A = E_\lambda A E_\lambda.$$

比较(5)、(6)可知，$A$ 与 $E_\lambda$ 可换.

现在证明(ii). 由于 $S_\lambda$、$T_\lambda$ 与 $T$ 可换，由(iii)，$S_\lambda$、$T_\lambda$ 与 $E_\lambda$ 可换. 再注意到对任何 $x \in \mathfrak{U}$，

$$(S_\lambda - T_\lambda) E_\lambda x = \theta,$$

故 $T_\lambda E_\lambda = S_\lambda E_\lambda$. 由于 $S_\lambda$、$E_\lambda$ 是可换的正算子，由定理 2.6 推论 2 可知，$S_\lambda E_\lambda$ 为正算子，于是 $T_\lambda E_\lambda$ 也是正算子，即 $T_\lambda E_\lambda \geqslant \theta$.

再由 $S_\lambda^2 = T_\lambda^2$ 以及 $S_\lambda$、$T_\lambda$ 可换，得

$$(S_\lambda - T_\lambda)(S_\lambda + T_\lambda) = \theta,$$

于是对任何 $x \in \mathfrak{U}$，$(S_\lambda + T_\lambda) x \in \mathfrak{N}_\lambda$，故

$$E_\lambda (S_\lambda + T_\lambda) x = (S_\lambda + T_\lambda) x,$$

移项得
$$-T_\lambda (I - E_\lambda) x = S_\lambda (I - E_\lambda) x.$$

注意到 $S_\lambda$，$I - E_\lambda$ 也为可换的正算子，故 $S_\lambda (I - E_\lambda)$ 为正算子. 因此 $-T_\lambda (I - E_\lambda)$ 为正算子，这就是说 $T_\lambda (I - E_\lambda) \leqslant \theta$. 证毕.

**定理 4.3** 定理 4.2 中的 $\{E_\lambda\}$ 是区间 $[m, M]$ 上的一个谱系，这里 $m$、$M$ 分别是 $T$ 的下界、上界.

**证** (i) 设 $\lambda < \mu$，我们的目的是证明 $E_\lambda \leqslant E_\mu$. 由定理 3.4，这与证明

$$E_\lambda = E_\lambda E_\mu \tag{7}$$

等价.

任取 $x \in \mathfrak{U}$，令 $y = E_\lambda (I - E_\mu) x$. 因 $E_\lambda$、$E_\mu$ 可换，由定理 3.3，$E_\lambda (I - E_\mu)$ 为投影算子，而且 $y$ 属于 $E_\lambda$ 的投影子空间与 $I - E_\mu$ 的投影子空间的交中. 因此 $E_\lambda y = y$，$(I - E_\mu) y = y$. 由定理 4.2，

$$(T_\lambda y, y) = (T_\lambda E_\lambda y, y) \geqslant 0; \tag{8}$$

$$(T_\mu y, y) = (T_\mu (I - E_\mu) y, y) \leqslant 0. \tag{9}$$

(9)减去(8)，得

$$(\mu-\lambda)(y,y)\leqslant 0.$$

但 $\lambda<\mu$，故 $y=\theta$. 因此 $E_\lambda(I-E_\mu)=\theta$. (7)成立. (i)证毕.

(ii) 设 $\lambda_0<\lambda$. 当 $\lambda$ 下降趋向 $\lambda_0$ 时，投影算子 $E_\lambda-E_{\lambda_0}$ 不增大，由定理 2.5，$E_\lambda-E_{\lambda_0}$ 必在算子强收敛意义下收敛于某一极限. 关键在于证明这个极限等于零. 因

$$E_\lambda(E_\lambda-E_{\lambda_0})=E_\lambda-E_{\lambda_0}; \tag{10}$$

$$(I-E_{\lambda_0})(E_\lambda-E_{\lambda_0})=E_\lambda-E_{\lambda_0}, \tag{11}$$

故

$$T_\lambda(E_\lambda-E_{\lambda_0})=T_\lambda E_\lambda(E_\lambda-E_{\lambda_0})\geqslant\theta; \tag{12}$$

$$T_{\lambda_0}(E_\lambda-E_{\lambda_0})=T_{\lambda_0}(I-E_{\lambda_0})(E_\lambda-E_{\lambda_0})\leqslant\theta. \tag{13}$$

由(12)、(13)可得

$$\lambda_0(E_\lambda-E_{\lambda_0})\leqslant T(E_\lambda-E_{\lambda_0})\leqslant\lambda(E_\lambda-E_{\lambda_0}). \tag{14}$$

再令 $\lambda\to\lambda_0+0$，注意到极限 $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0+0}E_\lambda=E_{\lambda_0+0}$ 存在，便有

$$\lambda_0(E_{\lambda_0+0}-E_{\lambda_0})=T(E_{\lambda_0+0}-E_{\lambda_0})$$

即
$$(\lambda_0I-T)(E_{\lambda_0+0}-E_{\lambda_0})=\theta.$$

任取 $x\in H$，令 $y=(E_{\lambda_0+0}-E_{\lambda_0})x$，则

$$(\lambda_0I-T)y=(\lambda_0I-T)(E_{\lambda_0+0}-E_{\lambda_0})x=\theta.$$

由定理 4.2，$E_{\lambda_0}y=y$. 因 $E_{\lambda_0}(E_{\lambda_0+0}-E_{\lambda_0})x=(E_{\lambda_0}-E_{\lambda_0})x=\theta$，故

$$y=E_{\lambda_0}y=E_{\lambda_0}(E_{\lambda_0+0}-E_{\lambda_0})x=\theta.$$

因此 $E_{\lambda_0+0}-E_{\lambda_0}=\theta$，$\{E_\lambda\}$ 右连续.

(iii) 设 $\lambda<m$. 若 $E_\lambda\neq\theta$，则存在 $x\in H$ 满足 $\|x\|=1$，$E_\lambda x=x$. 于是

$$(T_\lambda E_\lambda x,x)=(T_\lambda x,x)=\lambda-(Tx,x)\leqslant\lambda-m<0,$$

与 $T_\lambda E_\lambda\geqslant\theta$ 矛盾. 故 $E_\lambda=\theta$.

类似地，利用 $T_\lambda(I-E_\lambda)\leqslant\theta$ 以及 $\{E_\lambda\}$ 的右连续性，可以证明当 $\lambda\geqslant M$ 时，$E_\lambda=I$. 证毕

我们称定理 4.2 及定理 4.3 中的 $\{E_\lambda\}$ 为 $T$ 生成的谱系，简称

为 $T$ 的谱系.

有了谱系的概念并证明了任何自共轭算子都有谱系后，便可以建立自共轭算子的谱分解定理.

**定理 4.4 任何自共轭算子 $T$ 都可通过它的谱系 $\{E_\lambda\}$ 表成**

$$T=\int_{m-0}^{M}\lambda dE_\lambda \tag{15}$$

**其中 $m$、$M$ 分别是 $T$ 的下界、上界，凡与 $T$ 可换的算子均与 $E_\lambda(-\infty<\lambda<\infty)$ 可换，而积分则是积分和在算子范数意义下收敛的极限.**

**证** 任取正数 $\varepsilon_0$，将区间$[m-\varepsilon_0, M]$ 用分点 $\lambda_0=m-\varepsilon_0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n=M$ 分成区间 $\Delta_k$ 的并($k=0,1,\cdots,n-1$)，其中$\Delta_0=[\lambda_0,\lambda_1]$，$\Delta_k=(\lambda_k,\lambda_{k+1}]$($k=1,2,\cdots,n-1$). 令 $E(\Delta_k)=E(\lambda_{k+1})-E(\lambda_k)$. 由(14)，

$$\lambda_k E(\Delta_k)\leqslant TE(\Delta_k)\leqslant\lambda_{k+1}E(\Delta_k).$$

对 $k$ 求和并注意到$\sum_{k=0}^{n-1}E(\Delta_k)=I$，得

$$\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k E(\Delta_k)\leqslant T\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_{k+1}E(\Delta_k).$$

任取 $\mu_k\in\Delta_k$，则

$$\sum_{k=0}^{n-1}(\lambda_k-\mu_k)E(\Delta_k)\leqslant T-\sum_{k=0}^{n-1}\mu_k E(\Delta_k)\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}(\lambda_{k+1}-\mu_k)E(\Delta_k).$$

故对任一 $x\in\mathfrak{H}$，

$$\sum_{k=0}^{n-1}(\lambda_k-\mu_k)(E(\Delta_k)x,\ x)\leqslant\left(\left(T-\sum_{k=0}^{n-1}\mu_k E(\Delta_k)\right)x,x\right)$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}(\lambda_{k+1}-\mu_k)(E(\Delta_k)x,x),$$

令 $\delta=\max\limits_{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_k)$，则得

$$-\delta(x,x)\leqslant\left(\left(T-\sum_{k=0}^{n-1}\mu_k E(\Delta_k)\right)x,x\right)\leqslant\delta(x,x).$$

由定理 2.4 的推论，

$$\left\|T-\sum_{k=0}^{n-1}\mu_k E(\Delta_k)\right\|\leqslant\delta.$$

令 $\delta\to0$，积分和 $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\mu_k E(\Delta_k)$ 在算子范数意义下收敛于 $T$，即

$$T=\lim_{\delta\to0}\sum_{k=0}^{n-1}\mu_k E(\Delta_k)\ (\delta=\max_k(\lambda_{k+1}-\lambda_k)).$$

现在将右端的极限记为 $\int_{m-\varepsilon_0}^{M}\lambda dE_\lambda$，于是

$$T=\int_{m-\varepsilon_0}^{M}\lambda dE_\lambda.$$

由于当 $\lambda<m$ 时，$E_\lambda=\theta$，故上式右端的积分与 $\varepsilon_0>0$ 的取法无关，因此我们又可以将这个积分记为

$$T=\int_{m-0}^{M}\lambda dE_\lambda.$$

(15) 成立. 定理的第二个结论，即凡与 $T$ 可换的算子均与 $E_\lambda$ $(-\infty<\lambda<\infty)$ 可换，就是定理 4.2(iii). 证毕.

### 4.3 自共轭算子的算子演算

在 §4.2 中，我们证明了任一自共轭算子 $T$ 都有谱系，而且 $T$ 可以表示成积分 (15) 的形式. 现在我们要利用 $T$ 的谱系来建立 $T$ 的算子演算并进而讨论 $T$ 的谱的特征.

遵循前一段的记号. $T$ 为定义在空间 $\mathfrak{H}$ 上的自共轭算子，$M$、$m$ 分别是 $T$ 的上、下界，$\{E_\lambda\}$ 为 $T$ 的谱系. 任取 $x\in\mathfrak{H}$，由定理 4.1，$\|E_\lambda x\|^2$ 是 $\lambda$ 的单调上升右连续函数. 当 $\lambda<m$ 时，$\|E_\lambda x\|^2=0$，当

$\lambda \geq M$ 时，$\|E_\lambda x\|^2 = \|x\|^2$. 故 $\bigvee\limits_{m-\varepsilon_0}^{M}(\|E_\lambda x\|^2) = \|x\|^2$，这里 $\varepsilon_0 > 0$ 是给定的.

再任取 $y \in \mathfrak{H}$，由本章 § 2 中自共轭算子性质 2° 中关于算子的极化恒等式，$(E_\lambda x, y)$ 是 $\lambda$ 的有界复值右连续函数. 现在证明 $(E_\lambda x, y)$ 作为 $\lambda$ 的函数是囿变的且

$$\bigvee_{m-\varepsilon_0}^{M}((E_\lambda x, y)) \leq \|x\| \|y\|. \tag{16}$$

这里应当特别指出，对于复值函数也可以定义囿变概念，这只要将第四章实囿变函数定义中的绝对值换成复数的模就行了. 取分点 $\lambda_0 = m - \varepsilon_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n = M$，记 $E(\Delta_k) = E_{\lambda_{k+1}} - E_{\lambda_k}$ ($k = 0, 1, \cdots, n-1$)，则 $E(\Delta_k)x$ 与 $E(\Delta_j)x$ 直交($k, j = 0, 1, \cdots, n-1, k \neq j$). 由第七章 §4.1 中的性质1°(第104页)，有

$$\sum_{k=0}^{n-1} \|E(\Delta_k)x\|^2 = \left\| \sum_{k=0}^{n-1} E(\Delta_k)x \right\|^2 = \|x\|^2.$$

再由投影算子的自共轭性及等式 $E(\Delta_k) = E(\Delta_k)^2$，有

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} |(E(\Delta_k)x, y)| &= \sum_{k=0}^{n-1} |(E(\Delta_k)x, E(\Delta_k)y)| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \|E(\Delta_k)x\| \|E(\Delta_k)y\| \\
&\leq \left( \sum_{k=0}^{n-1} \|E(\Delta_k)x\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \|E(\Delta_k)y\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|x\| \cdot \|y\|.
\end{aligned}$$

故 $(E_\lambda x, y)$ 作为 $\lambda$ 的函数是囿变的且(16)成立. 因此 $(E_\lambda x, y)$ 在实轴上可以定义一个复值的 $L$-$S$ 测度. 关于这一点，读者只要理解了第四章关于有界上升右连续函数定义 $L$-$S$ 测度的方法，那么就

不难将它推广到复值囿变右连续函数的情形中去，而且 $L$-$S$ 积分的很多性质仍成立．如 Lebesgue 控制收敛定理便是其中之一．

任取 $\varepsilon_0>0$. 设 $u(\cdot)$是定义在$[m-\varepsilon_0, M]$上的有界复值Borel可测函数，那么在$[m-\varepsilon_0, M]$上，$u(\cdot)$关于$\|E_\lambda x\|^2$及$(E_\lambda x, y)$定义的 $L$-$S$ 测度是可积的．设 $A$ 是$|u(\lambda)|$在$[m-\varepsilon_0, M]$上的上确界，由$L$-$S$ 积分的性质，有

$$\left|\int_{m-\varepsilon_0}^{M} u(\lambda)\,d(E_\lambda x, y)\right| \leqslant A\bigvee_{m-\varepsilon_0}^{M}((E_\lambda x, y))\leqslant A\|x\|\|y\|. \qquad (17)$$

故积分

$$\int_{m-\varepsilon_0}^{M} u(\lambda)\,d(E_\lambda x, y)$$

是 $\mathfrak{U}$ 上的有界双线性泛函，由定理 2.7，存在 $\mathfrak{U}$ 上的有界线性算子 $S$ 使

$$(Sx, y)=\int_{m-\varepsilon_0}^{M} u(\lambda)\,d(E_\lambda x, y).$$

由于$\{E_\lambda\}$ 是算子 $T$ 的谱系，故算子 $S$ 既与 $T$ 有关又与函数 $u(\cdot)$ 有关.基于这一原因，我们将它记为 $u(T)$，于是有

$$(u(T)x, y)=\int_{m-\varepsilon_0}^{M} u(\lambda)\,d(E_\lambda x, y). \qquad (18)$$

右端的积分实际上与 $\varepsilon_0>0$ 无关，与本节定理4.4类似，记为

$$(u(T)x, y)=\int_{m-0}^{M} u(\lambda)\,d(E_\lambda x, y) \qquad (19)$$

或记为

$$u(T)=\int_{m-0}^{M} u(\lambda)\,dE_\lambda. \qquad (20)$$

由(17)、(18)(或(19))，得到

$$|(u(T)x, y)|\leqslant A\|x\|\|y\|.$$

故 $u(T)$为$\mathfrak{U}$上的有界线性算子且

$$\|u(T)\| \leqslant A \tag{21}$$

我们称 $u(T)$ 是算子 $T$ 对应于 $u(\cdot)$ 的算子函数

**定理 4.5** 关于 $T$ 的算子函数，下列性质成立（在所有这些性质中出现的函数，除特别声明者外，均假定在 $[m-\varepsilon_0, M]$ 上是有界Borel可测的）：

(i) 若 $u(\lambda)=1$，则 $u(T)=I$；若 $u(\lambda)=\lambda$，则 $u(T)=T$；

(ii) 设 $\alpha, \beta$ 为复数，则

$$(\alpha u_1+\beta u_2)(T)=\alpha u_1(T)+\beta u_2(T);$$

(iii) $(u_1u_2)(T)=u_1(T)u_2(T)$；

(iv) $[u(T)]^*=\bar{u}(T)$，这里"$^-$"表示复数共轭．当 $u(\lambda)$ 只取实数值时，$u(T)$ 是自共轭的，当 $u(\lambda)\geqslant 0$ 时，$u(T)$ 是正算子；

(v) 设 $\{u_n(\lambda)\}$ 是一致有界的 Borel 可测函数列处处收敛于 $u(\lambda)$，则算子列 $\{u_n(T)\}$ 在算子强收敛意义下收敛于 $u(T)$；

(vi) 当 $u(\lambda)$ 是 $[m-\varepsilon_0, M]$ 上的连续函数时，$u(T)$ 是积分和

$$\sum_{k=0}^{n-1} u(\mu_k)E(\Delta_k),$$

当 $\delta=\max\limits_{0\leqslant k\leqslant n-1}(\lambda_{k+1}-\lambda_k)\to 0$ 时，在算子范数意义下收敛的极限，这里 $\lambda_k$、$\mu_k$、$\Delta_k$ 的含义与定理 4.4 中的相同．

**证** 性质(i)、(ii)显然．故只证明性质(iii)、(iv)、(v)及(vi)．

性质(iii)的证明．由算子函数的定义，

$$\begin{aligned}(u_1(T)u_2(T)x, y) &= \int_{m-0}^{M} u_1(\lambda)\,d(E_\lambda u_2(T)x, y)\\ &= \int_{m-0}^{M} u_1(\lambda)\,d(u_2(T)x, E_\lambda y)\\ &= \int_{m-0}^{M} u_1(\lambda)\,d\int_{m-0}^{M} u_2(\mu)\,d(E_\mu x, E_\lambda y)\\ &= \int_{m-0}^{M} u_1(\lambda)\,d\int_{m-0}^{M} u_2(\mu)\,d(E_\lambda E_\mu x, y)\end{aligned}$$

$$=\int_{m-0}^{M}u_1(\lambda)\,d\int_{m-0}^{\lambda}u_2(\mu)\,d(E_\mu x,y)$$

$$=\int_{m-0}^{M}u_1(\lambda)u_2(\lambda)\,d(E_\lambda x,y)$$

$$=((u_1u_2)(T)x,y),$$

故
$$u_1(T)u_2(T)=(u_1u_2)(T).$$

性质(iv)的证明. 因为

$$(\bar{u}(T)x,y)=\int_{m-0}^{M}\bar{u}(\lambda)\,d(E_\lambda x,y)$$

$$=\overline{\int_{m-0}^{M}u(\lambda)\,d(E_\lambda y,x)}=\overline{(u(T)y,\ x)}$$

$$=(x,u(T)y)=([u(T)]^*x,y),$$

故$[u(T)]^*=\bar{u}(T)$. 于是当$u(\lambda)$只取实数值时，$u(T)$是自共轭算子. 现设$u(\lambda)\geqslant 0$，任取$x\in\mathfrak{H}$，由

$$(u(T)x,x)=\int_{m-0}^{M}u(\lambda)\,d(E_\lambda x,x)\geqslant 0$$

可知，$u(T)$是正算子.

性质(v)的证明. 令$v_n(\lambda)=u_n(\lambda)-u(\lambda)$. 由性质(ii)、(iii)

$$\|[u_n(T)-u(T)]x\|^2=\|v_n(T)x\|^2=(v_n(T)x,v_n(T)x)$$

$$=([v_n(T)]^*v_n(T)x,x)$$

$$=(\bar{v}_n(T)v_n(T)x,x)=(|v_n|^2(T)x,x)$$

$$=\int_{m-0}^{M}|u_n(\lambda)-u(\lambda)|^2d(E_\lambda x,x).$$

由关于$L$-$S$积分的Lebesgue控制收敛定理，当$n\to\infty$时，

$$\int_{m-0}^{M}|u_n(\lambda)-u(\lambda)|^2d(E_\lambda x,x)\to 0.$$

故$\|[u_n(T)-u(T)]x\|\to 0$，即$\{u_n(T)\}$在算子强收敛意义下收敛于$u(T)$.

性质(vi)的证明. 作函数$u_n(\cdot)$：

$$u_n(\lambda)=u(\mu_k) \quad (当 \lambda\in\Delta_k, k=0,1,2,\cdots,n-1),$$

其中 $\mu_k\Delta_k$ 的含义与定理 4.4 中的相同. 显然, $u_n(\cdot)$ 是阶梯函数, 因而是有界 Borel 可测函数, 故 $u_n(T)$ 有意义且

$$u_n(T)=\sum_{k=0}^{n-1}u(\mu_k)E(\Delta_k).$$

因 $u(\cdot)$ 连续, 故对任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $|\lambda-\lambda'|<\delta$ 时, $|u(\lambda)-u(\lambda')|<\varepsilon$. 因此当 $\max\limits_{0\leqslant k\leqslant n-1}(\lambda_{k+1}-\lambda_k)<\delta$ 时, 有

$$|u(\lambda)-u_n(\lambda)|=<\varepsilon. \tag{22}$$

由不等式(21)及(22),

$$\left\|u(T)-\sum_{k=0}^{n-1}u(\mu_k)E(\Delta_k)\right\|=\|u(T)-u_n(T)\|\leqslant\varepsilon,$$

性质(vi)成立. 证毕.

**4.4 自共轭算子谱的特征**

有了算子演算, 便可以讨论自共轭算子谱的特征.

**定理 4.6 设 $T$ 是定义在空间 H 上的自共轭算子, $\lambda_0$ 是一个数, 则 $\lambda_0$ 是 $T$ 的正则值的充分必要条件是它属于下列两种情况之一:**

**(i) $\lambda_0\overline{\in}[m,M]$;**

**(ii) 如果 $\lambda_0\in[m,M]$, 则存在某个区间 $(\alpha,\beta]$, 适合 $\alpha<\lambda_0<\beta$ 使 $E_\lambda$ 在 $(\alpha,\beta]$ 上取定值.**

**证 充分性** 如果情形(i)成立, 则函数

$$u(\lambda)=\frac{1}{\lambda_0-\lambda}$$

在 $\lambda\in[m-\varepsilon_0, M]$ 内连续, 这里 $\varepsilon_0$ 是一个充分小的正数. 于是 $u(T)$ 是有界线性算子. 因为

$$u(\lambda)(\lambda_0-\lambda)=(\lambda_0-\lambda)u(\lambda)=1 \quad (\lambda\in[m-\varepsilon_0, M]),$$

故
$$u(T)(\lambda_0 I-T)=(\lambda_0 I-T)u(T)=I.$$

因此$u(T)$是$\lambda_0 I-T$的有界逆算子，$\lambda_0$是$T$的正则值.

若情形(ii)成立，我们定义$[m-\varepsilon_0, M]$上的连续函数$u(\lambda)$：

$$u(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda_0-\lambda}, & \text{当 } \lambda\in[m-\varepsilon_0,\alpha]\cup(\beta,M];\\ \text{线性函数}, & \text{当 } \lambda\in(\alpha,\beta],\end{cases}$$

则$u(T)$是有界线性算子. 再注意到$E_\lambda-E_\alpha(\alpha<\lambda\leqslant\beta)$，故

$$(\lambda_0 I-T)u(T)=u(T)(\lambda_0 I-T)=\int_{m-0}^{M}u(\lambda)(\lambda_0-\lambda)dE_\lambda$$

$$=\int_{m-0}^{\alpha}1dE_\lambda-\int_{\alpha}^{\beta}u(\lambda)(\lambda_0-\lambda)dE_\lambda+\int_{\beta}^{M}1dE_\lambda$$

$$=E_\alpha-E_{m-0}+E_M-E_\beta=I.$$

即$u(T)$是$\lambda_0 I-T$的有界逆算子，$\lambda_0$是$T$的正则值.

必要性. 设$\lambda_0$是$T$的正则值. 若$\lambda_0$不满足(i)，则它在区间$[m,M]$内，作区间$\Delta=(\alpha,\beta]$，使$\alpha<\lambda_0<\beta$，记$E(\Delta)=E_\beta-E_\alpha$. 对

$$\lambda_0 I-T=\int_{m-0}^{M}(\lambda_0-\lambda)dE_\lambda$$

两边同乘以$(\lambda_0 I-T)^{-1}E(\Delta)$，得

$$(\lambda_0 I-T)^{-1}E(\Delta)(\lambda_0 I-T)=(\lambda_0 I-T)^{-1}E(\Delta)\int_{m-0}^{M}(\lambda_0-\lambda)dE_\lambda. \tag{23}$$

(23)的左端显然等于$E(\Delta)$，而右端则等于

$$(\lambda_0 I-T)^{-1}E(\Delta)\left[\int_{m-0}^{\alpha}+\int_{\alpha}^{\beta}+\int_{\beta}^{M}\right](\lambda_0-\lambda)dE_\lambda$$

$$=(\lambda_0 I-T)^{-1}\int_{\alpha}^{\beta}(\lambda_0-\lambda)dE_\lambda.$$

于是

$$E(\Delta)=(\lambda_0 I-T)^{-1}\int_{\alpha}^{\beta}(\lambda_0-\lambda)dE_\lambda. \tag{24}$$

仿照不等式(21)的证法可以证明

$$\left\|\int_{\alpha}^{\beta}(\lambda_0-\lambda)\,dE_\lambda\right\|\leqslant k\|E(\Delta)\|,$$

其中 $k=\max\{\beta-\lambda_0, \lambda_0-\alpha\}$. 由(24),

$$\|E(\Delta)\|\leqslant k\|(\lambda_0 I-T)^{-1}\|\|E(\Delta)\|.$$

选择区间 $\Delta$ 使 $k\|(\lambda_0 I-T)^{-1}\|\leqslant\frac{1}{2}$, 于是

$$\|E(\Delta)\|\leqslant\frac{1}{2}\|E(\Delta)\|.$$

因此 $\|E(\Delta)\|=0$, 即 $E(\Delta)=\theta$. 由于 $E_\lambda$ 是不减的, 故

$$E_\lambda=E_\alpha(\alpha<\lambda\leqslant\beta).$$

证毕.

**推论** **自共轭算子 $T$ 的谱 $\sigma(T)$ 是实轴上包含在 $[m, M]$ 内的有界闭集. $T$ 的上、下界 $M$、$m$ 都属于 $\sigma(T)$.**

**证** 第一结论是显然的. 第二个结论先以 $M$ 为例. 若 $M$ 不属于 $\sigma(T)$, 则存在以 $M$ 为内点的区间 $(\alpha, \beta]$, 使 $E_\lambda$ 在 $(\alpha, \beta]$ 上取定值, 故对任何 $x\in\mathfrak{U}$, 有

$$(Tx, x)=\int_{m-0}^{M}\lambda d(E_\lambda x, x)=\int_{m-0}^{\alpha}\lambda d(E_\lambda x, x)\leqslant\alpha(x, x).$$

于是
$$M=\sup_{\|x\|=1}(Tx, x)\leqslant\alpha,$$

与 $\alpha<M$ 矛盾, 故 $M$ 属于 $\sigma(T)$. 同理可证 $m$ 属于 $\sigma(T)$.

**定理 4.7** **设 $T$ 为自共轭算子, 则**

**(i) 实数 $\lambda_0$ 是 $T$ 的特征值的充分必要条件是 $\lambda_0$ 为 $E_\lambda$ 的间断点, 即 $E_{\lambda_0}\neq E_{\lambda_0-0}$. 当 $\lambda_0$ 是 $T$ 的特征值时, $T$ 对应于 $\lambda_0$ 的特征向量空间是 $E_{\lambda_0}-E_{\lambda_0-0}$ 的投影子空间;**

**(ii) 实数 $\lambda_0$ 属于 $T$ 的连续谱的充分必要条件是 $E_\lambda$ 在 $\lambda_0$ 处连续, 且对于满足 $\lambda_1<\lambda_0<\lambda_2$ 的任何两个实数 $\lambda_1, \lambda_2$ 有 $E_{\lambda_1}\neq E_{\lambda_2}$.**

**证** 先证(i) 的必要性. 设 $\lambda_0$ 是 $T$ 的特征值, $x_0\neq\theta$ 是对应的一个特征向量. 于是

$$(\lambda_0 I - T)x_0 = \theta.$$

故 $$\int_{m-0}^{M} |\lambda_0 - \lambda|^2 d(E_\lambda x_0, x_0) = ((\lambda_0 I - T)^2 x_0, x_0) = 0.$$

由于被积函数非负，而$(E_\lambda x_0, x_0)$是不减的，故对于任给的 $\varepsilon > 0$，有

$$0 = \int_{\lambda_0+\varepsilon}^{M} |\lambda_0 - \lambda|^2 d(E_\lambda x_0, x_0) \geqslant \varepsilon^2 \int_{\lambda_0+\varepsilon}^{M} d(E_\lambda x_0, x_0)$$
$$= \varepsilon^2((I - E_{\lambda_0+\varepsilon})x_0, x_0) = \varepsilon^2 \|(I - E_{\lambda_0+\varepsilon})x\|^2.$$

所以$(I - E_{\lambda_0+\varepsilon})x_0 = \theta$，即

$$E_{\lambda_0+\varepsilon} x_0 = x_0.$$

类似地，可证 $$E_{\lambda_0-\varepsilon} x_0 = \theta.$$

因此 $$(E_{\lambda_0+\varepsilon} - E_{\lambda_0-\varepsilon})x_0 = x_0.$$

令 $\varepsilon \to 0$，得

$$(E_{\lambda_0} - E_{\lambda_0-0})x_0 = x_0.$$

因 $x_0 \neq \theta$，故 $E_{\lambda_0} \neq E_{\lambda_0-0}$，$\lambda_0$ 是 $E_\lambda$ 的间断点。

再证(i)的充分性。设 $\lambda_0$ 是$E_\lambda$ 的间断点，即$E_{\lambda_0} \neq E_{\lambda_0-0}$. 任取$(E_{\lambda_0} - E_{\lambda_0-0})\mathfrak{U}$中的非零元素 $x_0$，注意到对任何 $\lambda > \lambda_0$,

$$E_\lambda(E_{\lambda_0} - E_{\lambda_0-0}) = E_{\lambda_0} - E_{\lambda_0-0},$$

故 $$E_\lambda x_0 = E_\lambda(E_{\lambda_0} - E_{\lambda_0-0})x_0 = (E_{\lambda_0} - E_{\lambda_0-0})x_0 = x_0,$$

同理可证，当 $\lambda < \lambda_0$ 时，

$$E_\lambda x_0 = \theta.$$

因此

$$Tx_0 = \int_{m-0}^{M} \lambda dE_\lambda x_0 - \int_{m-0}^{\lambda_0-0} \lambda dE_\lambda x_0 + \lambda_0 x_0 + \int_{\lambda_0}^{M} \lambda dE_\lambda x_0 = \lambda_0 x_0,$$

这表明 $\lambda_0$ 是$T$的特征值而 $x_0$ 是对应的特征向量。

由必要性部分可知，$T$ 对应于 $\lambda_0$ 的任何特征向量必属于$E_{\lambda_0} - E_{\lambda_0-0}$ 的投影子空间，而由充分性部分可知，$E_{\lambda_0} - E_{\lambda_0-0}$ 的投影子空间中的任一非零元素必是$T$对应于 $\lambda_0$ 的特征向量. 因此$T$ 对应于 $\lambda_0$ 的特征向量空间恰好就是 $E_{\lambda_0} - E_{\lambda_0-0}$的投影子空间。

再证(ii) 对于给定的实数 $\lambda_0$, $T$ 的谱系$\{E_\lambda\}$在 $\lambda_0$ 处有三种可能的性质:

(a) $\lambda_0$ 为 $E_\lambda$ 的间断点;

(b) 存在以 $\lambda_0$ 为内点的区间$(\alpha,\beta]$ 使 $E_\lambda=E_\alpha$ 对一切 $\lambda\in(\alpha,\beta]$成立;

(c) $E_\lambda$ 在 $\lambda_0$ 处连续,但对任何满足 $\lambda_1<\lambda_0<\lambda_2$ 的实数 $\lambda_1,\lambda_2$,有 $E_{\lambda_1}\neq E_{\lambda_2}$.

因此由定理 4.6 及本定理的(i)可知,$\lambda_0$ 属于 $T$ 的连续谱的充分必要条件是上面的第三种可能性(c)成立. 证毕.

当实数 $\lambda_0$ 属于 $T$ 的连续谱时,$\lambda_0I-T$ 的值域还会出现两种可能性:

1° $\lambda_0I-T$ 的值域在 $\mathfrak{U}$ 中稠密;

2° $\lambda_0I-T$ 的值域在 $\mathfrak{U}$ 中不稠密.

现在证明第二种可能性实际上不存在.

**定理 4.8** 若实数 $\lambda_0$ 属于自共轭算子 $T$ 的连续谱,则 $\lambda_0I-T$ 的值域 $\mathfrak{R}(\lambda_0I-T)$ 在 $\mathfrak{U}$ 中稠密.

**证** 由本章§2定理2.2, $\lambda_0I-T$的值域的闭包$\overline{\mathfrak{R}(\lambda_0I-T)}$与它的零空间$\mathfrak{N}(\lambda_0I-T)$互为直交余. 由假设,$\lambda_0$属于$T$的连续谱, 因此$\mathfrak{N}(\lambda_0I-T)=\{\theta\}$. 故 $\overline{\mathfrak{R}(\lambda_0I-T)}=\mathfrak{U}$, $\mathfrak{R}(\lambda_0I-T)$ 在 $\mathfrak{U}$ 中稠密. 证毕.

通过定理 4.6、定理 4.7,我们看到,自共轭算子$T$的谱可以由它的谱系的分析性质来刻划: 任何一个复数 $\lambda_0$ 是否为 $T$ 的正则值、特征值以及是否属于 $T$ 的连续谱视 $T$ 的谱系$\{E_\lambda\}$在 $\lambda_0$ 的某个邻域内是否为定值、在 $\lambda_0$ 处是否间断以及在 $\lambda_0$ 处是否连续并且在 $\lambda_0$ 的任一邻域内不是定值来决定. 这使我们对 $T$ 的谱有更深刻更具体的认识.

最后,我们讨论紧自共轭算子. 设 $T$ 为紧自共轭算子,由第八

章§7定理7.14，$T$的非零谱点都是$T$的特征值而且都是$\sigma(T)$的孤立点，因此$T$的全部非零特征值可按绝对值的大小排成：

$$|\lambda_1|\geq|\lambda_2|\geq\cdots\geq|\lambda_n|\geq\cdots.$$

$T$的与每个特征值$\lambda_n$对应的特征向量空间$L_n$都是有限维的．由这一章§2定理2.3可知，$L_n$还是相互直交的．将$L_n$上的投影算子记为$E_n$，于是可以证明下面的定理．

**定理 4.9** **设$T$为紧自共轭算子．则$T$可表示成下列级数的和：**

$$T=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n E_n, \tag{25}$$

**其中右端的级数在算子强收敛意义下收敛，$\lambda_n$是$T$的非零特征值，当$n\to\infty$时，$\{\lambda_n\}\to 0$，$E_n$是$T$的对应于$\lambda_n$的特征向量空间上的投影算子．**

**证** 令$F_m=\sum_{n=1}^{m}E_n$，则$\{F_m\}$是单调上升的投影算子列．由于投影算子的范数不超过1，故$\{F_m\}$一致有界，于是$\{F_m\}$在算子强收敛意义下收敛于某一算子$F$．显然$F$也是投影算子．$F$可表示成：

$$F=\sum_{n=1}^{\infty}E_n. \tag{26}$$

记$F_0=I-F$．则$F_0$也是投影算子．记$F_0$的投影子空间为$L_0$，而记$F$的投影子空间为$L$．由于$\{\lambda_n\}$是$T$的非零特征值的全体，而且每个$\lambda_n$对应的投影子空间$L_n$均包含在$L$中(这由(26)可知)，于是$L_0$必为紧自共轭算子$T$对应于特征值为0的特征向量空间．因此对任一$x\in L_0$，有$Tx=\theta$．于是等式$TF_0x=\theta$对于任一$x\in\mathfrak{U}$成立．

今任取$x\in\mathfrak{U}$，则$x=F_0x+Fx$．因此，由(26)及$T$的连续性并注意到$TF_0x=\theta$，得

$$Tx=T(F_0x+Fx)=TF_0x+TFx$$

$$=TFx=\sum_{n=1}^{\infty}TE_nx$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_nE_nx=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_nE_n\right)x.$$

(25)成立．证毕．

作为结束，我们讨论这一节例 5 中的算子 $T$ 的谱系的性质．

**例 6** 已知算子 $T$：$(Tx)(t)=\varphi(t)x(t)$的谱系 $\{E_\lambda\}$ 由下式给出：

$$(E_\lambda x)(t)=\chi_\lambda(t)x(t),$$

这里 $\chi_\lambda(\cdot)$是集合 $\tilde{e}_\lambda=\{t:\varphi(t)\leqslant\lambda,\ t\in[a,b]\}$的特征函数．

由定理 4.7 及例 3 可知，$\lambda_0$ 是$\{E_\lambda\}$ 的断间点的充分必要条件是集合 $e_{\lambda_0}=\{t:\varphi(t)=\lambda_0,\ t\in[a,b]\}$的测度是正的，$\lambda_0$ 是$\{E_\lambda\}$的连续点的充分必要条件是集合 $e_{\lambda_0}$ 的测度为零．

到现在为止，§ 3 及 § 4 的内容已全部结束．在 § 3 中，我们讨论了投影算子的性质．利用 § 3 中的结果，在 § 4 中，我们研究了自共轭算子的谱分解定理以及自共轭算子谱的特征，希望读者注意：

1° 投影算子是一类十分重要的算子，任何一个投影算子都有投影子空间，反之，$\mathfrak{H}$ 的任何一个闭子空间都是某个投影算子的投影子空间．这样，投影算子与闭子空间之间就建立了一对一的对应关系；

2° 谱系就是由满足一些特定性质的一族投影算子组成，利用谱系可以对自共轭算子$T$进行"分解"从而得到谱分解定理．具体做法是考察算子 $S_\lambda$ 与 $T_\lambda(=\lambda I-T)$ 的差的零空间上的投影算子，这里 $\lambda$ 为实数；

3° 利用自共轭算子$T$的谱系还可以建立$T$的算子演算．在本书中，我们是直接对相当广泛的一类函数——有界 Borel 可测

函数类建立起 $T$ 的算子演算. 通过 $T$ 的算子演算, 我们研究了 $T$ 的谱的特征. 首先确定了 $T$ 的谱是包含在 $[m, M]$ 内的有界闭集而且端点 $m$、$M$ 均属于 $\sigma(T)$. 其次, 通过 $\{E_\lambda\}$ 的分析性质刻划了 $T$ 的点谱、连续谱以及正则值.

## §5 酉算子及其谱分解定理

在这一节中, 我们将研究 Hilbert 空间上的另一类重要算子——酉算子.

### 5.1 酉算子的基本概念

**定义 5.1** 如果 $\mathfrak{U}$ 上的线性算子 $U$ 满足下列两个条件:

(i) $U$ 是等距的, 即对一切 $x\in\mathfrak{U}$, 有 $\|Ux\|=\|x\|$;

(ii) $U$ 是满映射,

则称 $U$ 为酉算子.

由定义可以证明下列性质:

1° 设 $U$ 为酉算子, 则对任何 $x$、$y\in\mathfrak{U}$,

$$(Ux, Uy)=(x, y). \tag{1}$$

2° $U$ 为酉算子的充分必要条件是

$$U^*U=UU^*=I.$$

**性质 1°的证明** 由恒等式

$$\begin{aligned}(Ux, Uy) &=\frac{1}{4}[(U(x+y), U(x+y))-(U(x-y), U(x-y))]\\ &\quad+\frac{i}{4}[(U(x+iy), U(x+iy))-(U(x-iy), U(x-iy))]\\ &=\frac{1}{4}[(x+y, x+y)-(x-y, x-y)]\\ &\quad+\frac{i}{4}[(x+iy, x+iy)-(x-iy, x-iy)]=(x, y)\end{aligned}$$

(复空间情形);

$$(Ux, Uy) = \frac{1}{4}[(U(x+y), U(x+y)) - (U(x-y), U(x-y))]$$

$$= \frac{1}{4}[(x+y, x+y) - (x-y, x-y)] = (x, y).$$

(实空间情形),

立即可知性质 1°成立.

**性质 2°的证明** 必要性. 设$U$是酉算子. 由(1), 对任何 $x$、$y \in \mathfrak{U}$, 有

$$(U^*Ux, y) = (x, y).$$

故 $U^*Ux = x$ 对任何 $x \in \mathfrak{U}$ 成立, 于是 $U^*U = I$. 由酉算子的定义可知, $U$有有界逆算子$U^{-1}$. 由等式$U^* = U^*(UU^{-1}) = (U^*U)U^{-1} = U^{-1}$, 得$U^* = U^{-1}$, 因此

$$UU^*UU^{-1} = I.$$

**充分性** 由等式$U^*U = I$ 可知, 对任何 $x \in \mathfrak{U}$,

$$\|Ux\|^2 = (Ux, Ux) = (U^*Ux, x) = (x, x) = \|x\|^2.$$

故定义 5.1 中的条件(i)满足. 由等式 $UU^* = I$ 可知, $U$ 是满映射. 条件(ii)满足. 因此$U$是酉算子.

性质 2°又可表示成如下的形式: 有界线性算子$U$是酉算子的充分必要条件是 $U^*$ 为$U$的逆算子.

**例 1** 设 $A = (\alpha_{ij})$ $(i、j = 1, 2, \cdots, n)$ 是 $n \times n$ 矩阵, 则由矩阵$A$在 $\mathbf{C}^n$ 上定义的算子

$$U: x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \longmapsto x' = (\xi'_1, \xi'_2, \cdots, \xi'_n),$$

其中

$$\xi'_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_i,$$

是酉算子的充分必要条件是 $\alpha_{ij}$ 满足

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}\bar{\alpha}_{ik}=\delta_{jk}\quad (j,k=1,2,\cdots,n). \tag{2}$$

其实，由线性代数可知，$A$ 是 $U$ 对应于基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 的矩阵，其中

$$e_1=(1,0,\cdots,0)$$
$$e_2=(0,1,0,\cdots,0)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$e_n=(0,\cdots,0,1).$$

由于 $U$ 为酉算子的充分必要条件是 $A$ 为酉矩阵，而 $A$ 为酉矩阵的充分必要条件是 $A$ 满足 (2). 因此 $U$ 为酉算子的充分必要条件是 (2) 成立.

**例 2** 设 $\varphi(\cdot)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的本性有界可测函数. 在 $L^2[a,b]$ 上定义算子 $U$ 如下:

$$(Ux)(t)=\varphi(t)x(t)\quad (x\in L^2[a,b]), \tag{3}$$

则 $U$ 为酉算子的充分必要条件是 $|\varphi(t)|=1$ 几乎处处成立.

其实，如果 $|\varphi(t)|=1$ 几乎处处成立，则 $\bar{\varphi}(t)\varphi(t)=|\varphi(t)|^2=1$ 几乎处处成立. 因此对任何 $x\in L^2[a,b]$,

$$(U^*Ux)(t)=\bar{\varphi}(t)\varphi(t)x(t)$$
$$=x(t)=\varphi(t)\bar{\varphi}(t)x(t)=(UU^*x)(t)\quad (\text{几乎处处成立}).$$

故 $U^*U=I=UU^*$. 由性质 2° 可知，$U$ 是酉算子.

反之，设 $U$ 是酉算子，由性质 2° 可知，对任何 $x\in L^2[a,b]$,

$$\bar{\varphi}(t)\varphi(t)x(t)=(U^*Ux)(t)=x(t)\quad (\text{几乎处处成立}).$$

取 $x(t)=1\quad (t\in[a,b])$, 得 $\bar{\varphi}(t)\varphi(t)=1$ 几乎处处成立. 因此 $|\varphi(t)|=1$ 几乎处处成立.

现在讨论自共轭算子与酉算子的关系. 设 $H$ 是复 Hilbert 空间. 由复变函数理论可知，线性分式变换

$$w=(z-i)(z+i)^{-1} \tag{4}$$

将实轴变成单位圆周．因此当 $z$ 为实数时，$|w|=1$．现设 $T$ 为自共轭算子，则 $\sigma(T)$ 位于实轴上，因此 $(T+iI)$ 有有界逆算子 $(T+iI)^{-1}$．将 $T$ 代替(4)中的 $z$，得到算子 $(T-iI)(T+iI)^{-1}$．(4)式所揭示的性质启发我们，这个算子应为酉算子．

**定理5.1** 设 $T$ 是空间 $\mathfrak{H}$ 上的自共轭算子，令

$$U=(T-iI)(T+iI)^{-1}, \tag{5}$$

则 $U$ 是酉算子，且 $1\overline{\in}\sigma(U)$．

**证** 显然 $U$ 是 $\mathfrak{H}$ 上的有界线性算子．任取 $x\in\mathfrak{H}$，则

$$\|(T\mp iI)x\|^2=\|Tx\|^2\mp i(x,Tx)\pm i(Tx,x)$$
$$+(x,x)=\|Tx\|^2+\|x\|^2.$$

故

$$\|(T-iI)x\|=\|(T+iI)x\|. \tag{6}$$

由算子 $U$ 的定义(5)，有

$$U(T+iI)x=(T-iI)x.$$

故 $U$ 将 $T+iI$ 的值域恰好映成 $T-iI$ 的值域．由于 $T$ 是自共轭的，$\pm i$ 均为 $T$ 的正则值，故 $T\pm iI$ 的值域都是空间 $\mathfrak{H}$．于是 $U$ 是由 $\mathfrak{H}$ 到 $\mathfrak{H}$ 上的算子，因此 $U$ 满足定义 5.1 的条件(ii)．由(6)，$U$ 还满足定义 5.1 的条件(i)，因此它是酉算子．

至于 $1\overline{\in}\sigma(U)$，由等式

$$I-U=I-(T-iI)(T+iI)^{-1}=2i(T+iI)^{-1}$$

立即可得．证毕．

由(5)式定义的由 $T$ 到 $U$ 的变换称为 Cayley 变换．

现在再回到式(4)．在(4)式中解出 $z$，得

$$z=i(1+w)(1-w)^{-1}. \tag{7}$$

这一线性分式变换将单位圆周变为实轴．现设 $U$ 为一给定的酉算子且 $1\overline{\in}\sigma(U)$．将 $U$ 代替(7)中的 $w$，得到算子 $i(I+U)(I-U)^{-1}$．它应当是自共轭算子，事实也确实如此．

**定理5.2** 设$U$为酉算子，$1\overline{\in}\sigma(U)$. 令

$$T=i(I+U)(I-U)^{-1}. \tag{5'}$$

则$T$为自共轭算子.

**证** 显然$T$是H上的有界线性算子. 现在证明$T$的自共轭性:

$$\begin{aligned}T^{*}&=-i(I-U^{*})^{-1}(I+U^{*})\\&=-i(I-U^{-1})^{-1}(I+U^{-1})\\&=-i(U-I)^{-1}(U+I)=T.\end{aligned}$$

故$T$是自共轭的. 证毕.

由(5′)定义的由$U$到$T$的变换称为Cayley变换的逆变换.

定理5.1及定理5.2建立了自共轭算子与酉算子的联系. 但这里的自共轭算子$T$是有界的，因而酉算子$U$满足$1\overline{\in}\sigma(U)$，因此还是一种特殊情形. 至于一般情形，本书从略.

**5.2 两类重要的酉算子**

**1° $L^2(-\infty,\infty)$上的Fourier变换** 在本书第一册第三章中，我们介绍了空间$L(-\infty,\infty)$及$L^2(-\infty,\infty)$上的Fourier变换. 现在对空间$L^2(-\infty,\infty)$上的Fourier变换作一些补充讨论. 为便于读者阅读，我们将给出全部论证.

**定理 5.3(Plancherel)** 对任何$x\in L^2(-\infty,\infty)$，积分

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-N}^{N}e^{\pm its}x(s)\,ds \tag{8}$$

当$N\to\infty$时，在$L^2(-\infty,\infty)$中的范数意义下收敛. 令

$$\left.\begin{aligned}(Ux)(t)&=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-N}^{N}e^{-its}x(s)\,ds;\\(Vx)(t)&=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-N}^{N}e^{its}x(s)\,ds.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

则$U$、$V$均为酉算子且$U^{*}=V$.

**证** 令$\delta_{\xi}(t)$为如下的函数

$$\delta_\xi(t)=\begin{cases}1, & 若\ \xi\geqslant 0, 而\ 0\leqslant t\leqslant\xi;\\ -1, & 若\ \xi<0, 而\ \xi\leqslant t\leqslant 0;\\ 0, & 其余情形.\end{cases}$$

则对于任意的 $\xi$, $\delta_\xi\in L^2(-\infty,\infty)$ 且在某一有界区间之外为零，代入(9)可知，$U\delta_\xi$ 有意义，且对任意的 $\xi$、$\eta$，经过简单的计算，

$$(U\delta_\xi,U\delta_\eta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(e^{-i\xi t}-1)(e^{i\eta t}-1)}{t^2}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\xi-\eta)t-\cos\xi t-\cos\eta t+1}{t^2}dt. \tag{10}$$

由于

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos\alpha t}{t^2}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\sin^2\frac{\alpha t}{2}}{t^2}dt$$

$$=|\alpha|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 u}{u^2}du=\pi|\alpha|.$$

于是(10)中最后一个积分等于

$$\frac{1}{2}(|\xi|+|\eta|-|\xi-\eta|)=\begin{cases}\min\{|\xi|,|\eta|\}, & 若\ \xi\eta\geqslant 0;\\ 0, & 若\ \xi\eta<0.\end{cases}$$

因此

$$(U\delta_\xi,U\delta_\eta)=\begin{cases}\min\{|\xi|,|\eta|\}, & 若\ \xi\eta\geqslant 0;\\ 0, & 若\ \xi\eta<0.\end{cases}$$

另一方面，显然有

$$(\delta_\xi,\delta_\eta)=\begin{cases}\min\{|\xi|,|\eta|\}, & 若\ \xi\eta\geqslant 0;\\ 0, & 若\ \xi\eta<0.\end{cases}$$

故

$$(U\delta_\xi,U\delta_\eta)=(\delta_\xi,\delta_\eta). \tag{11}$$

同理，$V\delta_\xi$ 有意义，且对任意的 $\xi$、$\eta$，

$$(V\delta_\xi,V\delta_\eta)=(\delta_\xi,\delta_\eta). \tag{12}$$

其次，

$$(U\delta_t,\delta_v)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^v\frac{e^{its}-1}{it}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t\frac{e^{ivt}-1}{it}dt=(\delta_t,V\delta_v). \tag{13}$$

现在设 $x$ 为阶梯函数，则 $x$ 可表成形如$\delta_t$ 的函数的线性组合．代入(9)式可知，$Ux$、$Vx$均有意义．再由(11)、(12)、(13)及内积的性质，对任何阶梯函数 $x$ 及 $y$，有

$$\left.\begin{aligned}&(Ux,Uy)=(x,y)=(Vx,Vy);\\&(Ux,y)=(x,Vy).\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

由于阶梯函数的全体在 $L^2(-\infty,\infty)$中稠密， 因此对任何 $x\in L^2(-\infty,\infty)$，有阶梯函数序列$\{x_n\}$使$\{x_n\}\to x$．由(14)，

$$\|Ux_n-Ux_m\|^2=\|U(x_n-x_m)\|^2=\|x_n-x_m\|^2.$$

因此$\{Ux_n\}$是 $L^2(-\infty,\infty)$中的一个基本点列，由 $L^2(-\infty,\infty)$ 的完备性，存在 $y\in L^2(-\infty,\infty)$使$\{Ux_n\}\to y$．令 $Ux=y$．可以证明，$y$ 与$\{x_n\}$的选择无关．这样$U$就成了定义在 $L^2(-\infty,\infty)$ 上的算子．同理，可以将$V$延拓到 $L^2(-\infty,\infty)$上而成为 $L^2(-\infty,\infty)$上的算子．由内积的连续性可知，(14) 对一切 $x$、$y\in L^2(-\infty,\infty)$成立．

由(14)中的第一个等式，有 $U^*U=V^*V=I$，由(14)中的第二个等式，有 $V^*=U$，代入前式，得 $U^*U=UU^*=I$，故$U$为酉算子．于是$V(=U^*)$也是酉算子．

现在还需证明以上通过延拓得到的算子$U$、$V$满足(9)式．设 $x\in L^2(-\infty,\infty)$并设 $x$ 在$[-N,N]$之外为零．对于 $t>0$，记 $\varkappa_t$ 为$[0,t]$的特征函数．由

$$(V\varkappa_t)(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{is\tau}d\tau=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{is}\left(e^{its}-1\right)$$

得到

$$\int_0^t (Ux)(s)ds=(Ux,\varkappa_t)=(x,V\varkappa_t)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-N}^{N}\frac{e^{-its}-1}{-is}x(s)ds.$$

两边对 $t$ 求导数，并注意到可以利用 Lebesgue 控制收敛定理于右端的积分号下求导，得

$$(Ux)(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-N}^{N}e^{-its}x(s)ds. \tag{15}$$

这表明(9)中第一个等式对于 $L^2(-\infty,\infty)$ 中于 $[-N,N]$ 外为零的函数成立.

今任取 $x\in L^2(-\infty,\infty)$，令

$$x_N(t)=\begin{cases}x(t), & \text{当 } t\in[-N,N];\\ 0, & \text{当 } t\overline{\in}[-N,N],\end{cases}$$

则 $\|x_N-x\|\to 0$ (当 $N\to\infty$)，因此 $\|Ux_N-Ux\|\to 0$ (当 $N\to\infty$). 由(15)，

$$Ux_N=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-N}^{N}e^{-its}x(s)ds,$$

故

$$(Ux)(t)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-N}^{N}e^{-its}x(s)ds,$$

其中右端在 $L^2(-\infty,\infty)$ 的范数意义下收敛，因此 $U$ 满足(9)中第一个等式.

同理可证 $V$ 满足(9)中第二个等式. 证毕.

(9) 中的两个等式通常还可以表示成:

$$\left.\begin{aligned}(Ux)(t)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-its}x(s)ds;\\ (Vx)(t)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{its}x(s)ds.\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

我们称(16)中第一个等式为 $x\in L^2(-\infty,\infty)$ 的 Fourier 变换，而称(16)中第二个等式为 $x\in L^2(-\infty,\infty)$ 的 Fourier 逆变换.

现在研究 $U$ 的谱的特性. 由(16)及 $V=U^{-1}$ 可知，

$$(Ux)(t)=(U^{-1}x)(-t)$$

因此

$$(U^2x)(t)=x(-t),(U^4x)(t)=x(t).$$

最后一个等式表明 $U^4=I$ 或 $U^4-I=0$，作因式分解，得到

$$\left.\begin{aligned}&(U-I)(I+U+U^2+U^3)=\theta;\\&(U+I)(I-U+U^2-U^3)=\theta;\\&(U-iI)(I-iU-U^2+iU^3)=\theta;\\&(U+iI)(I+iU-U^2-iU^3)=\theta.\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

令

$$P_0=\frac{1}{4}(I+U+U^2+U^3);\ P_1=\frac{1}{4}(I-iU-U^2+iU^2);$$

$$P_2=\frac{1}{4}(I-U+U^2-U^3);\ P_3=\frac{1}{4}(I+iU-U^2-iU^3).$$

通过直接验证可以证明，$P_k(k=0,1,2,3)$ 是相互直交的投影算子，且

$$P_0+P_1+P_2+P_3=I.\tag{18}$$

由(17)可知，$P_k$的投影子空间分别包含在 $U$ 对应于特征值 $i^k(k=0,1,2,3,)$ 的特征向量空间中. 今证明它们实际上相等而且 $\sigma(U)=\{1,-1,i,-i\}$. 将 $P_k$ 的投影子空间记为 $L_k$. 由(18)可知，$U$ 的谱是 $U$ 在 $L_k$ 上的谱的并集. 而 $U$ 在 $L_k$ 上的谱显然只含一个点 $i^k$. 因此 $\sigma(U)=\{1,-1,i,-i\}$. 仍由(18)可知，$U$ 对应于 $i^k$ 的特征向量空间是 $L_k$. 这样所述两件事均已证明.

2° **双侧移位算子(Bilateral Shift).** 在这里我们再介绍另一类重要的酉算子——双侧移位算子.

**定义 5.2** 设 $H$ 为可分 Hilbert 空间. 任意选择 $H$ 中的一完

备标准直交系并将它记为$\{e_n\}(n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$. 设$U$为$\mathfrak{U}$上的有界线性算子，满足

$$Ue_n = e_{n+1}(n=0, \pm1, \pm2, \cdots).$$

称$U$为双侧移位算子.

对任何$x=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\xi_n e_n \in \mathfrak{U}$，由$U$的连续性可知

$$Ux = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\xi_n Ue_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\xi_n e_{n+1}.$$

因此$\|Ux\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|\xi_n|^2 = \|x\|^2$. 其次$U$的值域是$\mathfrak{U}$，故$U$是酉算子. $U$的逆算子$U^{-1}$满足

$$U^{-1}e_n = e_{n-1}(n=0, \pm1, \pm2, \cdots).$$

关于双侧移位算子的谱的讨论就从略了.

### 5.3 酉算子的谱分解定理

这一段的目的是要建立酉算子的谱分解定理. 如果利用Cayley变换及自共轭算子的谱分解定理可以比较简洁地得到酉算子的谱分解定理. 但因本书中只对特殊情形研究了Cayley变换，为了获得一般情形下酉算子的谱分解定理，我们将采用另一种方法.

在这一段中，我们也始终假定$\mathfrak{U}$是复Hilbert空间.

**引理** 设$P(e^{it})=\sum_{n=-N}^{N}c_n e^{int}$是一三角多项式. 如果对任一实数$t$，$P(e^{it})>0$，则必存在三角多项式$Q(e^{it})$使

$$P(e^{it}) = |Q(e^{it})|^2. \tag{19}$$

**证** 考察有理函数$P(z)=\sum_{n=-N}^{N}c_n z^n$. 根据假定，$P(z)$在单位圆周$|z|=1$上取实数值. 由Schwarz反演定理，当$z\neq0$时，

$$P(z) = \overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}. \tag{20}$$

但为了便于读者参考，我们直接证明(20)于下：令

$$R(z)=\begin{cases}P(z) & 若|z|\leqslant 1;\\ \overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} & 若|z|>1.\end{cases}$$

则 $R(z)$ 在 $0<|z|<1$ 及 $|z|>1$ 内均为解析的. 由于 $P(z)$ 在 $|z|=1$ 上取实数值，由 $R(z)$ 的定义可知，它在复平面上(除 $z=0$ 外)连续. 因此 $R(z)$ 在复平面(除 $z=0$ 外)上解析. 由解析函数的唯一性定理可知，对一切 $z$

$$R(z)=P(z).$$

故(20)成立.

由于 $P(e^{it})>0$，$P(z)$ 在单位圆周 $|z|=1$ 上没有零点. 今设 $P(z)$ 在单位圆 $|z|<1$ 内的零点是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，其重数分别设为 $m_1,m_2,\cdots,m_n$. 由(20)可知，$\frac{1}{\bar{\alpha}_1}$，$\frac{1}{\bar{\alpha}_2}$，$\cdots$，$\frac{1}{\bar{\alpha}_n}$ 也是 $P(z)$ 的零点，而且其重数分别是 $m_1,m_2,\cdots,m_n$. 注意到 $P(z)$ 是形如 $\sum_{n=-N}^{n=N}c_nz^n$ 的有理函数，因此

$$P(z)=c\prod_{k=1}^{n}(z-\alpha_k)^{m_k}\left(\frac{1}{z}-\bar{\alpha}_k\right)^{m_k}.$$

取 $z=e^{it}$，则 $P(e^{it})=c\prod_{k=1}^{n}|e^{it}-\alpha_k|^{2m_k}$. 由 $P(e^{it})>0$，有 $c>0$，

令

$$Q(z)=\sqrt{c}\prod_{k=1}^{n}(z-\alpha_k)^{m_k},$$

那么 $Q(e^{it})$ 便满足(19). 证毕.

**定理 5.4** 设 $U$ 为 $\mathfrak{H}$ 上的酉算子. 则存在 $[0,2\pi]$ 上的谱系 $\{E_t\}$ 满足 $E_0=\theta$ 且使

$$U=\int_0^{2\pi}e^{it}dE_t. \tag{21}$$

此外，凡与 $U$ 可换的算子均与 $E_t(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 可换.

**证** 对任一三角多项式 $p(e^{it})=\sum_{n=-N}^{N}c_ne^{int}$，令

$$p(U)=\sum_{n=-N}^{N}c_nU^n.$$

映射：$p\longmapsto p(U)$ 具有下列性质：

1° 对任意的复数 $\alpha$、$\beta$ 有

$$(\alpha p_1+\beta p_2)(U)=\alpha p_1(U)+\beta p_2(U);$$

2° $$(p_1p_2)(U)=p_1(U)p_2(U);$$

3° $[p(U)]^*=\bar{p}(U)$. 特别地，若 $p(e^{it})$ 取实数值，则 $p(U)$ 为自共轭的；

4° 若 $p(e^{it})\geqslant 0$，则 $p(U)\geqslant\theta$.

性质 1°、2°、3° 均很显然，我们证明 4°：当 $p(e^{it})>0$ 时，由引理，存在三角多项式 $q(e^{it})$ 使

$$p(e^{it})=|q(e^{it})|^2=\overline{q(e^{it})}\,q(e^{it}).$$

于是 $p(U)=[q(U)]^*q(U)$，因此对任何 $x\in H$，

$$(p(U)x,x)=(q(U)x,q(U)x)\geqslant 0,\ p(U)\geqslant\theta.$$

若 $p(e^{it})\geqslant 0$，令 $p_n(e^{it})=p(e^{it})+\frac{1}{n}$，则 $p_n(e^{it})>0$，于是 $p_n(U)\geqslant\theta$. 令 $n\to\infty$，得 $p(U)\geqslant\theta$.

现在将上述映射拓广到以 $2\pi$ 为周期的更广的函数类上. 令 $C_1$ 为如下的函数类：其中每个函数是正三角多项式不增序列的极限. 再令 $C_2$ 为 $C_1$ 中函数的线性组合的全体.

任取 $x\in C_1$，则存在正三角多项式的不增序列 $\{p_n(e^{it})\}$ 使 $\lim\limits_{n\to\infty}p_n(e^{it})=x(e^{it})$. 由性质 4° 可知，$\{p_n(U)\}$ 是不增的正算子序列，再由定理 2.5，$\{p_n(U)\}$ 在算子强收敛意义下收敛于某一极限. 将此极限记为 $x(U)$. 我们证明 $x(U)$ 与序列 $\{p_n(e^{it})\}$ 的选择无关. 事实上，设 $\{q_n(e^{it})\}$ 是另一个正三角多项式的不增序列，满足

$\lim_{n\to\infty} q_n(e^{it}) = x(e^{it})$. 对于任给的 $n$，利用 Borel 有限覆盖定理不难证明，存在足够大的 $m$ 使

$$p_m(e^{it})\leqslant q_n(e^{it})+\frac{1}{n};\ q_m(e^{it})\leqslant p_n(e^{it})+\frac{1}{n}$$

对一切 $t\in[0,2\pi]$成立。于是我们有

$$p_m(U)\leqslant q_n(U)+\frac{1}{n}I;\quad q_m(U)\leqslant p_n(U)+\frac{1}{n}I.$$

取极限(先令 $m\to\infty$，再令 $n\to\infty$)，得

$$\lim_{m\to\infty}p_m(U)\leqslant\lim_{n\to\infty}q_n(U);\ \lim_{m\to\infty}q_m(U)\leqslant\lim_{n\to\infty}p_n(U).$$

因此 $\lim_{n\to\infty}p_n(U)=\lim_{n\to\infty}q_n(U)$，所以 $x(U)$ 由函数 $x$ 唯一确定。

现在设 $x\in C_2$. 则 $x(e^{it})$是 $C_1$ 中某些函数的线性组合，我们令 $x(U)$ 为 $C_1$ 中这些函数对应的算子的相应线性组合. 可以证明 $x(U)$ 是唯一确定的. 这样我们便建立了由 $C_2$ 到某些有界线性算子的集合的一个映射，这个映射具有下列性质:

1° 对任意的复数 $\alpha$、$\beta$ 有

$$(\alpha x+\beta y)(U)=\alpha x(U)+\beta y(U);$$

2° $$(xy)(U)=x(U)y(U);$$

3° $[x(U)]^*=\bar{x}(U)$，特别地，若 $x(e^{it})$取实数值，则 $x(U)$ 自共轭;

4° 若 $x(e^{it})\geqslant 0$，则 $x(U)\geqslant\theta$.

1°—4°中出现的所有函数均假定属于$C_2$. 性质1°—4°可以从多项式 $p(U)$的相应性质得到.

今对每个 $s\in[0,2\pi]$，定义区间$(-\infty,\infty)$上以 $2\pi$ 为周期的周期函数 $\delta_s(t)$ 如下:

当$s=0$时，令$\delta_0(t)=0$; 当$s=2\pi$时，令$\delta_{2\pi}(t)=1$. 对$0<s<2\pi$，则令

$$\delta_s(t)=\begin{cases}1, 若\ 2k\pi<t\leqslant 2k\pi+s\\0, 若\ 2k\pi+s<t\leqslant 2(k+1)\pi\end{cases}\quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

显然 $\delta_0$ 及$\delta_{2\pi}$均属于$C_2$. 现在证明对每个$s\in(0,2\pi)$,也有$\delta_s\in C_2$.

为此,再作函数

$$\delta'_0(t)=\begin{cases}1, 若\ t=2k\pi\\0, 若\ t\neq 2k\pi\end{cases}\quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

并令 $\delta'_s(t)=\delta_s(t)+\delta'_0(t)$. 对 $\delta'_s(t)$作图 1 中以 $2\pi$ 为周期的连续周期函数 $h_n(t)$. 显然$\{h_n(t)\}$是不增的函数列且处处收敛于

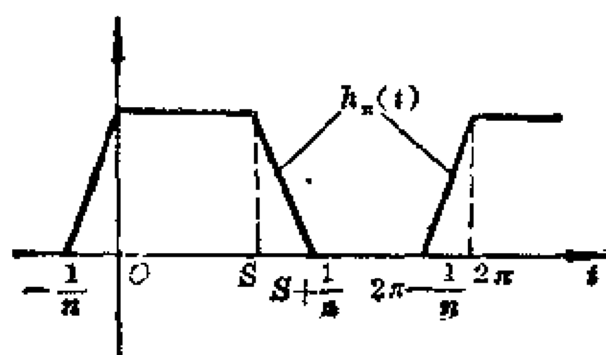



图 1

$\delta'_s(t)$. 由参考书目[12],对每个 $n$,存在三角多项式 $q_n(e^{it})$使

$$|h_n(t)-q_n(e^{it})|<\frac{1}{2^{n+1}}\quad (t\in(-\infty,\infty)).$$

令 $p_n(e^{it})=q_n(e^{it})+\frac{1}{2^{n-1}}$. 由上述不等式可知,序列$\{p_n(e^{it})\}$处处收敛于 $\delta'_s(t)$. 再由下列诸式

$$p_n(e^{it})-p_{n+1}(e^{it})=\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^n}+q_n(e^{it})-q_{n+1}(e^{it})$$

$$\geqslant\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^n}+q_n(e^{it})-h_n(t)+h_{n+1}(t)-q_{n+1}(e^{it})$$

$$\geqslant\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2^{n+2}}=\frac{1}{2^{n+2}}>0$$

可知,$\{p_n(e^{it})\}$是下降的. 因此$\{p_n(e^{it})\}$是一个处处收敛于$\delta'_s(t)$的下降三角多项式序列,故 $\delta'_s\in C_1$. 同理 $\delta'_0\in C_1$. 由 $\delta_s(t)=\delta'_s(t)$

$-\delta_0'(t)$ 可知，$\delta_s\in C_2$.

记 $E_s=\delta_s(U)$. 由于$[\delta_s(t)]^2=\delta_s(t)$且$\delta_s(t)$为实函数，故 $E_s$ 满足 $E_s^2=E_s$ 且 $E_s$ 是自伴的，因此 $E_s$ 是投影算子. 根据关于 $C_2$ 类函数对应的算子的性质 1°—4°，$\{E_s\}$具有下列性质：

a. $E_0=\theta$, $E_{2\pi}=I$;

b. 若 $s_1<s_2$，则 $E_{s_1}\leqslant E_{s_2}$;

c. 在算子强收敛意义下，$\{E_s\}$右连续；

d. 对每个 $s$，$E_s$ 是$U$及 $U^*$ 的多项式序列的极限. 因此凡与$U$及 $U^*$ 可换的算子均与 $E_s$ 可换. 注意到 $U^*=U^{-1}$，而凡与$U$可换的算子必与 $U^{-1}$ 可换，故实际上凡与$U$可换的算子必与 $E_s$ 可换.

性质 a、b、d 都是显然的，故只需证明性质 c. 为此，回到函数 $\delta_s'(t)$ $(s\in[0, 2\pi))$. 前面已经指出，存在下降的三角多项式序列 $\{p_n(t)\}$ 处处收敛于 $\delta_s'(t)$，于是

$$p_n(U)\to\delta_s'(U). \tag{22}$$

记 $E_s'=\delta_s'(U)$. 不妨假定

$$p_n(e^{it})\geqslant\delta'_{s+\frac{1}{n}}(t)\text{，于是}p_n(U)\geqslant E_{s+\frac{1}{n}}. \tag{23}$$

由(22)、(23)，在算子强收敛意义下，$E'_{s+\frac{1}{n}}\to E_s'$. 因此在算子强收敛意义下，$E_{s+\frac{1}{n}}\to E_s$. 再由性质 b 可知，$\lim\limits_{t\to s+0}E_t=E_s$，c 成立.

由性质 a—d，$\{E_s\}$是$[0,2\pi]$上的一个谱系且满足 $E_0=\theta$.

现在证明等式(21). 为此，作$[0,2\pi]$的分划：

$$0=s_0<s_1<\cdots<s_n=2\pi,$$

使 $\max(s_{k+1}-s_k)\leqslant\delta$，这里 $\delta$ 是预先任意给定的正数. 在区间$[s_0, s_1]$内任取一点 $s_0'$，在区间$(s_k, s_{k+1}]$内任取一点 $s_k'$ $(k=1,2,\cdots,n-1)$. 若 $s\in(0, 2\pi]$，则必有某个 $k_0$ 使 $s\in(s_{k_0}, s_{k_0+1}]$ $(k_0=0, 1,\cdots,n-1)$，于是

$$0\leqslant\overline{\left[e^{is}-\sum_{k=0}^{n-1}e^{is'_k}(\delta_{s_{k+1}}(s)-\delta_{s_k}(s))\right]}$$

$$\times\left[e^{is}-\sum_{k=0}^{n-1}e^{is'_k}(\delta_{s_{k+1}}(s)-\delta_{s_k}(s))\right]$$

$$\leqslant|e^{is}-e^{is'_{k_0}}|^2\leqslant|s-s'_{k_0}|^2\leqslant\delta^2, \tag{24}$$

若 $s=0$，则(24)显然成立．于是(24)对一切 $s\in[0,\ 2\pi]$成立．将 $U$ 代入(24)，得

$$\theta\leqslant\left[U-\sum_{k=0}^{n-1}e^{is'_k}(E_{s_{k+1}}-E_{s_k})\right]^*\left[U-\sum_{k=0}^{n-1}e^{is'_k}(E_{s_{k+1}}-E_{s_k})\right]$$
$$\leqslant\delta^2I.$$

因此

$$\left\|U-\sum_{k=0}^{n-1}e^{is'_k}(E_{s_{k+1}}-E_{s_k})\right\|\leqslant\delta.$$

令 $\delta\to0$，可得(21)．至于定理 5.4 的第二个结论，由性质 d 立即可得．证毕．

**注** 对于酉算子，我们也可以像自共轭算子那样，讨论它的算子演算．对于任一定义在$[0,2\pi]$上的有界 Borel 可测函数 $u(\lambda)$，通过等式

$$(u(U)x,y)=\int_0^{2\pi}u(\lambda)d(E_\lambda x,y)\quad(x、y\in\mathfrak{U}) \tag{25}$$

可以定义算子 $u(U)$，而且这样定义的算子函数具有与本章定理4.5类似的全部性质．此外还容易看出，$C_2$类中的函数都是有界Borel可测的，因此这类函数通过(25)对应于一个算子．可以证明，它与第321页上定义的算子一致．

利用酉算子的算子演算，可以研究酉算子的谱的特征．凡此种种均与自共轭算子的情形完全类似，故从略．

## §6 正常算子及其谱分解定理

### 6.1 直角坐标分解与极坐标分解

设 $H$ 为复 Hilbert 空间. 任取 $T\in\mathscr{B}(H)$, 则存在自共轭算子 $T_1$、$T_2$ 使

$$T=T_1+iT_2. \tag{1}$$

$T_1$、$T_2$ 分别称为 $T$ 的实部、虚部, 而称(1)为 $T$ 的直角坐标分解.

其实, 令

$$T_1=\frac{T+T^*}{2}, T_2=\frac{i(T^*-T)}{2},$$

则 $T_1$、$T_2$ 均为自共轭算子且(1)成立. $T_1$、$T_2$ 还是唯一确定的. 设另有自共轭算子 $T_1'$、$T_2'$ 使 $T=T_1'+iT_2'$. 则 $T^*=T_1'-iT_2'$. 于是 $T+T^*=2T_1'$. 故

$$T_1'=\frac{T+T^*}{2}=T_1,$$

因此 $T_2'=T_2$. 唯一性成立.

有界线性算子, 除了直角坐标分解外, 还有极坐标分解. 为此先引入部分等距算子的概念.

**定义 6.1** 设 $U\in\mathscr{B}(H)$. 称 $U$ 为部分等距算子, 若存在 $H$ 的闭子空间 $L$, 使得对任一 $x\in L$, 有 $\|Ux\|=\|x\|$, 而对任一 $x\in L^{\perp}$, 有 $Ux=0$.

设 $T\in\mathscr{B}(H)$. 我们证明, 存在正算子 $P$ 以及部分等距算子 $U$ 使得

$$T=UP. \tag{2}$$

(2)称为算子 $T$ 的极坐标分解, 简称为极分解.

其实, 由于 $T^*T$ 是正算子, 故存在唯一的正平方根 $(T^*T)^{1/2}$.

记 $P=(T^*T)^{1/2}$，则对任何 $x\in\mathfrak{U}$，有

$$\|Px\|^2=(Px,Px)=(P^2x,x)$$
$$=(T^*Tx,x)=(Tx,Tx)=\|Tx\|^2,$$

故

$$\|Px\|=\|Tx\|. \tag{3}$$

作算子 $U$，它将每个形如 $Px$ 的元素映成形如 $Tx$ 的元素，即

$$U(Px)=Tx. \tag{4}$$

则 $U$ 具有下列性质：

1° $U$ 的定义是有意义的；

2° $U$ 是由 $P$ 的值域到 $T$ 的值域上的线性算子；

3° $U$ 是等距的，即 $\|U(Px)\|=\|Px\|$.

性质 2° 及 3° 可由 $U$ 的定义直接导出. 现在证明 1°.

设 $Px=Px'$，则 $P(x-x')=\theta$，由等式(3)可知，$Tx=Tx'$. 因此，不论用 $Tx$ 或 $Tx'$ 作为 $U$ 在点 $Px(=Px')$ 处的值，其结果一致，故 $U$ 是有意义的.

将 $P$、$T$ 的值域的闭包分别记为 $L$、$M$. 由算子 $U$ 的性质 2°、3°，我们可以将 $U$ 连续地延拓到 $L$ 上. 由性质3°，经过延拓后的 $U$ 是由 $L$ 到 $M$ 上的线性算子，并且是等距的，即对任何 $y\in L$，有

$$\|Uy\|=\|y\|. \tag{5}$$

因 $P$ 自共轭，由习题第 17 题，$L$ 的直交补 $L^\perp$ 恰好是 $P$ 的零空间. 现在我们将 $U$ 延拓到整个空间 $\mathfrak{U}$ 上，使得对任何 $y\in L^\perp$，$Uy=\theta$，于是 $U$ 成为 $\mathfrak{U}$ 上的一个部分等距算子. 我们将等式(4)重新写为

$$Tx=UPx \quad （对一切\ x\in\mathfrak{U}）, \tag{6}$$

便有 $T=UP$，这就是算子 $T$ 的极分解(2).

### 6.2 正常算子的基本性质

这一段介绍正常算子及其基本性质.

**定义 6.2** 设 $T\in\mathscr{B}(\mathfrak{U})$，若 $T$ 与 $T^*$ 可换，则称 $T$ 为正常算子.

**定理 6.1** $T\in\mathscr{B}(\mathfrak{U})$ 是正常算子的充分必要条件是下列两性质之一成立:

(i) 在 $T$ 的直角坐标分解 $T=T_1+iT_2$ 中，$T_1$ 与 $T_2$ 可换，这里 $T_1$、$T_2$ 分别是 $T$ 的实部与虚部;

(ii) 对任何 $x\in\mathfrak{U}$,

$$\|Tx\|=\|T^*x\|.$$

**证** (i) 设 $T$ 是正常算子，则 $T$、$T^*$ 可换. 由等式

$$T_1=\frac{T+T^*}{2},\quad T_2=\frac{i(T^*-T)}{2}$$

可知，$T_1$、$T_2$ 可换.

反之，设 $T_1$、$T_2$ 可换，由 $T=T_1+iT_2$，$T^*=T_1-iT_2$ 可知，$T$、$T^*$ 可换.

(ii) 设 $T$ 是正常算子. 任取 $x\in\mathfrak{U}$，那么

$$\|Tx\|^2=(Tx,Tx)=(T^*Tx,x)$$
$$=(TT^*x,x)=(T^*x,T^*x)=\|T^*x\|^2.$$

故 $\|Tx\|=\|T^*x\|$.

反之，设对一切 $x\in\mathfrak{U}$，有 $\|Tx\|=\|T^*x\|$，于是

$$(T^*Tx,x)=(Tx,Tx)=\|Tx\|^2=\|T^*x\|^2$$
$$=(T^*x,T^*x)=(TT^*x,x). \tag{7}$$

由(7)，$((T^*T-TT^*)x,x)=0$. 再由极化恒等式，$T^*T-TT^*=\theta$，故 $T$ 是正常算子. 证毕.

关于正常算子的极分解，则有下面的定理.

**定理 6.2** $T\in\mathscr{B}(\mathfrak{U})$ 为正常算子的充分必要条件是在 $T$ 的极分解 $T=UP$ 中，$U$ 与 $P$ 可换且可取 $U$ 为酉算子.

**证** 设 $T$ 为正常算子，由定理 6.1(ii)及等式(3)，对任何 $x\in\mathfrak{U}$，有

$$\|Tx\|=\|T^*x\|=\|Px\|.$$

因此 $T$、$T^*$ 以及 $P$ 有相同的零空间. 前一段讨论极坐标分解时，我们用 $L$、$M$ 分别表示 $P$、$T$ 的值域的闭包，现在仍用这些记号，此外，我们还指出 $P$ 的零空间是 $L^\perp$. 于是 $T$、$T^*$ 的零空间也是 $L^\perp$. $L^\perp$ 既然是 $T^*$ 的零空间，仍由习题第 17 题，$L^\perp$ 便成为 $T$ 的值域(其闭包为 $M$) 的直交余，因此 $L=M$. 故(5)中的 $U$ 是 $L$ 上的酉算子. 显然，我们可以很容易地将 $U$ 延拓到 $\mathfrak{H}$ 上，使 $U$ 成为 $\mathfrak{H}$ 上的酉算子(例如可以取 $U$ 为 $L^\perp$ 上的单位算子).

还需证明 $U$ 与 $P$ 可换. 注意到 $P$ 是 $T^*T$ 的正平方根因而是 $T^*T$ 的多项式序列的极限，而 $T^*T$ 与 $T$、$T^*$ 可换，因此 $P$ 与 $T$、$T^*$ 可换. 由此可知，对任何形如 $Px(x\in\mathfrak{H})$ 的元素，有

$$PU(Px)=P(UPx)=PTx$$
$$=TPx=UP(Px),$$

进而对一切 $y\in L$(因 $L$ 是 $P$ 的值域的闭包)，有

$$PUy=UPy \tag{8}$$

现在设 $y\in L^\perp$，则有 $Py=0$，故 $UPy=0$. 另一方面，$Uy\in L^\perp$ (因 $U$ 将 $L^\perp$ 中的元素映入 $L^\perp$ 中)，故 $PUy=0$. 因此(8)对一切 $y\in L^\perp$ 也成立，于是对一切 $y\in\mathfrak{H}$ 成立. 故 $U$ 与 $P$ 可换.

反之，设在极分解 $T=UP$ 中，$U$ 为酉算子，$U$ 与 $P$ 可换，于是

$$TT^*=UPPU^*=P^2UU^*$$
$$=P^2=T^*T.$$

故 $T$ 与 $T^*$ 可换，$T$ 为正常算子. 证毕.

**例 1** 设 $\varphi(\cdot)$ 是定义在 $[a,\ b]$ 上的复值本性有界可测函数. 在复 $L^2[a,b]$ 空间上定义算子 $T$ 如下:

$$(Tx)(t)=\varphi(t)x(t)\ (x\in L^2[a,b]).$$

则

$$(T^*x)(t)=\overline{\varphi}(t)x(t)\ (x\in L^2[a,b]).$$

因此

$$(TT^*x)(t)=\varphi(t)\overline{\varphi}(t)x(t);$$
$$(T^*Tx)(t)=\overline{\varphi}(t)\varphi(t)x(t).$$

故 $TT^*=T^*T$, $T$ 是正常算子．现在求出 $T$ 的实部与虚部．由

$$(T_1x)(t)=\left(\frac{T+T^*}{2}x\right)(t)$$
$$=\frac{\varphi(t)+\overline{\varphi}(t)}{2}x(t)=[\mathrm{Re}\varphi(t)]x(t), \tag{9}$$

这里 $\mathrm{Re}\lambda$ 表示复数 $\lambda$ 的实部．同理

$$(T_2x)(t)=[\mathrm{Im}\varphi(t)]x(t), \tag{10}$$

这里 $\mathrm{Im}\lambda$ 表示复数 $\lambda$ 的虚部．因此 $T$ 的实部与虚部是分别由 $\varphi(\cdot)$ 的实部与虚部按照(9)及(10)定义的算子．

### 6.3　正常算子的谱分解定理

利用正常算子的直角坐标分解或极分解可以获得正常算子的谱分解定理．在这一段中，我们将利用直角坐标分解来研究这一定理．

设 $T$ 为正常算子，则 $T=T_1+iT_2$，其中 $T_1$、$T_2$ 为可换的自共轭算子．$T_1$、$T_2$ 的谱系分别记为 $\{E_\lambda^{(1)}\}$、$\{E_\mu^{(2)}\}$．由定理 4.2，对任何 $\lambda$ 及 $\mu$，$E_\lambda^{(1)}$ 与 $E_\mu^{(2)}$ 可换．

设 $\Delta$ 为下列矩形之一：

$$[\lambda_0\leqslant\lambda\leqslant\lambda_1;\mu_0\leqslant\mu\leqslant\mu_1]; \tag{11}$$
$$[\lambda_0<\lambda\leqslant\lambda_1;\mu_0<\mu\leqslant\mu_1]; \tag{12}$$
$$[\lambda_0\leqslant\lambda<\lambda_1;\mu_0\leqslant\mu<\mu_1]; \tag{13}$$
$$[\lambda_0<\lambda<\lambda_1;\mu_0<\mu<\mu_1]. \tag{14}$$

凡说及矩形，均指上述情形之一．令

$$E(\Delta)=\begin{cases}(E_{\lambda_1}^{(1)}-E_{\lambda_0-0}^{(1)})(E_{\mu_1}^{(2)}-E_{\mu_0-0}^{(2)}) & \text{若 } \Delta \text{ 为(11)中的矩形;}\\(E_{\lambda_1}^{(1)}-E_{\lambda_0}^{(1)})(E_{\mu_1}^{(2)}-E_{\mu_0}^{(2)}) & \text{若 } \Delta \text{ 为(12)中的矩形;}\\(E_{\lambda_1-0}^{(1)}-E_{\lambda_0-0}^{(1)})(E_{\mu_1-0}^{(2)}-E_{\mu_0-0}^{(2)}) & \text{若 } \Delta \text{ 为(13)中的矩形;}\\(E_{\lambda_1-0}^{(1)}-E_{\lambda_0}^{(1)})(E_{\mu_1-0}^{(2)}-E_{\mu_0}^{(2)}) & \text{若 } \Delta \text{ 为(14)中的矩形.}\end{cases}$$

由于对任何 $\lambda$ 及 $\mu$，$E_\lambda^{(1)}$ 与 $E_\mu^{(2)}$ 可换，故对任何矩形 $\Delta$，$E(\Delta)$ 是投影算子. 其次，这个以矩形为变元的投影算子值函数具有下列性质：

1° 可加性 对任意两个不相交的矩形 $\Delta_1$、$\Delta_2$，若 $\Delta_1 \cup \Delta_2$ 仍为矩形，则

$$E(\Delta_1)+E(\Delta_2)-E(\Delta_1 \cup \Delta_2);$$

2° 可乘性 我们约定 $E(\varnothing)=\theta$，则对任意两个矩形 $\Delta_1$、$\Delta_2$ 有

$$E(\Delta_1)E(\Delta_2)=E(\Delta_1 \cap \Delta_2).$$

用形如(12)的矩形 $\Delta_{hk}$ 来划分复平面，这里

$$\Delta_{hk}=[\lambda_h<\lambda\leqslant\lambda_{h+1};\mu_k<\mu\leqslant\mu_{k+1}].$$

考察积分和

$$K=\sum_{h,k}(\lambda_{h+1}+i\mu_{k+1})E(\Delta_{hk})$$

$$=\sum_h\lambda_{h+1}(E_{\lambda_{h+1}}^{(1)}-E_{\lambda_h}^{(1)})+i\sum_k\mu_{k+1}(E_{\mu_{k+1}}^{(2)}-E_{\mu_k}^{(2)}),$$

显然上述每个和中均只含有限个不为零的项.

令 $\delta=\max\{(\lambda_{h+1}-\lambda_h),(\mu_{k+1}-\mu_k)\}$. 由关于自共轭算子的谱分解定理的讨论，当 $\delta\to0$ 时，$K$ 收敛于 $T_1+iT_2=T$. 今任取 $\lambda_{hk}+i\mu_{hk}\in\Delta_{hk}$，作积分和

$$K'=\sum_{h,k}(\lambda_{hk}+i\mu_{hk})E(\Delta_{hk}).$$

任取 $x\in\mathfrak{H}$，通过直接验算可以证明

$$\|(K'-K)x\|^2\leqslant2\delta^2\|x\|^2,$$

因此

$$\|K'-K\|\leqslant\sqrt{2}\,\delta.$$

于是当 $\delta\to0$，$K'$ 收敛于 $T_1+iT_2=T$. $K'$ 的极限记为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(\lambda+i\mu)E(d\lambda d\mu).$$

于是

$$T=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(\lambda+i\mu)E(d\lambda d\mu). \tag{15}$$

类似地，可以证明

$$T^*=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(\lambda-i\mu)E(d\lambda d\mu). \tag{16}$$

由于

$$\left.\begin{aligned}\|T_1\|\leqslant\frac{1}{2}(\|T\|+\|T^*\|)=\|T\|;\\ \|T_2\|\leqslant\frac{1}{2}(\|T\|+\|T^*\|)=\|T\|,\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

故(15)、(16)又可改写为

$$T=\int_{-\|T\|-0}^{\|T\|}\int_{-\|T\|-0}^{\|T\|}(\lambda+i\mu)E(d\lambda d\mu); \tag{18}$$

$$T^*=\int_{-\|T\|-0}^{\|T\|}\int_{-\|T\|-0}^{\|T\|}(\lambda-i\mu)E(d\lambda d\mu). \tag{19}$$

综上所述，我们有

**定理6.3　对任何正常算子$T$，存在一投影算子系 $\{E(\Delta)\}$，其中 $E(\cdot)$ 是以矩形为变元的可加及可乘的投影算子值函数使得(15)、(16)(或者(18)、(19))成立.**

在§5及§6中，我们研究了酉算子、正常算子以及它们的谱分解定理，希望读者注意：

1° 从酉算子的定义及性质可知，酉算子是Hilbert空间上一类满足条件$U^*=U^{-1}$的算子. 因此酉算子可以从考虑$U$的共轭算子及$U$的逆算子的关系而得到. 复空间$L^2(-\infty,\infty)$上的Fourier变换及可分Hilbert空间上的双侧移位算子是两类重要的酉算子；

2° 当$\mathfrak{U}$是复Hilbert空间时，我们通过Cayley变换建立了酉算子与自共轭算子的关系，由于本书只讨论有界自共轭算子，因此

所建立的关系还是一种特殊情形；

3° 关于酉算子的谱分解定理，我们是通过建立由三角多项式到酉算子的多项式的映射而逐步获得的．这与建立自共轭算子的谱分解定理所使用的方法很不相同．

我们在§5中还指出，通过 Cayley 变换可以由自共轭算子的谱分解定理获得酉算子的谱分解定理．此外，由 Cayley 变换的逆变换则可以由酉算子的谱分解定理获得自共轭算子的谱分解定理．凡此种种，均未详细讨论．

4° 根据正常算子的定义，它是满足 $TT^*=T^*T$ 的算子．因此它也是通过比较 $T$ 及其共轭算子而提出的．关于正常算子的谱分解定理，我们是通过它的直角坐标分解及自共轭算子的谱分解定理而建立的．应当着重指出，在正常算子的直角坐标分解中，它的实部与虚部可换是正常算子谱分解定理得以建立的关键．对于一般的有界线性算子，虽然也有直角坐标分解，但却无法通过其实部与虚部的谱分解定理而获得进一步信息．

## 第九章 习 题

§1. §2.

1. 设 $f$ 是 Hilbert 空间 $\mathfrak{U}$ 的子空间 $G$ 上的有界线性泛函，则 $f$ 在 $\mathfrak{U}$ 上存在唯一的延拓 $F$，满足 $\|F\|=\|f\|_G$.

2. 试求下列作用于 $l^2$ 上的算子的共轭算子：

(a) $T\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}=\{0,\xi_1,\xi_2,\cdots\}$;

(b) $T\{\xi_1,\xi_2,\cdots\}=\{\xi_2,\xi_3,\cdots\}$;

(c) $T\{\xi_1\xi_2,\cdots\}=\{0,0,\alpha_1\xi_1,\alpha_2\xi_2\cdots\}$，这里 $\{\alpha_n\}$ 为有界数列.

3. 试求下列作用于 $L^2(-\infty,\infty)$ 上的算子的共轭算子：

(a) $(Tx)(t)=x(t+h)$ ($h$ 是给定的实数);

(b) $(Tx)(t)=\alpha(t)x(t+h)$ ($\alpha(t)$ 是有界可测函数，$h$ 是给定的实数);

(c) $(Tx)(t)=\dfrac{1}{2}[x(t)+x(-t)]$.

如不作特别声明，在以下的练习中，均假定算子定义在Hilbert空间$\mathfrak{U}$上.

4. 设$T$是自共轭算子且有有界逆算子. 证明$T^{-1}$也是自共轭的.

5. 证明：有界线性算子$T$是正算子的充分必要条件是存在有界线性算子$S$使$T=S^*S$.

6. 设$T_1$、$T_2$均为自共轭算子，若$T_1\geqslant T_2$、$T_2\geqslant T_1$同时成立，则$T_1=T_2$.

7. 设自共轭算子$T_1$、$T_2$满足$\theta\leqslant T_1\leqslant T_2$且$T_1$、$T_2$可换，则$T_1^n\leqslant T_2^n$对任何自然数$n$成立.

8. 设$T_1$、$T_2$自共轭且存在$c>0$使$cI\leqslant T_1\leqslant T_2$，则$T_1$、$T_2$均有有界逆算子且$c^{-1}I\geqslant T_1^{-1}\geqslant T_2^{-1}$(注：利用17题).

9. 设$T_1$、$T_2$自共轭、可换且$\theta\leqslant T_1\leqslant T_2$，则$\theta\leqslant T_1^{\frac{1}{2}}\leqslant T_2^{\frac{1}{2}}$.

10. 试举出不可比较的自共轭算子$T_1$与$T_2$的例.

11. 设$T_1$、$T_2$为自共轭算子，试证存在自共轭算子$S$使$T_1\leqslant S$，$T_2\leqslant S$.

12. 试给出自共轭算子$T_1$，$T_2$的例，使$\theta\leqslant T_1\leqslant T_2$，但$T_1^2$、$T_2^2$不可比较.

13. 设自共轭算子$T$存在右逆，即存在有界线性算子$S$使$TS=I$，则$T$有有界的逆算子，(注：利用17题).

14. 设$T$为有界线性算子，且$\|T\|\leqslant 1$，证明

$$\{x:Tx=x\}=\{x:T^*x=x\}.$$

15. 设$A$是复内积空间$\mathfrak{U}$上的有界线性算子，如果对每个$x\in\mathfrak{U}$，$(Ax,x)=0$，则$A=\theta$. 对于实空间，此结果成立否？如果$\mathfrak{U}$是Hilbert空间且$A$是自共轭的，则不论$\mathfrak{U}$是实是复，只要$(Ax,x)=0\ (x\in\mathfrak{U})$，就有$A=\theta$.

16. 设$A$、$B$是Hilbert空间$\mathfrak{U}$上的线性算子，适合

$$(Ax,y)=(x,By),$$

其中$x$、$y\in\mathfrak{U}$，则$A$是有界的.

17. 设$T$为定义在Hilbert空间$\mathfrak{U}$上的有界线性算子，令$\mathfrak{N}$为$T$的零空间，$\mathfrak{M}$为$T^*$的值域，证明$\mathfrak{N}=\mathfrak{M}^{\perp}$.

18. 设$\mathfrak{U}$为复Hilbert空间，$T$为$\mathfrak{U}$上的有界线性算子，若对一切$x\in\mathfrak{U}$，$\mathrm{Re}(Tx,x)=0$，则$T=-T^*$.

19. 设$\{e_n\}$是Hilbert空间$\mathfrak{U}$中的标准直交系，$\{\lambda_n\}\to 0\ (n\to\infty)$，且每个$\lambda_n$是实数，令

$$Tx=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(x,e_n)e_n,$$

则 $T$ 是紧自共轭算子.

20. 设 $T$ 为 $L^2[a,b]$ 上的紧自共轭算子,而且有 $L^2[a,b]$ 中的完备标准直交系 $\{e_n\}$,使

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|Te_n\|^2<+\infty.$$

证明必存在 $a\leqslant t\leqslant b, a\leqslant s\leqslant b$ 上平方可积函数 $K(t,s)$ 适合:

$$\overline{K(s,t)}=K(t,s)$$

且对一切 $x\in L^2[a,b]$,

$$Tx(t)=\int_a^b K(t,s)x(s)ds.$$

21. 设 $T$ 是可分 Hilbert 空间 $\mathfrak{U}$ 上的有界线性算子, $\{e_n\}$ 为 $\mathfrak{U}$ 中完备的标准直交系. 若对任何 $m,n$, 有 $(Te_n,e_m)=\overline{(Te_m,e_n)}$, 则 $T$ 自伴.

22. 设 $\mathfrak{U}$ 是 Hilbert 空间, $T$、$S\in\mathscr{B}(\mathfrak{U})$. 若 $T$ 是紧算子, $S^*S\leqslant T^*T$, 则 $S$ 也是紧算子.

§3. §4.

如不作特别声明, 在以下的练习中, 均假定算子作用在 Hilbert 空间 $\mathfrak{U}$ 上.

23. 设 $P$ 是投影算子, 如果 $\|Px\|=\|x\|$, 则 $Px=x$, 这里 $x\in\mathfrak{U}$.

24. 设 $P$ 是投影算子, $L$ 是 $P$ 的投影子空间, $T$ 是有界线性算子. 则 $L$ 是 $T$ 的不变子空间(即对任何 $x\in L$, 有 $Tx\in L$)的充分必要条件是 $TP=PTP$.

25. 称 $\mathfrak{U}$ 的闭子空间 $L$ 约化 $T$, 是指 $L$ 及 $L^\perp$ 都是 $T$ 的不变子空间. 设 $P$ 是投影算子, 以 $L$ 为投影子空间, 则 $L$ 约化 $T$ 的充分必要条件是 $PT=TP$.

26. 设 $\{e_k\}$ $(k=1,2,3,\cdots)$ 是 $\mathfrak{U}$ 中的标准直交系, $L$ 是 $\{e_k\}$ 张成的子空间, 证明 $\bar{L}$ 上的投影算子 $P$ 可表示成

$$Px=\sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k \quad (x\in\mathfrak{U}).$$

27. 设 $P_1$、$P_2$ 为可换的投影算子, 则 $P=P_1+P_2-P_1P_2$ 也是投影算子, 且 $P\geqslant P_1, P\geqslant P_2$. 当任一投影算子 $Q$ 满足 $Q\geqslant P_1, Q\geqslant P_2$ 时, 则必满足 $Q\geqslant P$.

28. 设 $\{P_\alpha: \alpha\in A\}$ 是一族投影算子, 证明存在投影算子 $P$, 使得对一切 $\alpha\in A$, 有 $P\geqslant P_\alpha$, 且对任何投影算子 $Q$, 当 $Q\geqslant P_\alpha$ (对一切 $\alpha\in A$) 时, 有 $Q\geqslant P$. 记

$$P=\sup_{\alpha\in A}P_\alpha.$$

29. 设$\mathfrak{U}$是可分 Hilbert 空间，$\{P_\alpha:\alpha\in A\}$是一族投影算子. 证明必有 $A$ 的有限或可列子集 $A_0$，使

$$\sup_{\alpha\in A}P_\alpha=\sup_{\alpha\in A_0}P_\alpha.$$

30. 设 $P$ 是 $L^2[a,b]$中的投影算子，如果对$[a,b]$ 上的任何有界可测函数 $\varphi$，都有

$$(P\varphi x)(t)=\varphi(t)(Px)(t)\ (x\in L^2[a,b]).$$

证明存在$[a,b]$的可测子集 $E$，使得

$$(Px)(t)=\chi_E(t)x(t)\ (x\in L^2[a,b]),$$

这里 $\chi_E$ 是$E$的特征函数.

31. 设$T$是复 Hilbert 空间$\mathfrak{U}$上的自共轭算子，则存在自共轭算子$S$使 $S^3=T$.

32. 设$\mathfrak{U}$为可分 Hilbert 空间，$T$是$\mathfrak{U}$上的自共轭算子. 又设有 $x_0\in\mathfrak{U}$ 使$\{x_0,Tx_0,T^2x_0,\cdots,T^nx_0,\cdots\}$张成的子空间在$\mathfrak{U}$中稠密. 设 $\{E_\lambda\}$ 是$T$的谱系，令 $\sigma(\lambda)=(E_\lambda x_0,x_0)$，证明必存在$L^2(\sigma)$($L^2(\sigma)$表示关于$L$-$S$测度$\sigma$平方可积函数的全体)到$\mathfrak{U}$上的等距同构映射 $A$，使得当 $f\in L^2(\sigma)$时，

$$(A^{-1}TA)f(t)=tf(t).$$

33. 设 $T=\int_{m-0}^{M}\lambda dE_\lambda$，对 $x\in\mathfrak{U}$，$\|x\|=1$，令 $\alpha_x=(Tx,x)$，$\beta_x=\|Tx\|$，则 $\beta_x^2\geqslant\alpha_x^2$，且对任意的 $\varepsilon>0$，必存在 $\lambda_0\in\sigma(T)$，使

$$\alpha_x-\sqrt{\beta_x^2-\alpha_x^2}-\varepsilon\leqslant\lambda_0\leqslant\alpha_x+\sqrt{\beta_x^2-\alpha_x^2}+\varepsilon.$$

34. 设$T$是复 Hilbert 空间$\mathfrak{U}$上的自共轭算子，$\{E_\lambda\}$为$T$的谱系，证明$T$的值域的闭包是$[(I-E_0)+E_{-0}](\mathfrak{U})$.

35. 设$\mathfrak{U}$是复 Hilbert 空间，$\{\alpha_n\}$是实数列且 $\sup\limits_n|\alpha_n|<+\infty$. 令

$$Tx=y:\eta_n=\alpha_n\xi_n,$$

其中 $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}$，$y=\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots\}$. 证明 $\sigma(T)$ 等于$\{\alpha_n\}$的闭包，每个 $\alpha_n$ 是$T$的特征值且$T$的谱系 $E_\lambda$ 由下式给出：

$$(E_\lambda x,y)=\sum_{\alpha_i\leqslant\lambda}\xi_i\eta_i.$$

36. 设$T$是复 Hilbert 空间$\mathfrak{U}$上的自共轭算子，用$|T|$表示 $T^2$ 的正平方根，令

$$T_+=\frac{1}{2}(|T|+T),\ T_-=\frac{1}{2}(|T|-T).$$

证明：算子$|T|$是使不等式$T_+\leqslant S, T_-\leqslant S$成立且与$T$可换的正算子$S$中的最小者.

37. 承上题,证明：$T_+$是使 $T\leqslant S$ 成立且与$T$可换的正算子$S$中的最小者.

§5. §6.

如不作特别声明,在以下的练习中,仍设$\mathfrak{U}$是复 Hilbert 空间.

38. 设$T$是自共轭算子,证明$U=e^{iT}$是酉算子,这里

$$e^{iT}=I+iT+\frac{1}{2!}(iT)^2+\cdots.$$

39. 设$T$是$l^2$中的算子：$T\{x_1, x_2, \cdots\}=\{\alpha_1x_1, \alpha_2x_2, \cdots\}$,其中$\alpha_n (n=1, 2, 3, \cdots)$是数,试找出$T$是酉算子的充分必要条件

40. 设$U$是酉算子，$I-U$是紧的. 证明必有单位圆周上的有限个或可列个数$\{e^{i\theta_n}\}$以及相互直交的投影算子$\{P_n\}$使$I=\sum\limits_n P_n$, $U=\sum\limits_n e^{i\theta_n}P_n$.

41. 称$T$是等距算子,如果对任何$x\in\mathfrak{U}$,有$\|Tx\|=\|x\|$. 证明:$T$是等距算子的充分必要条件是$T^*T=I$.

42. 试讨论习题第3题中哪些算子是酉算子?

43. 证明:$T$是部分等距算子的充分必要条件是$T^*T=P$, 这里$P$是某个投影算子.

44. 若$T$是正常算子,则对一切自然数$n$,有$\|T^n\|=\|T\|^n$.

45. 设$T$、$S$均为正常算子且$TS=\theta$,问$ST$是否等于零.

46. 若$T^2=T$且$T$是正常的,则$T$是自共轭算子.

47. 设$T$是有界线性算子,则对任意的实数$\alpha$、$\beta$, $e^{i\alpha}T+e^{i\beta}T^*$ 是正常算子.

48. 证明$T$是正常算子的充分必要条件是存在酉算子$U$使$T^*=UT$.

# 第十章　广义函数论大意

函数是古典分析中的基本概念之一．按照定义，所谓函数就是对空间或其某个子集内的每个点赋予一个数值的对应．迄今为止，它仍是古典分析的主题．但是随着科学技术的发展以及数学自身的需要，古典的函数概念已不能反映很多复杂的客观事物．人们开始提出和研究集合的函数以及函数的函数，等等．例如在物理学中广泛应用着的"$\delta$-函数"，它是这样一个函数，除在原点外到处为零，而在原点则等于无穷大，但整个函数的积分值却为1．这从古典数学的观点而论是不可理解的．广义函数的出现为这类复杂的客观现象提供了可靠的数学基础以及灵活的数学工具．

## §1　基本函数空间$\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$及广义函数

在这一节中，我们将引进基本函数空间$\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$并研究广义函数的一些基本性质．

### 1.1　基本函数空间$\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$

在引进基本函数空间$\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$之前，先作一些准备工作．

对于$n$维 Euclid 空间$\mathbb{R}^n$中的点$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，记$\|x\|=(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^{1/2}$．设$p_1, p_2, \cdots, p_n$为$n$个非负整数，多重指标$p$是指如下的有序$n$-数组

$$p=(p_1, p_2, \cdots, p_n),$$

记$|p|=p_1+p_2+\cdots+p_n$．对于每个多重指标$p$，引进偏微分算子：

$$D^p=\frac{\partial^{|p|}}{\partial x_1^{p_1}\cdots\partial x_n^{p_n}}.$$

设 $\varphi$ 为定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的函数，称集合 $\{x:\varphi(x)\neq 0\}$ 的闭包为 $\varphi$ 的支集，记为 $\mathrm{supp}\varphi$.

设 $\varphi$ 为定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的函数，称 $D^p\varphi$(如果存在) 为 $\varphi$ 的$p$阶偏导数．如果 $p_j=0$，则表示不对 $x_j$ 求偏导数，如果所有的 $p_j=0$ $(j=1,2,\cdots,n)$，表示不求任何偏导数.

$\mathbf{R}^n$ 上无限次可微复值函数的全体记为 $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$．$\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ 中具有紧支集的函数的全体记为 $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$．容易看出，$\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$、$\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ 按照通常函数的线性运算都是复线性空间．我们在 $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$、$\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$分别引进收敛概念于下：

**定义 1.1** 设 $\{\varphi_m\}\subset\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}^n)\,(m=1,2,3,\cdots)$，$\varphi\in\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$. 如果下列条件满足：对$\mathbf{R}^n$ 中的任一紧子集$K$以及任一多重指标 $p$，$\{D^p\varphi_m\}$ 在 $K$ 上一致收敛于 $D^p\varphi$，则称 $\{\varphi_m\}$ 在$\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$中收敛于 $\varphi$，记为 $\{\varphi_m\}\xrightarrow{\mathbf{C}^\infty}\varphi$.

**定义 1.2** 设 $\{\varphi_m\}\subset\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)\,(m=1,2,3,\cdots)$，$\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$．如果下列条件满足：

(i) 存在 $\mathbf{R}^n$ 的紧子集 $K$，使得对一切 $m=1,2,3,\cdots$，有

$$\mathrm{supp}\varphi_m\subset K;$$

(ii) 对任一多重指标 $p$，$\{D^p\varphi_m\}$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上一致收敛于 $D^p\varphi$，则称 $\{\varphi_m\}$ 在$\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$中收敛于 $\varphi$，记为 $\{\varphi_m\}\xrightarrow{\mathscr{D}}\varphi$.

而称$\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$按照所规定的线性运算及收敛概念为一基本函数空间

$\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ 中的收敛概念可以改成：

(i′) 存在 $\mathbf{R}^n$ 的紧子集 $K$，使得对一切 $m=1,2,3,\cdots$，有

$$\mathrm{supp}\varphi_m\subset K,\ \mathrm{supp}\varphi\subset K;$$

(ii′) 对任一多重指标 $p$，$\{D^p\varphi_m\}$ 在$K$上一致收敛于 $D^p\varphi$.

根据 $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$及 $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ 中收敛概念的定义，容易证明：

1° 设 $\{\varphi_m\}$、$\{\psi_m\}\subset\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$，$\varphi$、$\psi\in\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$．如果

$$\{\varphi_m\}\xrightarrow{C^\infty}\varphi,\quad \{\psi_m\}\xrightarrow{C^\infty}\psi,$$

则对任何复数 $\alpha$、$\beta$，有

$$\{\alpha\varphi_m+\beta\psi_m\}\xrightarrow{C^\infty}\alpha\varphi+\beta\psi.$$

2° 设 $\{\varphi_m\}$、$\{\psi_m\}\subset\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$，$\varphi$、$\psi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$. 如果

$$\{\varphi_m\}\xrightarrow{\mathscr{D}}\varphi,\quad \{\psi_m\}\xrightarrow{\mathscr{D}}\psi,$$

则对任何复数 $\alpha$、$\beta$，有

$$\{\alpha\varphi_m+\beta\psi_m\}\xrightarrow{\mathscr{D}}\alpha\varphi+\beta\psi.$$

因此，$C^\infty(\mathbf{R}^n)$、$\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$中的线性运算关于它们中的收敛概念分别是连续的.

3° 对任一多重指标 $p$，$D^p$ 是由 $C^\infty(\mathbf{R}^n)$到其自身的线性映射，也是由$\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ 到其自身的线性映射，而且关于 $C^\infty(\mathbf{R}^n)$、$\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$中的收敛概念分别是连续的.

性质 1°、2°、3° 可以从定义 1.1 及定义 1.2 直接导出.

下面的例子说明，$\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ 中含有非零元素. 由于作为集合来说，显然有 $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)\subset C^\infty(\mathbf{R}^n)$，故 $C^\infty(\mathbf{R}^n)$中也含有非零元素.

**例 1** 作函数

$$\eta(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & \text{当}\,|x|<1;\\ 0, & \text{当}\,|x|\geqslant 1.\end{cases}\tag{1}$$

则 $\eta$ 是不恒为零的无限次可微函数，且 $\mathrm{supp}\varphi$ 刚好是闭球$\{x:|x|\leqslant 1\}$. 因此，$\eta\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$.

事实上，还有更一般的结果.

**例 2** 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 为一开子集. 对于 $\varepsilon>0$，令

$$\Omega_\varepsilon=\{x:\mathrm{dist}(x,\Omega)<\varepsilon\}.$$

则存在 $C^\infty(\mathbf{R}^n)$中的函数 $\varphi_\varepsilon$ 使得

$$\varphi_\varepsilon(x)=\begin{cases}1, & \text{当}\,x\in\Omega;\\ 0, & \text{当}\,x\overline{\in}\Omega_\varepsilon.\end{cases}\tag{2}$$

证　令

$$
\eta_\varepsilon(x)=\begin{cases} C_\varepsilon e^{\frac{\varepsilon^2}{4\|x\|^2-\varepsilon^2}}, & \text{当}\|x\|<\frac{1}{2}\varepsilon; \\ 0, & \text{当}\|x\|\geqslant\frac{1}{2}\varepsilon, \end{cases} \tag{3}
$$

其中

$$
C_\varepsilon=\frac{1}{\int_{\mathbf{R}^n} e^{\frac{\varepsilon^2}{4\|x\|^2-\varepsilon^2}}\,dx}. \tag{4}
$$

由(3)可知，$\eta_\varepsilon\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ 且 $\operatorname{supp}\eta_\varepsilon=\left\{x:\|x\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\right\}$，由(4)可知

$$
\int_{\mathbf{R}^n}\eta_\varepsilon(x)\,dx=1.
$$

设 $\chi_\varepsilon$ 是 $\Omega_{\frac{\varepsilon}{2}}$ 的特征函数，这里 $\Omega_{\frac{\varepsilon}{2}}$ 的定义与 $\Omega_\varepsilon$ 的定义完全一样．令

$$
\varphi_\varepsilon(x)=\int_{\mathbf{R}^n}\chi_\varepsilon(y)\eta_\varepsilon(x-y)\,dy.
$$

由于 $\eta_\varepsilon$ 是无限次可微函数，于是 $\varphi_\varepsilon$ 也是无限次可微函数．当 $x\in\Omega$ 时，由等式

$$
\int_{\mathbf{R}^n}\chi_\varepsilon(y)\eta_\varepsilon(x-y)\,dy=\int_{\left\{y:\|x-y\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\right\}}\chi_\varepsilon(y)\eta_\varepsilon(x-y)\,dy
$$

$$
=\int_{\left\{y:\|x-y\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\right\}}\eta_\varepsilon(x-y)\,dy=1
$$

可知，$\varphi_\varepsilon(x)=1$．同理可证，当 $x\overline{\in}\Omega_\varepsilon$ 时，$\varphi_\varepsilon(x)=0$．因此 $\varphi_\varepsilon\in\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ 且满足(2)．此外还可以看出，对一切 $x\in\mathbf{R}^n$，有 $0\leqslant\varphi_\varepsilon(x)\leqslant1$．

### 1.2　广义函数的基本概念

在这一段中，我们引进广义函数的基本概念并讨论它的基本性质．

**定义1.3**　设 $f$ 是定义在 $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ 上的线性泛函，且设 $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$．

如果对于 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 中的任一序列 $\{\varphi_m\}$，当 $\{\varphi_m\}\xrightarrow{\mathscr{D}}\varphi$ 时，有 $\{f(\varphi_m)\}\to f(\varphi)$，则称 $f$ 在点 $\varphi$ 处连续. 如果 $f$ 在 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 中的每一点处连续，则称 $f$ 在 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 上连续. $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 上的连续线性泛函 $f$ 称为广义函数，$f$ 在 $\varphi$ 点处的值 $f(\varphi)$ 记为 $(f,\varphi)$，于是 $(f,\varphi)=f(\varphi)$.

由于 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 上的线性泛函连续的充分必要条件是它在原点连续，因此为了验证 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 上的线性泛函是否为广义函数只需验证它在原点是否连续.

**例 3** 设 $f$ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数，如果对于 $\mathbb{R}^n$ 中的任何有界可测集 $E$，$f$ 在 $E$ 上是可积的，则称 $f$ 为局部可积的. 通过局部可积函数 $f$，我们可以在 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 上定义如下的泛函

$$(f^*,\ \varphi)=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\varphi(x)dx\quad(\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)).\tag{5}$$

由于每个 $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 具有紧支集，因此上述积分必为有限数，于是 $f^*$ 在 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 中的每一点处有定义. 容易验证，$f^*$ 是线性的. 再由 Lebesgue 控制收敛定理可知，$f^*$ 在 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 上连续. 因此 $f^*$ 是一个广义函数. 由于 $f^*$ 是通过积分(5)由 $f$ 定义的，我们称 $f^*$ 是由 $f$ 定义的函数型广义函数或简称 $f^*$ 为函数型广义函数.

**定理 1.1** 映射:$f\longmapsto f^*$ 是一对一的.

**证** 由于映射:$f\longmapsto f^*$ 显然是线性的，为了证明定理只需证明当

$$\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\varphi(x)dx=0$$

对一切 $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 成立时，有 $f(x)=0$ 几乎处处成立. 这又只需证明对任何一个球 $S(x_0,r)\subset\mathbb{R}^n$，都有 $f(x)=0$ 于球 $S(x_0,r)$ 上几乎处处成立. 令

$$g(x)=\begin{cases}\operatorname{sign}f(x), & 当\ x\in S(x_0,r);\\ 0, & 当\ x\overline{\in}S(x_0,r).\end{cases}$$

显然有 $g\in L(\mathbf{R}^n)$. 由习题第 1 题，存在 $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ 中的函数列 $\{\varphi_m\}$ 使 $\{\varphi_m(x)\}$ 于 $\mathbf{R}^n$ 上几乎处处收敛于 $g(x)$，且

1° 每个 $\varphi_m(x)$ 于 $S\left(x_0,\ \dfrac{3}{2}r\right)$之外为零;

2° $\{\varphi_m(x)\}$ 一致有界.

于是

$$\int_{S(x_0,r)}|f(x)|dx=\int_{S(x_0,r)}f(x)g(x)dx$$
$$=\lim_{m\to\infty}\int_{S(x_0,r)}f(x)\varphi_m(x)dx=0.$$

故 $f(x)=0$ 于 $S(x_0,\ r)$ 上几乎处处成立，因而 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上几乎处处为零. 证毕.

定理 1.1 表明，我们可以将局部可积函数 $f$ 与由它定义的 $f^*$ 视为同一，有时甚至使用同一符号 $f$.

我们再考察一个函数型广义函数的例.

**例 4** 考察定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数

$$h(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x\in(-\infty,0);\\ 1, & \text{当 } x\in[0,\infty).\end{cases}$$

称 $h$ 为 Heaviside 函数，显然 $h$ 是局部可积的，于是它定义了 $\mathscr{D}(\mathbf{R})$ 上的一个函数型广义函数 $h^*$:

$$(h^*,\ \varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}h(x)\varphi(x)dx=\int_0^{\infty}\varphi(x)dx.$$

称函数型广义函数 $h^*$ 为 Heaviside 广义函数.

值得注意的是并不是任何一个函数都能定义一个广义函数. 另一方面，又确实存在非函数型广义函数.

**例 5** 设 $a\in\mathbf{R}^n$ 为一给定的点，定义空间 $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ 上的泛函 $\delta_a$ 如下:

$$(\delta_a,\ \varphi)=\varphi(a).$$

显然 $\delta_a$ 是 $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ 上的连续线性泛函，因而是广义函数.

现在证明 $\delta_a$ 不是函数型的. 用反证法. 设 $\delta_a$ 是函数型的，则存在一定义于 $\mathbf{R}^n$ 上的局部可积函数 $f$ 使得对一切 $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ 有

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\varphi(x)dx=\varphi(a). \tag{6}$$

将下面的函数

$$\varphi_{a,r}(x)=\begin{cases}e^{\frac{r^2}{\|x-a\|^2-r^2}}, & \text{当}\|x-a\|<r;\\ 0, & \text{当}\|x-a\|\geqslant r\end{cases}$$

代人(6)，得到(注意 $\varphi_{a,r}\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$)

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\varphi_{a,r}(x)dx=\varphi_{a,r}(a)=e^{-1}. \tag{7}$$

另一方面，由 Lekesgue 控制收敛定理，有

$$\lim_{r\to 0+}\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\varphi_{a,r}(x)dx=0. \tag{8}$$

(7)与(8)显然矛盾. 故 $\delta_a$ 不是函数型的.

称 $\delta_a$ 为集中在点 $a$ 的 Dirac-广义函数，简称为 $\delta$-函数. 若 $a=\theta$，则将 $\delta_\theta$ 记为 $\delta$.

通常，我们用 $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ 表示广义函数的全体. $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ 按照通常连续线性泛函的线性运算是一个复线性空间. 在这个线性空间中可以定义收敛概念.

**定义 1.4** 设 $\{f_m\}\subset\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$，$f\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$. 如果对一切 $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$，有

$$\lim_{n\to\infty}(f_m,\varphi)=(f,\varphi),$$

则称 $\{f_m\}$ 在 $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ 中收敛于 $f$，记为 $\{f_m\}\xrightarrow{\mathscr{D}'}f$. 称 $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ 按照所规定的线性运算与收敛概念是一个广义函数空间.

可以看出，$\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ 上的收敛概念实际上是赋范线性空间上有

界线性泛函的弱*收敛概念的一种自然推广.

$\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$中的收敛概念具有下列性质:

设$\{f_m\}$、$\{g_m\}\subset\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$，$f$、$g\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. 如果$\{f_m\}\xrightarrow{\mathscr{D}'}f$，$\{g_m\}\xrightarrow{\mathscr{D}'}g$，则对任意的复数$\alpha$、$\beta$，有

$$\{\alpha f_m+\beta g_m\}\xrightarrow{\mathscr{D}'}\alpha f+\beta g.$$

因此$\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$中的线性运算关于它的收敛概念是连续的.

**1.3　广义函数的导数及其性质**

现在来研究广义函数的导数. 我们将证明任何一个广义函数均具有任意阶的导数. 这显然是一个有意义的性质. 这一性质使得广义函数在微分方程理论中有着广泛的应用.

为清楚起见，我们先考察一元广义函数的情形. 广义函数求导的想法来源于古典分析中的分部积分. 为此我们先回顾一下分部积分的基本思想. 设$f$和$\varphi$都是定义在$\mathbb{R}$上的连续可微函数，$\varphi$具有紧支集. 由分部积分公式并注意到积出的项为零，有

$$\int_{-\infty}^{\infty}f'(x)\varphi(x)dx=-\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\varphi'(x)dx.$$

这个等式表明: 利用分部积分可以将对一个函数的求导运算转化为对另一个函数的求导. 这一简单而又重要的事实启发我们按以下的方式引进广义函数的导数.

首先注意由定义1.2后面的性质3°，对任一多重指标$p$，$p$阶偏导数运算$D^p$是一个由$\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$到其自身的连续线性映射.

**定义1.5**　设$f$是一广义函数. 则$\left(f,\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi\right)$是$\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$上的一个线性泛函，由偏导数运算的连续性，它还是连续的. 因而定义了$\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$上的一个连续线性泛函即广义函数，记为$-g$，于是有

$$(g,\varphi)=-\left(f,\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi\right).$$

称 $g$ 是广义函数$f$对 $x_j$ 的广义偏导数，记为$\frac{\partial}{\partial x_j}f$.

根据定义，有

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j}f,\quad \varphi\right)=-\left(f,\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi\right). \tag{9}$$

由于$\frac{\partial}{\partial x_j}f$也是一个广义函数，对它也可以求导，因此求导运算可以无限制地进行下去，于是得到下面的重要定理.

**定理 1.2　任一广义函数的所有阶偏导数都存在而且都是广义函数.**

设 $f$ 是一个广义函数，用 $D^p f$ 记 $f$ 的$p$阶偏导数. 重复利用(9)，便得到广义函数 $p$阶偏导数的一般公式:

$$(D^p f,\varphi)=(-1)^{|p|}(f,D^p\varphi), \tag{10}$$

这里 $\varphi$ 是 $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$中的任一元素. 如果 $f$ 是一元广义函数(即 $f$ 为$\mathscr{D}(\mathbf{R})$上的连续线性泛函)，则$f$的一阶、二阶导数等等分别用$f',f''$等等来表示.

设 $f$ 是定义在$\mathbf{R}^n$上的函数. $p$是给定的多重指标，称 $f$ 在 $\mathbf{R}^n$上有直到$p$阶连续偏导数是指对任意的多重指标$k=(k_1,k_2,\cdots,k_n)$当 $0\leqslant k_j\leqslant p_j$ $(1\leqslant j\leqslant n)$时，$D^k f$ 连续.

**例 6**　设 $f$ 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 上且具有直到$p$阶连续偏导数的函数. 由分部积分公式，有

$$\int_{\mathbf{R}^n} D^p f(x)\varphi(x)dx=(-1)^{|p|}\int_{\mathbf{R}^n} f(x)D^p\varphi(x)dx. \tag{11}$$

另一方面，$f$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上显然是局部可积的，因此定义了一个函数型广义函数 $f$. 由定理 1.2，$f$作为广义函数有任意阶偏导数且其$p$阶偏导数满足公式(10). 对比(10)及(11)并由定理1.1可知，$f$作为广义函数的$p$阶偏导数与作为函数在古典意义下的$p$阶偏导数一致，因此广义函数的偏导数是古典意义下偏导数的自然推广.

**例 7** 现在考察例 4 中由 Heaviside 函数 $h$ 所定义的函数型广义函数(仍用 $h$ 记之)的导数. 由(10),

$$(h',\varphi)=-(h,\varphi')=-\int_0^\infty \varphi'(x)\,dx$$
$$=\varphi(0)=(\delta,\varphi).$$

故 $h'=\delta$. 就是说, $h$ 作为广义函数的导数是 $\delta$-函数.

设 $\psi\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 是给定的, 则对任一 $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, 有 $\psi\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, 由 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 中的收敛概念可知, 映射: $\varphi\longmapsto\psi\varphi$ 是由 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 到其自身的连续映射. 利用这一事实可以定义 $\psi$ 与任一广义函数 $f$ 的乘积.

**定义 1.6** 设 $\psi\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$、$f\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ 都是给定的. 则由等式

$$(g,\varphi)=(f,\psi\varphi)$$

定义了一个广义函数 $g$. 称 $g$ 为 $\psi$ 与 $f$ 的乘积, 记为 $\psi f$ 或 $f\psi$. 称 $\psi$ 是 $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ 上的一个乘子.

定义1.6表明, 对于任一函数 $\psi\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 以及任一 $f\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, 我们可以定义它们的乘积, 但对于任意两个广义函数, 要定义它们的乘积就未必可能. 例如我们就难以定义两个 $\delta$ 函数的乘积.

现在讨论广义函数导数的性质. 以下两个性质可以从广义函数导数的定义导出.

1° 设 $f、g\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\alpha,\beta$ 为任意两个复数, 则

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\alpha f+\beta g)=\alpha\frac{\partial}{\partial x_j}f+\beta\frac{\partial}{\partial x_j}g;$$

2° 设 $\psi\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $f\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\psi f)=\psi\frac{\partial}{\partial x_j}f+f\frac{\partial}{\partial x_j}\psi.$$

作为例子, 我们证明 2°.

任取 $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(\psi f),\ \varphi\right)=-\left(\psi f,\ \frac{\partial}{\partial x_j}\varphi\right)$$

$$=-\left(f,\ \psi\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi\right)=-\left(f,\frac{\partial}{\partial x_j}(\psi\varphi)\right)+\left(f,\ \varphi\frac{\partial}{\partial x_j}\psi\right)$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x_j}f,\psi\varphi\right)+\left(f\frac{\partial}{\partial x_j}\psi,\varphi\right)$$

$$=\left(\psi\frac{\partial}{\partial x_j}f+f\frac{\partial}{\partial x_j}\psi,\varphi\right).$$

因此 $2^\circ$ 成立.

**定理1.3** **设** $\{f_m\}\subset\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)\ (m=1,2,3,\cdots)$, $f\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$. **如果** $\{f_m\}\xrightarrow{\mathscr{D}'}f$, **那么对于任一求导运算** $D^p$, **有**

$$\{D^p f_m\}\xrightarrow{\mathscr{D}'}D^p f.$$

**证** 任取 $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$, 则

$$\lim_{m\to\infty}(D^p f_m,\varphi)=(-)^{|p|}\lim_{m\to\infty}(f_m,D^p\varphi)$$
$$=(-1)^{|p|}(f,D^p\varphi)=(D^p f,\varphi).$$

证毕.

定理 1.3 表明, 广义函数的求导运算关于$\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$中的收敛概念是连续的, 也就是说, 在广义函数中, 求导运算与极限运算可以交换次序. 这是广义函数理论中另一个重要事实. 有了定理 1.2 及定理 1.3, 古典分析中导数的存在性以及求导运算与极限运算的可换性等等令人困扰的问题在广义函数理论中不复存在. 这无疑是极为方便的. 除了定理 1.2 及 定 理 1.3 所阐明的重要事实外, 下述定理则阐明了广义函数理论中第三个重要事实.

**定理1.4** **设** $\{f_m\}\subset\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$. **如果对每个** $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$, $\lim\limits_{m\to\infty}(f_m,\varphi)$ **存在且有限, 则必存在** $f\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ **使** $\{f_m\}\xrightarrow{\mathscr{D}'}f$.

定理 1.3 的证明需要用到线性拓扑空间的知识, 故从略. 但是它与定理 1.1 一道表明, 广义函数空间 $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ 关于求导运算

及极限运算是封闭的，因此通过这两种运算不会产生新的广义函数.

### 1.4 广义函数的支集

大家知道，对任一函数均可定义支集(第338页). 对于广义函数同样可以定义支集.

**定义 1.7** 设 $f\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$，$\Omega$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个开子集. 如果对于 $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ 中支集包含在 $\Omega$ 中的一切函数 $\varphi$，有 $(f,\varphi)=0$，则称 $f$ 在 $\Omega$ 上等于零. 设 $f_1$、$f_2\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$，如果 $f_1-f_2$ 在 $\Omega$ 上等于零，则称 $f_1$、$f_2$ 在 $\Omega$ 上相等.

对于给定的 $f\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$，使得 $f$ 在其上等于零的开集一般说不唯一. 作 $f$ 在其上等于零的一切开集的并集，这个并集当然是开集，我们要证明 $f$ 在这个开集上也等于零. 为了证明这一事实，先证明下面的定理.

**定理 1.5** **设 $K\subset\mathbf{R}^n$ 为一紧集，$\{\Omega_\alpha\}_{\alpha\in\mathscr{A}}$ 是 $K$ 的一个开覆盖. 那么存在 $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha\in\mathscr{A}}$ 的一个有限子族 $\{\Omega_i\}_{i=1}^m$ 以及 $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ 中的函数族 $\{\varphi_i\}_{i=1}^m$ 满足:**

**1°** $\{\Omega_i\}_{i=1}^m$ **覆盖 $K$;**

**2°** $\operatorname{supp}\varphi_i\subset\Omega_i$ **对 $i=1,2,\cdots,m$ 成立，当 $x\in K$ 时**

$$\sum_{i=1}^m\varphi_i(x)=1. \tag{12}$$

**证** 由第六章定理 4.6 的证明可知，存在 $\varepsilon_0>0$ 使得对每个 $x\in K$，开球 $S(x,\varepsilon_0)$ 必包含在某个 $\Omega_\alpha$ 中. 显然开球族 $\left\{S\left(x,\frac{1}{2}\varepsilon_0\right)\right\}_{x\in K}$ 覆盖 $K$. $K$ 为紧集，故存在 $K$ 中有限个点 $x_i(i=1,2,\cdots,m)$ 使得开球族 $\left\{S\left(x_i,\frac{1}{2}\varepsilon_0\right)\right\}_{i=1}^m$ 覆盖 $K$.

对每个 $i$，从 $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha\in\mathscr{A}}$ 随便取一个包含 $S(x_i,\varepsilon_0)$ 的开集作为 $\Omega_i$，则 $\{\Omega_i\}_{i=1}^m$ 覆盖 $K$，1°成立.

其次，由例 2，对每个 $i$，存在 $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ 中的函数 $\psi_i$ 满足

1° 对一切 $x\in S\left(x_i, \frac{1}{2}\varepsilon_0\right)$，$\psi_i(x)=1$；

2° $\mathrm{supp}\psi_i\subset S(x_i, \varepsilon_0)$.

再作 $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ 中的函数族 $\{\varphi_i\}_{i=1}^m$ 如下：

$$\varphi_1=\psi_1, \quad \varphi_2=(1-\psi_1)\psi_2,$$

$$\cdots\cdots$$

$$\varphi_m=(1-\psi_1)(1-\psi_2)\cdots(1-\psi_{m-1})\psi_m.$$

因 $\mathrm{supp}\varphi_i\subset\mathrm{supp}\psi_i$，故 $\mathrm{supp}\varphi_i\subset S(x_i, \varepsilon_0)\subset\Omega_i(1\leqslant i\leqslant m)$. 现在证明(12). 为此先证明等式

$$\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_m=1-(1-\psi_1)(1-\psi_2)\cdots(1-\psi_m), \tag{13}$$

注意到

$$\begin{aligned}\varphi_1+\varphi_2&=\psi_1+(1-\psi_1)\psi_2=1-(1-\psi_1)+(1-\psi_1)\psi_2\\&=1-(1-\psi_1)(1-\psi_2).\end{aligned}$$

用归纳法可知(13)成立. 设 $x\in K$，则存在 $i$ 使 $x\in S\left(x_i, \frac{1}{2}\varepsilon_0\right)$，于是 $1-\psi_i(x)=0$. 由(13)可知

$$\varphi_1(x)+\varphi_2(x)+\cdots+\varphi_m(x)=1.$$

(12)成立. 证毕.

**定理 1.6 设 $f\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$，$\{\Omega_\alpha\}_{\alpha\in\mathscr{A}}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个开集族. 如果 $f$ 在每个 $\Omega_\alpha$ 上等于零，那么 $f$ 在 $\Omega=\bigcup_{\alpha\in\mathscr{A}}\Omega_\alpha$ 上也等于零.**

证 任取 $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ 满足 $\mathrm{supp}\varphi\subset\Omega$. 设 $K=\mathrm{supp}\varphi$. 由定理 1.5，存在 $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha\in\mathscr{A}}$ 的有限子族 $\{\Omega_i\}_{i=1}^m$ 以及 $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ 中的函数族 $\{\varphi_i\}_{i=1}^m$ 使得定理 1.5 中的(i)、(ii)成立. 由其中的(ii)可知

$$\varphi=\varphi\sum_{i=1}^m\varphi_i=\sum_{i=1}^m\varphi\varphi_i.$$

对每个 $i$，有 $\mathrm{supp}\varphi\varphi_i\subset\Omega_i$，而 $f$ 在 $\Omega_i$ 上等于零，因此

$$(f,\varphi)=\sum_{i=1}^{m}(f,\varphi\varphi_i)=0.$$

这表明 $f$ 在 $\Omega$ 上等于零. 证毕.

**推论** **对于任一 $f\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$，存在 $\mathbb{R}^n$ 的一个开子集 $\Omega$ 使得 $f$ 在 $\Omega$ 上等于零，而对于任一更大的开集 $\Omega'\supsetneqq\Omega$，$f$ 在 $\Omega'$ 上不为零，即存在 $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$，$\mathrm{supp}\varphi\subset\Omega'$ 使 $(f,\varphi)\neq0$.**

**证** 令 $\Omega$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一切使得 $f$ 于其上，等于零的开子集的并，则 $\Omega$ 满足推论中的条件. 证毕.

有了以上的推论，便可以引入广义函数支集的概念.

**定义 1.8** 设 $f\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$，$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是上述推论中的开子集，称 $\mathbb{R}^n\setminus\Omega$ 为 $f$ 的支集，记为 $\mathrm{supp}f$.

显然 $\mathrm{supp}\,f$ 是闭集.

**例 8** 1° 设 $f$ 为定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数，$f$ 显然是局部可积的，因此定义了一个函数型广义函数 $f^*$. 容易证明 $\mathrm{supp}f^*=\mathrm{supp}f$. 故广义函数的支集是通常连续函数支集概念的自然推广.

2° $\delta$-函数 $\delta_a$ 的支集是单元素集 $\{a\}$.

## 1.5 广义函数的卷积

虽然讨论两个广义函数的乘积是困难的，但却可以比较容易地讨论两个广义函数的卷积. 为清楚起见，先回顾两个局部可积函数卷积的概念. 设 $f$，$g$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上两个局部可积函数且其中一个具有紧支集，令

$$h(x)=\int_{\mathbb{R}^n}f(x-t)g(t)dt.$$

则 $h$ 也是局部可积的，称 $h$ 为 $f$ 与 $g$ 的卷积，记为 $h=f*g$.

卷积具有下列性质：

1° $f*g=g*f$，其中 $f$、$g$ 均为局部可积函数且其中一个具有紧支集；

2° $(f*g)*h=f*(g*h)$，其中 $f$、$g$、$h$ 均为局部可积的且其中两个具有紧支集.

现在设 $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$. 那么对 $\mathbf{R}^n$ 上任意两个局部可积函数 $f$、$g$，其中一个具有紧支集，由 Fubini 定理，有

$$(f*g,\varphi)=\int_{\mathbf{R}^n}\left[\int_{\mathbf{R}^n}f(x-t)g(t)dt\right]\varphi(x)dx$$

$$=\int_{\mathbf{R}^n}g(t)\left[\int_{\mathbf{R}^n}f(x-t)\varphi(x)dx\right]dt.$$

再由 Lebesgue 测度的平移不变性，

$$\int_{\mathbf{R}^n}f(x-t)\varphi(x)dx=\int_{\mathbf{R}^n}f(x)\varphi(x+t)dx.$$

因此

$$(f*g,\varphi)=\int_{\mathbf{R}^n}g(t)\left[\int_{\mathbf{R}^n}f(x)\varphi(x+t)dx\right]dt. \tag{14}$$

记 $(\tau_t\varphi)(x)=\varphi(x+t)$，(14)可改写成

$$(f*g,\varphi)=(g(\cdot),(f,\tau_{(\cdot)}\varphi)). \tag{15}$$

(15)很重要，我们将利用它来定义两个广义函数的卷积. 为了定义两个广义函数的卷积，还需作一些准备工作.

**定理 1.7** 设 $f\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ 具有紧支集，那么存在 $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ 上唯一的连续线性泛函 $g$，使得下列性质成立：

(i) 对一切 $\psi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$，有 $g(\psi)=f(\psi)$；

(ii) 对一切 $\psi\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$，若 $\mathrm{supp}\psi\cap\mathrm{supp}f=\varnothing$，则 $g(\psi)=0$.

**证** 任取 $\mathbf{R}^n$ 中的有界开子集 $\Omega$ 使 $\mathrm{supp}f\subset\Omega$. 由例 2，有 $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ 中的函数 $\varphi$ 使得对一切 $x\in\Omega$，有

$$\varphi(x)=1. \tag{16}$$

取一个这样的函数 $\varphi$ 并令：$g(\psi)=f(\varphi\psi)$ $(\psi\in C^\infty(\mathbf{R}^n))$ 需要证明这样定义是合理的. 也就是需要证明 $g$ 与满足(16)的函数 $\varphi$ 以及满足 $\mathrm{supp}f\subset\Omega$ 的开集 $\Omega$ 的选择无关. 其实，设另有 $\varphi_1\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ 满

足对一切 $x\in\Omega_1$，有

$$\varphi_1(x)=1 \tag{17}$$

其中 $\Omega_1$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界开子集满足 $\operatorname{supp}f\subset\Omega_1$. 显然 $\operatorname{supp}(\varphi-\varphi_1)\cap\operatorname{supp}f=\varnothing$，因此 $f(\varphi\psi)=f(\varphi_1\psi)$. 故 $g$ 的定义是合理的. 其次，$g$ 显然是线性的.

现在证明 $g$ 是连续的. 设 $\{\psi_m\}\subset\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$、$\psi\in\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ 且 $\{\psi_m\}\xrightarrow{\mathbf{C}^\infty}\psi$. 则对任一满足(16)的函数 $\varphi$，有 $\{\varphi\psi_m\}\xrightarrow{\mathbf{C}}\varphi\psi$. 因此

$$\{g(\psi_m)\}=\{f(\varphi\psi_m)\}\to f(\varphi\psi)=g(\psi).$$

$g$ 连续.

最后证明 (i)、(ii) 成立及 $g$ 的唯一性. 注意到对任一 $\psi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$，有 $(1-\varphi)\psi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$，且 $\operatorname{supp}(1-\varphi)\psi\cap\operatorname{supp}f=\varnothing$，故 $f(\psi)=f(\varphi\psi)=g(\psi)$. (i)成立. 今设 $\psi\in\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ 且 $\operatorname{supp}\psi\cap\operatorname{supp}f=\varnothing$. 于是 $\varphi\psi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ 且 $\operatorname{supp}\varphi\psi\cap\operatorname{supp}f=\varnothing$，因此 $g(\psi)=f(\varphi\psi)=0$. 至于唯一性，设另有 $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ 上的连续线性泛函 $g_1$ 满足(i)及(ii). 任取 $\psi\in\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$. 由 $\psi=(1-\varphi)\psi+\varphi\psi$ 及性质(i)、(ii)并注意到 $\varphi\psi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$，$\operatorname{supp}(1-\varphi)\psi\cap\operatorname{supp}f=\varnothing$，有

$$\begin{aligned}g_1(\psi)&=g_1((1-\varphi)\psi)+g_1(\varphi\psi)\\&=g_1(\varphi\psi)=f(\varphi\psi)=g(\psi).\end{aligned}$$

唯一性成立. 证毕.

**定理 1.8** 设 $f\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$，则对任何 $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$，下列性质成立：

(i) $h(\cdot)=(f,\tau_{(\cdot)}\varphi)$ 是无限次可微函数，因此 $h\in\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$；

(ii) 若 $f$ 具有紧支集，则 $h(\cdot)$ 也具有紧支集，因此 $h\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$.

证 (i) 注意到当 $\Delta t_j\to0$

$$\frac{\varphi(x_1+t_1,\cdots x_j+t_j+\Delta t_j,\cdots x_n+t_n)-\varphi(x_1+t_1,\cdots,x_n+t_n)}{\Delta t_j}$$

在 $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ 中收敛于 $\frac{\partial}{\partial t_j}\varphi(x+t)$，而 $\frac{\partial}{\partial t_j}\varphi(x+t)$ 显然等于 $\frac{\partial}{\partial x_j}$
$\varphi(x+t)$，故

$$\frac{\partial}{\partial t_j}h(t)=\frac{\partial}{\partial t_j}(f,\tau_t\varphi)=\left(f,\frac{\partial}{\partial t_j}\tau_t\varphi\right)=\left(f,\tau_t\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi\right).$$

依此类推，可知 $h(\cdot)$ 存在所有阶偏导数，因此 $h\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$.

(ii) 设 $f$ 具有紧支集，注意到 $\tau_t\varphi(\cdot)=\varphi(\cdot+t)$ 的支集可以由 $\varphi(\cdot)$ 的支集经过平移 $x\longmapsto x-t$ 得到，因此当 $\|t\|=(t_1^2+t_2^2+\cdots+t_n^2)^{1/2}$ 充分大时，$\mathrm{supp}\tau_t\varphi$ 与 $\mathrm{supp}f$ 的交集是空集，于是 $h(t)=0$. 故 $h(\cdot)$ 具有紧支集. 这表明 $h\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$. 证毕.

**推论　设 $f、g\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$，那么当 $f、g$ 中有一个具有紧支集时，等式**

$$(k,\varphi)=(g,(f,\tau_{(\cdot)}\varphi))\tag{18}$$

**定义了 $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ 上的一个连续线性泛函 $k$，于是 $k$ 为广义函数.**

**证**　由定理 1.7 及定理 1.8 可知，(18) 式对一切 $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ 有意义. 其次 $k$ 显然是线性的，因此 $k$ 是 $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ 上的线性泛函. 剩下只需证明 $k$ 的连续性.

设 $\{\varphi_m\}\subset\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ 且 $\{\varphi_m\}\xrightarrow{\mathscr{D}}\theta$. 如果 $f$ 具有紧支集，则不难证明 $\{(f,\tau_{(\cdot)}\varphi_m)\}\xrightarrow{\mathscr{D}}\theta$，而 $g\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$，故 $\{(k,\varphi_m)\}\to0$. 若 $g$ 具有紧支集，由于可以证明 $\{(f,\tau_{(\cdot)}\varphi_m)\}$ 在 $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ 中收敛于零，由定理 1.7 可知 $\{(k,\varphi_m)\}$ 仍收敛于零. 因此不论那一种情形，我们均证明了当 $\{\varphi_m\}\xrightarrow{\mathscr{D}}\theta$ 时，都有 $\{(k,\varphi_m)\}\to0$. 故 $k$ 连续，于是 $k$ 为广义函数. 证毕.

**定义 1.9**　称等式(18)中的 $k$ 为 $f$ 与 $g$ 的卷积，记为 $f*g$. 卷积具有下列性质:

**1°**　设 $f、g$ 都是广义函数，其中一个具有紧支集，则

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(f*g)=\left(\frac{\partial}{\partial x_j}f\right)*g=f*\frac{\partial}{\partial x_j}g;$$

2° 交换律成立. 即若 $f$、$g$ 都是广义函数，其中一个具有紧支集，则

$$f*g=g*f;$$

3° 结合律成立. 即若 $f$、$g$、$h$ 都是广义函数，其中两个具有紧支集，则

$$f*(g*h)=(f*g)*h.$$

我们只证明 1°. 2° 及 3° 的证明需要用较多的预备知识，故从略.

1°的证明. 任取 $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$，则

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(f*g),\varphi\right)&=-\left(f*g,\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi\right)\\&=-\left(g,\left(f,\tau_{(\cdot)}\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi\right)\right)=-\left(g,\left(f,\frac{\partial}{\partial x_j}\tau_{(\cdot)}\varphi\right)\right)\\&=\left(g,\left(\frac{\partial}{\partial x_j}f,\tau_{(\cdot)}\varphi\right)\right)=\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j}f\right)*g,\varphi\right).\end{aligned}$$

因此 $\frac{\partial}{\partial x_j}(f*g)=\left(\frac{\partial}{\partial x_j}f\right)*g$. 1°中第一个等式成立. 利用交换律，可以证明 1°中第二个等式.

卷积可以用来考察常系数常微分方程的解.

**定义 1.10** 设 $P$ 是一元多项式，考察如下的微分方程

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)g=f,\tag{19}$$

其中 $f$ 是已知的，$g$ 是待定的，且设 $f$、$g$ 均属于 $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$. 如果 $g_0$ 满足下面的微分方程

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)g_0=\delta,$$

则称 $g_0$ 是方程(19)的一个基本解.

**定理 1.9** 设方程(19)的基本解 $g_0$ 存在，则 $g=g_0*f$ 是方程(19)的一个解.

**证** 任取 $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R})$，由卷积的性质 1°，有

$$\left(P\left(\frac{d}{dx}\right)(g_0*f),\varphi\right)=\left(\left(P\left(\frac{d}{dx}\right)g_0*f\right),\varphi\right)$$
$$=((\delta*f),\varphi)=(f,(\delta,\tau_{(\cdot)}\varphi))$$
$$=(f,\varphi),$$

故

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)(g_0*f)=f.$$

证毕.

## § 2 基本函数空间 $S(\mathbb{R}^n)$ 及缓增广义函数

在这一节中我们将介绍另一种常用的基本函数空间以及缓增广义函数.

### 2.1 基本函数空间 $S(\mathbf{R}^n)$

设 $p=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ 为任一多重指标. 对 $x\in\mathbf{R}^n$，记

$$x^p=x_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdots x_n^{p_n}.$$

**定义 2.1** 设 $\varphi$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的无限次可微函数. 如果对任意两个多重指标 $p=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ 及 $q=(q_1,q_2,\cdots,q_n)$，有正数 $c_{p,q}$ 使得

$$|x^qD^p\varphi(x)|\leqslant c_{pq} \tag{1}$$

对一切 $x\in\mathbf{R}^n$ 成立，则称 $\varphi$ 为在无穷远处速降的函数，简称为速降函数. 所有速降函数构成的集记为 $S(\mathbf{R}^n)$.

对于速降函数 $\varphi$，我们引进如下的记号

$$\|\varphi\|_{pq}=\sup_{x\in\mathbf{R}^n}|x^qD^p\varphi(x)|.$$

显然，对于任意两个多重指标 $p,q$，$\|\varphi\|_{pq}$ 是有限数.

$\mathscr{D}(\mathrm{R}^n)$ 中的任一函数均为速降函数，但是确实存在着不具有紧支集的速降函数.

**例1** 设

$$\psi_n(x)=e^{-\frac{1}{2}\|x\|^2}\quad(x\in\mathrm{R}^n).$$

则 $\psi_n$ 是无限次可微的. 由指数函数的性质可以证明 $\psi_n$ 是速降函数. 其实，对任意的多重指标 $p$、$q$，$x^qD^p\psi_n(x)$ 是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的某个多项式(记为 $p(x)$)与 $e^{-\frac{1}{2}\|x\|^2}$ 的乘积，即

$$x^qD^p\psi_n(x)=p(x)e^{-\frac{1}{2}\|x\|^2}.$$

再由L'Hospital法则可知，

$$\lim_{\|x\|\to\infty}p(x)e^{-\frac{1}{2}\|x\|^2}=0.$$

因此(1)对于 $\psi_n$ 成立，$\psi_n$ 为速降函数，但 $\psi_n$ 显然不具有紧支集.

集合 $S(\mathrm{R}^n)$ 按照通常函数的线性运算显然是一个复线性空间. 在 $S(\mathrm{R}^n)$ 中引进如下的收敛概念.

**定义 2.2** 设 $\{\varphi_m\}\subset S(\mathrm{R}^n)$，$\varphi\in S(\mathrm{R}^n)$. 如果以下两条件满足

(i) 对任意两个多重指标 $p$ 与 $q$，有

$$\sup_m\|\varphi_m\|_{pq}<\infty;\tag{2}$$

(ii) 对每个多重指标 $p$，$\{D^p\varphi_m\}$ 在 $\mathrm{R}^n$ 上一致收敛于 $\varphi$，则称 $\{\varphi_m\}$ 在 $S(\mathrm{R}^n)$ 中收敛于 $\varphi$，记为 $\{\varphi_m\}\xrightarrow{S}\varphi$. 而称 $S(\mathrm{R}^n)$ 按照所规定的线性运算及收敛概念为基本函数空间.

下面的性质是显然的.

1° 设 $\{\varphi_m\}$、$\{\psi_m\}\subset S(\mathrm{R}^n)$，$\varphi,\psi\in S(\mathrm{R}^n)$，如果

$$\{\varphi_m\}\xrightarrow{S}\varphi,\qquad\{\psi_m\}\xrightarrow{S}\psi,$$

则对任何复数 $\alpha$、$\beta$，有

$$\{\alpha\varphi_m+\beta\psi_m\}\xrightarrow{S}\alpha\varphi+\beta\psi.$$

因此 $S(\mathbf{R}^n)$ 中的线性运算关于它的收敛概念是连续的.

2° 对于多重指标 $p$，记

$$D_p=(i)^{-|p|}D^p=\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{p_1}\cdots\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{p_n}.$$

设有多项式 $P(\lambda)=\sum c_p\lambda_1^{p_1}\lambda_2^{p_2}\cdots\lambda_n^{p_n}$，记

$$P(D)=\sum c_pD_p.$$

由于对任意的多重指标 $p$、$q$，映射：$\varphi\longmapsto x^qD^p\varphi$ 是由 $S(\mathbf{R}^n)$ 到其自身的连续线性映射，因此对任意的多项式 $P(\lambda)$、$Q(\lambda)$，映射：$\varphi\longmapsto Q(\cdot)P(D)\varphi(\cdot)$ 是由 $S(\mathbf{R}^n)$ 到其自身的连续线性映射.

下面的定理阐明了基本函数空间 $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ 与基本函数空间 $S(\mathbf{R}^n)$ 之间的关系.

**定理 2.1 空间 $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ 与 $S(\mathbf{R}^n)$ 有如下的关系：**

**(i) 作为集合来说，有 $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)\subset S(\mathbf{R}^n)$；**

**(ii) 设 $\{\varphi_m\}\subset\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$，$\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$. 若 $\{\varphi_m\}\xrightarrow{\mathscr{D}}\varphi$，则 $\{\varphi_m\}\xrightarrow{S}\varphi$，就是说 $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ 中的收敛概念强于 $S(\mathbf{R}^n)$ 中的收敛概念；**

**(iii) 按照 $S(\mathbf{R}^n)$ 中的收敛概念，$\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ 在 $S(\mathbf{R}^n)$ 中稠密，即对任一 $\varphi\in S(\mathbf{R}^n)$，有 $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ 中的序列 $\{\varphi_m\}$ 使 $\{\varphi_m\}\xrightarrow{S}\varphi$.**

**证** (i) 在前面已经阐明(见第356页).

(ii) 根据 $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ 中收敛概念的定义，若 $\{\varphi_m\}\xrightarrow{\mathscr{D}}\varphi$，则存在 $\mathbf{R}^n$ 中的紧集 $K$ 使得对一切 $m=1,2,3,\cdots$，有

$$\operatorname{supp}\varphi_m\subset K.$$

其次，$\{D^p\varphi_m\}$ 关于 $m$ 显然是一致有界的. 因此对任意两个多重指标 $p,q$，有

$$\sup_m \|\varphi_m\|_{pq} < \infty,$$

故定义 2.2 中的(i)满足.

仍由$\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$中收敛概念的定义，对任一多重指标 $p$, $\{D^p\varphi_m\}$ 于 $\mathbf{R}^n$ 上一致收敛于 $D^p\varphi$，故定义 2.2 中的(ii)满足. 因此$\{\varphi_m\}$ $\xrightarrow{S}\varphi$.

(iii) 由 § 1例2，存在 $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$中的函数 $\varphi_0$ 满足

1° 当$\|x\|\leqslant 1$ 时，$\varphi_0(x)=1$;

2° 当$\|x\|\geqslant 2$ 时，$\varphi_0(x)=0$;

3° 当$1<\|x\|<2$ 时， $0\leqslant\varphi_0(x)\leqslant 1$.

今任取 $\varphi\in S(\mathbf{R}^n)$，对每个自然数 $m$，令

$$\varphi_m(x)=\varphi_0\left(\frac{x}{m}\right)\varphi(x).$$

则 $\varphi_m\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$. 考虑下面的差

$$\varphi(x)-\varphi_m(x)=\left[1-\varphi_0\left(\frac{x}{m}\right)\right]\varphi(x)$$

的 $p$ 阶偏导数. 由乘积的求导运算法则可知，$D^p\left[1-\varphi_0\left(\frac{x}{m}\right)\right]$ $\varphi(x)$是形如

$$D^k\varphi(x)\left(\frac{1}{m}\right)^{|l|}\{D^l\varphi_0(x')\}\Big|_{x'=\frac{x}{m}} \tag{3}$$

的项以及项

$$[D^p\varphi(x)]\left[1-\varphi_0\left(\frac{x}{m}\right)\right] \tag{4}$$

的线性组合，(3)中多重指标 $k$、$l$ 满足

$$|k|+|l|=|p| \quad 而 |l|>0.$$

由 $\varphi_0$ 的性质 2°，对形如(3)中的项，有

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^n}\left|x^q D^k\varphi(x)\left(\frac{1}{m}\right)^{|l|}\{D^l\varphi_0(x')\}_{x'=\frac{x}{m}}\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{m} \| \varphi \|_{kq} \| \varphi_0 \|_{l0}. \tag{5}$$

对(4)中的项，由 $\varphi_0$ 的性质 $3°$，

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| x^q D^p \varphi(x) \left[ 1 - \varphi_0\left(\frac{x}{m}\right) \right] \right|$$
$$\leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^n} | x^q D^p \varphi(x) | \leqslant \| \varphi \|_{pq}. \tag{6}$$

因此，由(5)、(6)可知，当 $p, q$ 给定时，

$$\sup_m \| \varphi - \varphi_m \|_{pq} < \infty. \tag{7}$$

另一方面，因$\varphi\in S(\mathbb{R}^n)$，由(1)，存在$c_p>0$，使得$|(1+\|x\|^2)D^p\varphi(x)| \leqslant c_p$对一切$x\in\mathbb{R}^n$成立. 于是对任给的$\varepsilon>0$，存在 $m_0$，使当$\|x\|\geqslant m_0$时，有

$$|D^p\varphi(x)| < \varepsilon,$$

于是更有

$$\left| [D^p \varphi(x)] \left[ 1 - \varphi_0\left(\frac{x}{m}\right) \right] \right| < \varepsilon \tag{8}$$

对于$\|x\|\geqslant m_0$以及一切$m$成立.

如果$\|x\|\leqslant m_0$. 那么当 $m>m_0$，有 $1-\varphi_0\left(\frac{x}{m}\right)=0$，因此(8)仍成立. 这样对一切 $x\in\mathbb{R}^n$，当 $m>m_0$ 时，均有(8)成立. 在不等式(5)中取 $q=0$ 然后将(5)与(8)结合在一起考虑便知道，序列$\left\{D^p\left[\varphi(x)\left(1-\varphi_0\left(\frac{x}{m}\right)\right)\right]\right\}$在 $\mathbb{R}^n$ 上一致收敛于零，即序列$\{D^p[\varphi(x)-\varphi_m(x)]\}$在 $\mathbb{R}^n$ 上一致收敛于零. 由这一事实及不等式(7)再注意到$\varphi_m\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$可知，$\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$按照 $S(\mathbb{R}^n)$ 中的收敛概念在 $S(\mathbb{R}^n)$ 中稠密. 证毕.

### 2.2 基本函数空间 $S(\mathbb{R}^n)$上的 Fourier 变换

在这一段中，我们研究 $S(\mathbb{R}^n)$ 上的 Fourier 变换. 对每个给定的 $t\in\mathbb{R}^n$，由等式

$$e_t(x)=e^{it\cdot x} \quad (x\in\mathbf{R}^n)$$

定义的函数 $e_t$ 称为一个特征．显然每个 $e_t$ 满足等式

$$e_t(x+y)=e_t(x)e_t(y) \quad (x、y\in\mathbf{R}^n).$$

因此对每个给定的 $t$，$e_t$ 是由加法群 $\mathrm{R}^n$ 到由模为 1 的复数构成的乘法群上的同态．利用这个同态可以定义Fourier变换．

设 $\varphi\in L(\mathrm{R}^n)$．由等式

$$\phi(t)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbf{R}^n}e^{-it\cdot x}\varphi(x)\,dx \tag{9}$$

定义的函数 $\phi$ 称为 $\varphi$ 的 Fourier 变换．

现在我们来考察空间 $S(\mathbf{R}^n)$ 中的函数．根据定义，空间 $S(\mathbf{R}^n)$ 中的每一个函数 $\varphi$ 均属于 $L(\mathbf{R}^n)$，因此引入下面的定义是很自然的．

**定义 2.3** 设 $\varphi\in S(\mathrm{R}^n)$，称由等式(9)定义的函数 $\phi$ 为 $\varphi$ 的 Fourier 变换．

由于每个函数 $\varphi\in S(\mathbf{R}^n)$ 都有 Fourier 变换，于是可以作映射 $F:\varphi\mapsto\phi$，称 $F$ 为空间 $S(\mathbf{R}^n)$ 上的Fourier变换．下面的定理2.2刻划了 $F$ 的一些重要特性．先证一条引理．

**引理** 记(见例1)

$$\psi_n(x)=e^{-\frac{1}{2}|x|^2} \quad (x\in\mathrm{R}^n),$$

则下列性质成立：

(i) $\psi_n$ 及 $\hat{\psi}_n$ 均属于 $S(\mathrm{R}^n)$；

(ii) $\psi_n(0)=\dfrac{1}{(2\pi)^{n/2}}\displaystyle\int_{\mathrm{R}^n}\hat{\psi}_n(x)\,dx.$

**证** (i) 由例 1 可知 $\psi_n\in S(\mathbf{R}^n)$．由古典分析中Fourier变换的性质再通过直接计算可知 $\hat{\psi}_n\in S(\mathrm{R}^n)$．

(ii) 先考察一元的情形，这时 $\psi_1(x)=e^{-\frac{1}{2}x^2}$．容易证明 $\psi_1$ 是下面微分方程的一个解

$$y'+xy=0. \tag{10}$$

其次我们证明 $\hat{\psi}$ 也是方程(10)的一个解．其实

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\hat{\psi}_1(x)&=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{\mathrm{R}}e^{-ixt}(-it)\psi_1(t)dt\\&=\frac{i}{(2\pi)^{1/2}}\int_{\mathrm{R}}e^{-ixt}\psi_1'(t)dt\ (\text{因 } \psi_1 \text{ 满足(10)})\\&=\frac{-x}{(2\pi)^{1/2}}\int_{\mathrm{R}}e^{-ixt}\psi_1(t)dt\ (\text{由分部积分公式})\\&=-x\hat{\psi}_1(x).\end{aligned}$$

故 $\hat{\psi}_1$ 满足(10)．另一方面，由 $\int_{\mathrm{R}}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx=(2\pi)^{1/2}$ 可知，$\hat{\psi}_1(0)=1$．而 $\psi_1(0)$ 显然等于1．由于当初始条件给定后，方程(10)的解唯一，因此 $\psi_1(x)=\hat{\psi}_1(x)$．于是

$$\begin{aligned}\psi_1(0)=\hat{\psi}_1(0)&=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{\mathrm{R}}\psi_1(t)dt\\&=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{\mathrm{R}}\hat{\psi}_1(t)dt.\end{aligned}$$

这表明当 $n=1$ 时，(ii)成立．注意到在一般情形下，有

$$\psi_n(x)=\psi_1(x_1)\psi_1(x_2)\cdots\psi_1(x_n)$$
$$\hat{\psi}_n(t)=\hat{\psi}_1(t_1)\hat{\psi}_1(t_2)\cdots\hat{\psi}_1(t_n).$$

由此容易证明，一般情形下，(ii)仍成立．证毕．

**定理 2.2** 空间 $S(\mathrm{R}^n)$ 上的 Fourier 变换 $F:\varphi\mapsto\hat{\varphi}$ 具有下列性质：

(i) $F$ 是由 $S(\mathrm{R}^n)$ 到其自身的双映射，因此 $F^{-1}$ 存在；

(ii) $F^{-1}$ 称为逆Fourier变换 $F^{-1}:\hat{\varphi}\mapsto\varphi$ 由下面的反演公式给出：

$$\varphi(x)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathrm{R}^n}e^{ix\cdot t}\hat{\varphi}(t)dt; \tag{11}$$

(iii) $F$ 及 $F^{-1}$ 都是连续的．

**证** 先证明 $F$ 是由 $S(\mathrm{R}^n)$ 到其自身的映射．任取 $\varphi\in S(\mathrm{R}^n)$，

对任一多重指标 $p$，有

$$D^p\phi(t)=\frac{(-i)^{|p|}}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbf{R}^n}x^p e^{-it\cdot x}\varphi(x)dx,$$

再注意到 Fourier 变换的如下特性：$t^q\varphi(t)=(-i)^{|q|}\widehat{D^q\varphi}(t)$，其中 $q$ 也是多重指标，于是

$$t^q D^p\phi(t)=\frac{(-i)^{|p|+|q|}}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbf{R}^n}e^{-it\cdot x}D^q[x^p\varphi(x)]dx. \qquad (12)$$

由定义 2.2 后面的性质 2° 可知，$D^q[x^p\varphi(x)]$是$S(\mathbf{R}^n)$中的一个元素，因此属于 $L(\mathbf{R}^n)$．(12)中的积分有意义且由(12)可知，

$$\sup_{t\in\mathbf{R}^n}|t^q D^p\phi(t)|<\infty,$$

即 $\phi\in S(\mathbf{R}^n)$．$F$ 是由 $S(\mathbf{R}^n)$到其自身的一个映射．

在证明$F$为双映射之前，我们先证明对任一 $\varphi\in S(\mathbf{R}^n)$，反演公式(11)成立．

任取 $\varphi$、$\psi\in S(\mathbf{R}^n)$，将 Fubini 定理应用于下面两个相等的重积分：

$$\int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}\varphi(x)\psi(t)e^{-i(mx)\cdot t}dxdt$$
$$=\int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}\varphi(x)\psi(t)e^{-ix\cdot(mt)}dx\,dt,$$

可以得到等式

$$\int_{\mathbf{R}^n}\varphi(x)\hat{\psi}(mx)dx=\int_{\mathbf{R}^n}\phi(mt)\psi(t)dt.$$

或者

$$\int_{\mathbf{R}^n}\varphi\left(\frac{x}{m}\right)\hat{\psi}(x)dx=\int_{\mathbf{R}^n}\phi(t)\ \psi\left(\frac{t}{m}\right)dt.$$

令 $m\to\infty$，有 $\varphi\left(\frac{x}{m}\right)\to\varphi(0)$，$\psi\left(\frac{t}{m}\right)\to\psi(0)$．由 Lebesgue 控制收敛定理(因 $\varphi$、$\psi\in S(\mathbf{R}^n)$，故 Lebesgue 控制收敛定理可以使用)，得

$$\varphi(0)\int_{\mathbf{R}^n}\hat{\psi}(x)\,dx=\psi(0)\int_{\mathbf{R}^n}\hat{\varphi}(t)\,dt.$$

取 $\psi$ 为引理中的函数 $\psi_n$，得 $\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbf{R}^n}\hat{\psi}_n(x)\,dx=\psi_n(0)$，因此

$$\varphi(0)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbf{R}^n}\hat{\varphi}(t)\,dt.$$

对任一 $x\in\mathbf{R}^n$，注意到

$$\varphi(x)=(\tau_x\varphi)(0)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbf{R}^n}\widehat{(\tau_x\varphi)}(t)\,dt$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbf{R}^n}e^{ix\cdot t}\hat{\varphi}(t)\,dt.$$

反演公式(11)成立．

由反演公式(11)可知，当 $\hat{\varphi}=\theta$ 时，$\varphi=\theta$，故 $F$ 是单映射．仍由反演公式，有

$$F^2\varphi(x)=F\hat{\varphi}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbf{R}^n}e^{-ix\cdot t}\hat{\varphi}(t)\,dt$$

$$=\varphi(-x).$$

因此 $F^4\varphi=\varphi$．由此可知 $F$ 是满映射，于是为双映射．这样(i)及(ii)均已得到证明．

剩下的还需证明(iii)．设 $\{\varphi_m\}\subset S(\mathbf{R}^n)$ 且 $\{\varphi_m\}\xrightarrow{S}\theta$．由定义 2.2 后面的性质 2°，对任一多重指标 $p$，序列

$$\{(1+\|x\|^2)^n x^p\varphi_m(x)\}$$

于 $\mathbf{R}^n$ 上一致收敛于零．再由Fourier变换的定义可得不等式

$$|D^p\hat{\varphi}_m(t)|\leqslant\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbf{R}^n}\frac{1}{(1+\|x\|^2)^n}(1+\|x\|^2)^n|x^p\varphi_m(x)|\,dx.$$

因此 $\{D^p\hat{\varphi}_m(t)\}$ 于 $\mathbf{R}^n$ 上一致收敛于零．至于 $\{\hat{\varphi}_m\}$ 满足(2)，则可以通过估计 $|t^qD^p\hat{\varphi}_m(t)|$ 得到．因此 $\{\hat{\varphi}_m\}\xrightarrow{S}\theta$．$F$ 连续．同理可证 $F^{-1}$ 连续．证毕．

**2.3　广义函数空间 $S'(\mathbf{R}^n)$ 及其上的 Fourier 变换．**

**定义 2.4** 基本函数空间 $S(\mathbf{R}^n)$上的连续线性泛函称为缓增广义函数. 全部缓增广义函数构成的集合记为 $S'(\mathbf{R}^n)$. $S'(\mathbf{R}^n)$按照通常连续线性泛函的线性运算是一个复线性空间. 在$S'(\mathbf{R}^n)$中定义收敛概念如下:设$\{f_m\}\subset S'(\mathbf{R}^n)$, $f\in S'(\mathbf{R}^n)$,如果对任一$\varphi\in S(\mathbf{R}^n)$,有

$$\{(f_m,\varphi)\}\to(f,\varphi),$$

则称$\{f_m\}$在 $S'(\mathbf{R}^n)$中收敛于 $f$,记为$\{f_m\}\xrightarrow{S'}f$. 称 $S'(\mathbf{R}^n)$按照它的线性运算与收敛概念为缓增广义函数空间.

缓增广义函数空间 $S'(\mathbf{R}^n)$也有与§1中定理1.2、定理1.3及定理1.4完全类似的结论, 而且它们构成空间 $S'(\mathbf{R}^n)$的重要性质.

**例 2** 设$P$为任一多项式,由等式

$$(P^*,\varphi)=\int_{\mathbf{R}^n}P(x)\varphi(x)dx\quad(\varphi\in S(\mathbf{R}^n))$$

显然定义了 $S(\mathbf{R}^n)$上的一个连续线性泛函 $P^*$. 因此 $P^*$ 是缓增广义函数. 这样,任一多项式均为缓增广义函数.

现在着手定义缓增广义函数的Fourier变换. 由定理2.2, $\varphi\mapsto\hat{\varphi}$ 是由 $S(\mathbf{R}^n)$到其自身的连续线性双映射. 于是对于任一$f\in S'(\mathbf{R}^n)$,由等式

$$(g,\varphi)=(f,\hat{\varphi})\quad(\varphi\in S(\mathbf{R}^n)).\tag{13}$$

定义了 $S(\mathbf{R}^n)$上的一个连续线性泛函 $g$, 因而是一个缓增广义函数.

**定义 2.5** 称 $g$ 为 $f$ 的 Fourier 变换,记为 $g=\hat{f}$.

由(13)可知

$$(\hat{f},\varphi)=(f,\hat{\varphi}).\tag{14}$$

仍用$F$表映射: $f\mapsto\hat{f}$ 并称$F$为 $S'(\mathbf{R}^n)$ 上的 Fourier 变换.

现在设 $f\in L(\mathbf{R}^n)$,由等式

$$(f^*, \varphi) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\varphi(x)\,dx \quad (\varphi \in S(\mathbf{R}^n))$$

定义了一个缓增广义函数 $f^*$，于是 $\widehat{f^*}$ 也是缓增广义函数. 由 Fubine定理:

$$(\widehat{f^*}, \varphi) = (f^*, \hat{\varphi}) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\hat{\varphi}(x)\,dx$$

$$= \int_{\mathbf{R}^n} \hat{f}(x)\varphi(x)\,dx. \tag{15}$$

(15)表明 $\widehat{f^*}$ 是由 $\hat{f}$ 定义的函数型广义函数，因此缓增广义函数的 Fourier 变换乃是通常古典分析中函数的 Fourier 变换的自然推广.

下面的定理阐明了 $S'(\mathbf{R}^n)$ 上 Fourier 变换的重要特征.

**定理 2.3　缓增广义函数空间 $S'(\mathbf{R}^n)$ 上的 Fourier 变换具有下列性质:**

(i) **$F$ 是 $S'(\mathbf{R}^n)$ 到其自身的双映射，因此 $F^{-1}$ 存在;**

(ii) **$F$ 及 $F^{-1}$ 都是连续的;**

(iii) **设 $f \in S'(\mathbf{R}^n)$，$P$ 为多项式，则**

$$[P(D)f]^\wedge = P\hat{f}, \ (P(D) \text{的含义见57}) \tag{16}$$

$$[Pf]^\wedge = P(-D)\hat{f}. \tag{17}$$

**证**　(i) 任取 $\varphi \in S(\mathbf{R}^n)$、$f \in S'(\mathbf{R}^n)$. 由等式 $F^4\varphi = \varphi$，有

$$(f, \varphi) = (f, FF^3\varphi) = (F^3Ff, \varphi);$$

及

$$(f, \varphi) = (f, F^3F\varphi) = (FF^3f, \varphi).$$

因此

$$f = F(F^3)f = (F^3)Ff. \tag{18}$$

故 $F$ 是由 $S'(\mathbf{R}^n)$ 到其自身的双映射，于是 $F^{-1}$ 存在; 且由(18)，$F^{-1} = F^3$. 下面证明 $F$ 连续. 设 $\{f_m\} \subset S'(\mathbf{R}^n)$，$f \in S'(\mathbf{R}^n)$ 且 $\{f_m\} \xrightarrow{S'} f$. 任取 $\varphi \in S(\mathbf{R}^n)$，有

$$(Ff_m, \varphi) = (f_m, F\varphi)$$
$$\longrightarrow (f, F\varphi) = (Ff, \varphi).$$

故 $\{Ff_m\} \xrightarrow{S'} Ff$，$F$ 连续．于是 $F^{-1}(=F^3)$ 也连续．(i)及(ii)全部证毕．

(iii) 通过计算

$$([P(D)f]^\wedge, \varphi) = (P(D)f, \hat{\varphi})$$
$$= (f, P(-D)\hat{\varphi}) = (f, (P\varphi)^\wedge)$$
$$= (\hat{f}, P\varphi) = (P\hat{f}, \varphi), \qquad \text{(见下面的注)}$$
$$(P(-D)\hat{f}, \varphi) = (\hat{f}, P(D)\varphi)$$
$$= (f, [P(D)\varphi]^\wedge) = (f, P\hat{\varphi})$$
$$= (Pf, \hat{\varphi}) = ((Pf)^\wedge, \varphi). \qquad \text{(见下面的注)}$$

故(iii)中的两个等式均成立．证毕．

**注** 由定义 2.2 后面的性质 2°，对任一多项式 $P$，映射：$\varphi \mapsto P\varphi$ 是由 $S(\mathbf{R}^n)$ 到其自身的连续映射，因此等式

$$(Pf, \varphi) = (f, P\varphi)$$

定义了 $S(\mathbf{R}^n)$ 上的一个连续线性泛函 $Pf$．这样定理 2.3(iii) 证明中的全部推理是合理的．

**例 3** 1° 设 $f(x) = 1 (x \in \mathbf{R}^n)$，由等式

$$(f^*, \varphi) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\varphi(x)\,dx \quad (\varphi \in S(\mathbf{R}^n))$$

定义了 $S(\mathbf{R}^n)$ 上一个函数型广义函数 $f^*$．现在求 $f^*$ 的 Fourier 变换．由反演公式(11)，

$$(\widehat{f^*}, \varphi) = (f^*, \hat{\varphi}) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\hat{\varphi}(x)\,dx$$

$$= \int_{\mathbf{R}^n} \hat{\varphi}(x)\,dx = (2\pi)^{n/2}\varphi(0) = (2\pi)^{n/2}(\delta, \varphi).$$

故 $\widehat{f^*} = (2\pi)^{n/2}\delta$．注意到 $f^*$ 是由恒等于 1 的函数所定义，等式

$\widehat{f^*}=(2\pi)^{n/2}\delta$ 可改记为 $\widehat{1}=(2\pi)^{n/2}\delta$. 因此 1 的 Fourier 变换是 Dirac 函数 $\delta$ 乘以常数因子 $(2\pi)^{n/2}$.

类似地,

$$(\hat{\delta},\varphi)=(\delta,\hat{\varphi})=\hat{\varphi}(0)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbf{R}^n}\varphi(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}(1,\varphi).$$

故 $\hat{\delta}=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\cdot 1$. 这表明 Dirac 函数 $\delta$ 的 Fourier 变换是恒等于 1 的函数乘以常数因子 $\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}$.

**2°** 在公式(16)中令 $f=\delta$, 得到

$$[P(D)\delta]^{\wedge}=P\hat{\delta}=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}P.$$

在公式(17)中令 $f=1$, 得到

$$\hat{P}=P(-D)\widehat{1}=(2\pi)^{n/2}P(-D)\delta.$$

在古典分析中,多项式的 Fourier 变换是不存在的, 但在广义函数的意义下, 任一多项式都有 Fourier 变换而且可以算出它的结果. 这从一个侧面反映了广义函数理论的重要.

## 第十章 习 题

1. 设 $1\leqslant p<\infty$, 证明 $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ 在 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 中稠密, 如果 $f\in L^p(\mathbf{R}^n)$ 有界, 则在 $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ 中可以取出一致有界的函数列 $\{\varphi_n\}$ 使 $\|f-\varphi_n\|_{L^p(\mathbf{R}^n)}\to 0$.

2. 在 $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$ 中, 求证

(a) $\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\longrightarrow\delta(x)\ (\varepsilon\to 0+)$;

(b) $\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\longrightarrow\delta(x)\ (t\to 0+)$.

3. 设 $\{f_m\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的局部可积函数序列, 且对每个紧集 $K$, 有

$$\lim_{m\to\infty}\int_K|f_m(x)|\,dx=0.$$

试证:对每个多重指标 $p$, $\{D^p f_m\}$ 在 $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ 中收敛于零.

4. 证明:对任何 $f\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$, $\delta*f=f$.

5. 证明

(a) $\delta'*h=\delta$, 这里 $h$ 是 Heaviside 函数;

(b) $1*\delta'=0$, 这里 $1$ 被看作广义函数.

6. 设 $f\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$, 且 $\operatorname{supp} f$ 为紧集. 证明 $\hat{f}$ 是通常的函数.

# 参考书目与文献


[1] 南京大学数学系,泛函分析,人民教育出版社,1961.

[2] 夏道行等,实变函数论与泛函分析,下册(第二版),高等教育出版社,1985.

[3] 关肇直,泛函分析讲义,高等教育出版社,1958.

[4] 夏道行等,泛函分析第二教程,高等教育出版社,1987.

[5] 关肇直、张恭庆、冯德兴,线性泛函分析入门,上海科学技术出版社,1979.

[6] 张恭庆、林源渠,泛函分析讲义,北京大学出版社,1987.

[7] 江泽坚.吴智泉,实变函数,高等教育出版社,1961.

[8] 程其襄等:实变函数与泛函分析基础,高等教育出版社,1983.

[9] И.П.那汤松,函数构造论,何旭初、唐述钊译,科学出版社,1959.

[10] Л.А.刘斯铁尔尼克、B.И.索波列夫,泛函分析概要(第二版),杨从仁译,科学出版社,1985.

[11] N. Dunford and J. T. Schwartz, Linear Operators, Part I, General Theory, Interscience, Publishers New York, 1958.

[12] Balmohan Yishna Limaye, Functional Analysis, Wiley Eastern Limited, New Delhi, 1981.

[13] R.克里斯台斯库,泛函分析,曾世杰译,科学出版社,1988.

[14] 陈文塬,非线性泛函分析,甘肃人民出版社,1982.

[15] W.Rudin,泛函分析,赵俊峰等译,湖北教育出版社,1989.

# 索　　引

## 一、二、三划

## 四 划



## 五 划

## 六 划

## 七　划

## 八　划

## 九 划

## 十　划



## 十一划

## 十 二 划



## 十 三 划



## 十 四 划

## 十 五 划